This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

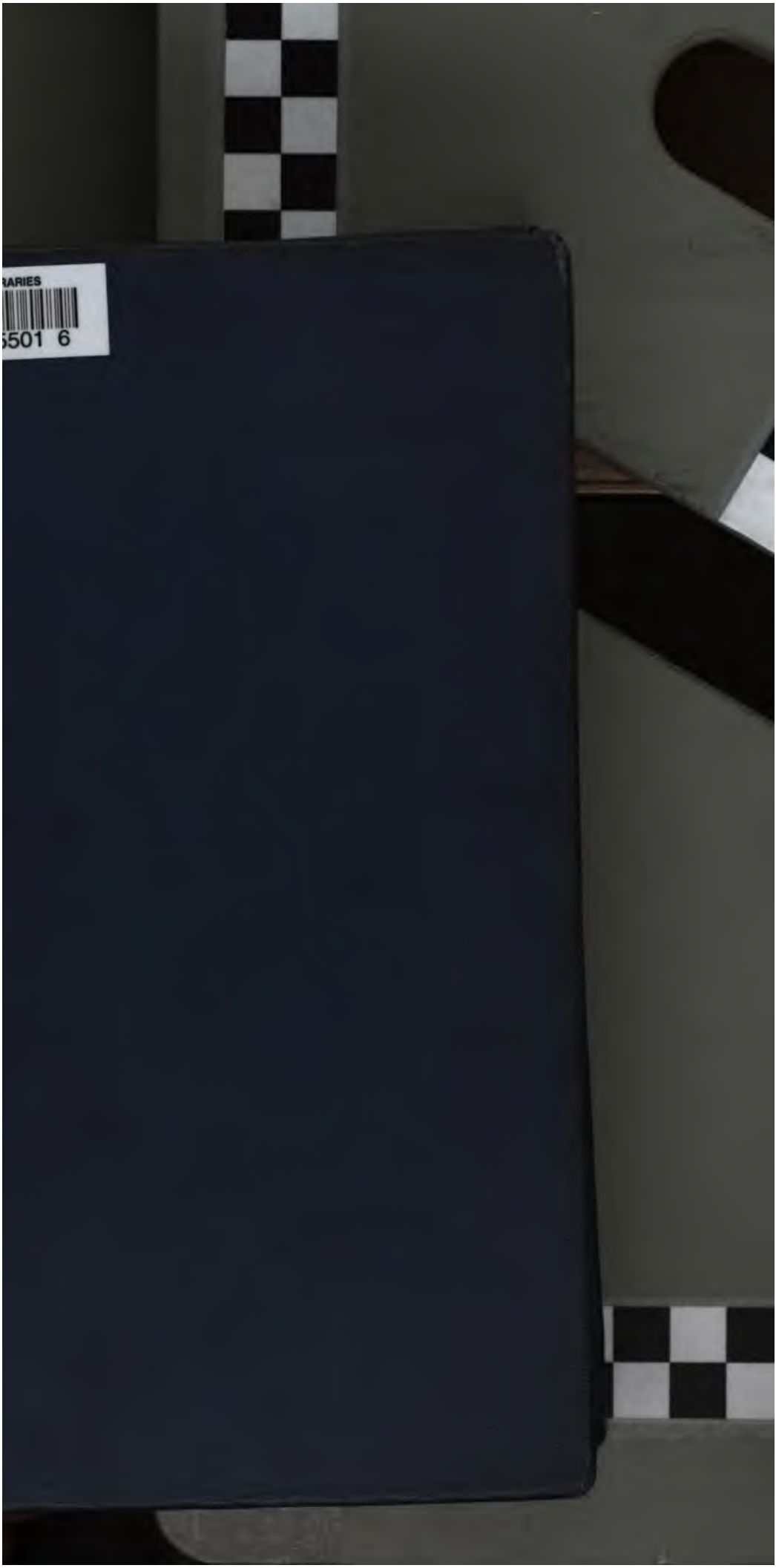
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


RARIES
5501 6

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 6.

# ANNALEN
DER
# PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

**BAND 6.**

DER GANZEN REIHE 311. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

## PAUL DRUDE.

MIT ZWEI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1901.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

[illegible]

# Inhalt.

## Vierte Folge. Band 6.

### Neuntes Heft.


| | | Seite |
|---|---|---|
| 1. | W. Seitz. Beiträge zur Kenntnis der Kathodenstrahlen . . | 1 |
| 2. | K. Tangl. Wirkung der Magnetisirung auf den Dehnungsmodul | 34 |
| 3. | G. Tammann. Ueber Tripelpunkte . . . . . | 65 |
| 4. | R. Hollmann und G. Tammann. Zwei Zustandsdiagramme | 74 |
| 5. | H. Mosler. Der Temperaturcoefficient der Susceptibilität einiger Salzlösungen der Eisengruppe, mit besonderer Berücksichtigung des Eisenchlorids . . . . . | 84 |
| 6. | R. H. Weber. Ueber die durch elektrische Spitzenentladung erzeugten Curven . . . . . | 96 |
| 7. | A. Winkelmann. Ueber die Diffusion von Wasserstoff durch Palladium . . . . . | 104 |
| 8. | P. Schönherr. Zur Kenntnis der Polarisationscapacität des blanken Platins . . . . . | 116 |
| 9. | E. Warburg. Ueber die Polarisationscapacität des Platins . | 125 |
| 10. | L. Holborn und E. Grüneisen. Ueber die Ausdehnung von Porzellan und Glas in hoher Temperatur . . . . . | 136 |
| 11. | L. Lownds. Ueber das thermomagnetische und thermoelektrische Verhalten des krystallinischen Wismuts . . . . . | 146 |
| 12. | K. Ångström. Ueber die Abhängigkeit der Absorption der Gase, besonders der Kohlensäure, von der Dichte . . . . . | 163 |
| 13. | I. Klemenčič. Ueber die Aufbewahrung von Normalmagneten in Eisenbüchsen . . . . . | 174 |
| 14. | I. Klemenčič. Beiträge zur Kenntnis des Magnetisirungsvorganges I. Ueber Härtungsnachwirkungen . . . . . | 181 |
| 15. | O. Lummer und E. Pringsheim. Kritisches zur schwarzen Strahlung . . . . . | 192 |
| 16. | B. Woringer. Ein Schwimmerdoppelventil als einfaches Hülfsmittel im Laboratorium, um Quecksilber zu heben . . . . . | 211 |
| 17. | Th. Middel. Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. W. Felgentraeger zu meiner Arbeit: „Deformation durch Erwärmung als Ursache für die thermische Veränderung der Empfindlichkeit von Waagen“ . . . . . | 214 |


*Ausgegeben am 15. August 1901.*

**Zehntes Heft.**

Se
1. M. Abraham. Energie elektrischer Drahtwellen . . . . . 2
2. L. Holborn. Untersuchungen über Platinwiderstände und Petroläther-thermometer . . . . . 2
3. F. Tamm. Ueber den Einfluss des Luftdruckes und der Luftfeuchtigkeit auf die Entladung statischer Elektricität aus Spitzen 2
4. M. Thiesen. Ueber die angebliche Anomalie des Sauerstoffs bei geringem Drucke . . . . . 2
5. H. Schultze. Ueber die innere Reibung von Helium und ihre Aenderung mit der Temperatur . . . . . 3
6. R. Gans. Ueber die Abhängigkeit der elektrolytischen Ueberführung und der elektromotorischen Kraft reversibler Elemente von physikalischen Einflüssen . . . . . 3
7. J. Sauter. Zur Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien 3
8. M. Toepler. Einfluss von Diaphragmen auf elektrische Dauerentladung durch Luft von Atmosphärendruck . . . . . 3
9. L. Matthiessen. Das astigmatische Bild des horizontalen, ebenen Grundes eines Wasserbassins . . . . . 3
10. E. Knoblauch. Beitrag zur Kenntnis der Spitzenentladung aus einem Teslapole . . . . . 3
11. L. Silberstein. Symbolische Integrale der elektromagnetischen Gleichungen, aus dem Anfangszustand des Feldes abgeleitet, nebst Andeutungen zu einer allgemeinen Theorie physikalischer Operatoren . . . . . 3
12. H. Kreusler. Ueber den photoelektrischen Effect in der Nähe des Funkenpotentiales . . . . . 3
13. H. Kreusler. Anwendung des photoelektrischen Stromes zur Photometrie der ultravioletten Strahlen . . . . . 4
14. M. Eschenhagen. Werte der erdmagnetischen Elemente zu Potsdam für das Jahr 1900, sowie der Säcularvariationen für die Zeit von 1890 bis 1900 . . . . . 4
15. H. Thiele und M. Eckardt. Ueber quecksilbergedichtete Hähne . . . . . 4
16. J. Zenneck. Berichtigung . . . . . 4

*Ausgegeben am 3. October 1901.*

**Elftes Heft.**

1. Peter Lebedew. Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes . . . . . 4
2. W. Voigt. Beiträge zur Elektronentheorie des Lichtes . . . 4
3. J. Koenigsberger. Ueber die Verwendung des Quadrantelektrometers zur ballistischen Messung der magnetischen Feldstärke und über die Susceptibilität des Wassers . . . . . 5

Seite

4. E. Wenzel. Beitrag zur Kenntnis der Volumen- und Dichtigkeitsänderungen von Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen 520
5. Max Reinganum. Zur Theorie der Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase . . . . . 533
6. Max Reinganum. Beitrag zur Prüfung einer Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase . . . . . 549
7. Leo Grunmach. Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung flüssiger Luft . . . . . 559
8. Robert Weber. Zur Sichtbarmachung der Deformation von Wechselströmen . . . . . 565
9. E. Aschkinass und W. Caspari. Ueber die Wirkung der Becquerelstrahlen auf Bacterien . . . . . 570
10. V. H. Veley und J. J. Manley. Ueber zwei einfache Methoden, Refractometerkreise zu calibriren . . . . . 575
11. H. Maurach. Ueber die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effectverlustes im Eisen von der Stärke der Magnetisirung . . . . . 580
12. Georg W. A. Kahlbaum. Glossen zu der selbstthätigen Quecksilberluftpumpe . . . . . 590
13. F. F. Martens. Ueber die Dispersion ultravioletter Strahlen 603
14. Max Kohl. Transportabler Apparat für Cavendish's Versuch über Massenanziehung . . . . . 641
15. F. Paschen. Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers. Entgegnung auf Ausführungen der Herren O. Lummer und E. Pringsheim . . . . . 646
16. A. Baur. Bemerkung zu der Mitteilung des Hrn. L. Lewin: „Zur Geschichte der Telegraphie“ . . . . . 659

*Ausgegeben am 7. November 1901.*

**Zwölftes Heft.**

1. O. Lehmann. Ueber Elektrisirung der Luft durch Glimmentladung . . . . . 661
2. G. R. Olshausen. Ueber die Unipolarrotation . . . . . 681
3. Carl Benedicks. Ueber die Entmagnetisirungsfactoren kreiscylindrischer Stäbe . . . . . 726
4. Franz Kiebitz. Bestimmungen der Resonanz elektrischer Schwingungen mit Hülfe des Cohärers . . . . . 741
5. A. W. Kapp. Ueber vollständige Gefrierpunktscurven binärer Metalllegirungen . . . . . 754
6. Anton Abt. Ueber den permanenten Magnetismus einiger Stahlspecialitäten (Manganstahl, Chromstahl, Nickelstahl, Wolframstahl etc.) . . . . . 774

Seite

7. W. Voigt. Magnetische Drehung der Polarisationsebene innerhalb eines Absorptionsstreifens . . . . . 784
8. O. Grotrian. Elektrometrische Untersuchungen über unipolare Induction . . . . . 794
9. Max Planck. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge . . . 818
10. G. Reichardt. Ueber die elektrischen Eigenschaften der Legirungen von Kupfer und Kobalt . . . . . 832
11. Robert Geigel. Beitrag zur akustischen Anziehung . . . 856
12. C. Dieterici. Zur Theorie des Sättigungszustandes . . . . 861
13. G. Jäger u. St. Meyer. Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. J. Koenigsberger betreffs der Susceptibilität des Wassers 870

*Ausgegeben am 5. December 1901.*

## Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. Hollmann und Tammann.
„ II. Lehmann, Figg. 1—28.

001. 6[illegible] Nr. 3.

# ANNALEN
DER
# PHYSIK.

VIERTE FOLGE.
BAND 3. HEFT 1.

HERAUSGEGEBEN
VON
P. DRUDE, M. PLANCK, E. WIEDEMANN
UND
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

REDIGIRT VON
M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON
PAUL DRUDE.

DRITTE FOLGE.

LEIPZIG, 1901.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

# Inhalt.


| | | Seite |
|---|---|---|
| 1. | W. Seitz. Beiträge zur Kenntnis der Kathodenstrahlen | 1 |
| 2. | K. Tangl. Wirkung der Magnetisirung auf den Dehnungsmodul | 31 |
| 3. | G. Tammann. Ueber Tripelpunkte | 65 |
| 4. | R. Hoffmann und G. Tammann. Zwei Zustandsdiagramme | 74 |
| 5. | H. Mosler. Der Temperaturcoefficient der Susceptibilität einiger Salzlösungen der Eisengruppe, mit besonderer Berücksichtigung des Eisenchlorids | 84 |
| 6. | E. H. Weber. Ueber die durch elektrische Spitzenentladung erzeugten Curven | 96 |
| 7. | A. Winkelmann. Ueber die Diffusion von Wasserstoff durch Palladium | 104 |
| 8. | P. Schönherr. Zur Kenntnis der Polarisationscapacität des blanken Platins | 116 |
| 9. | E. Warburg. Ueber die Polarisationscapacität des Platins | 125 |
| 10. | L. Holborn und E. Grüneisen. Ueber die Ausdehnung von Porcellan und Glas in hoher Temperatur | 138 |
| 11. | L. Lewande. Ueber das thermomagnetische und thermoelektrische Verhalten des krystallinischen Wismuts | 146 |
| 12. | K. Ångström. Ueber die Abhängigkeit der Absorption der Gase, besonders der Kohlensäure, von der Dichte | 155 |
| 13. | J. Klemenčič. Ueber die Aufbewahrung von Normalmagneten in Eisenbüchsen | 171 |
| 14. | J. Klemenčič. Beiträge zur Kenntnis des Magnetisirungsvorganges I. Ueber Härtungsnachwirkungen | 197 |
| 15. | O. Lummer und E. Pringsheim. Kritisches zur schwarzen Strahlung | 202 |
| 16. | B. Weinberger. Ein Schwimmerdoppelventil als einfaches Hülfsmittel im Laboratorium, um Quecksilber zu heben | 211 |
| 17. | Th. Middel. Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. W. Feigentrager zu meiner Arbeit: „Deformation durch Erwärmung als Ursache für die thermische Veränderung der Empfindlichkeit von Wagen" | 214 |


---


Manuscripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drude, zu senden. Seine Adresse ist Giessen, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und so den Correcturen den beim Druck für die verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Citate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mittheilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.



Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.

1901. № 9.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 6.

## 1. *Beiträge zur Kenntnis der Kathodenstrahlen; von W. Seitz.*

### Einleitung.

Die verschiedenen Arbeiten, welche in den letzten Jahren das Gebiet der Kathodenstrahlen behandelten, lassen die Ansicht berechtigt erscheinen, dass die Emissionstheorie ein in weitem Maasse der Wirklichkeit entsprechendes Bild der Erscheinungen giebt. Doch sind unsere Kenntnisse über das Wesen der die Strahlen bildenden Teilchen, der Elektronen, noch sehr gering.

Welcher Art z. B. die Wechselwirkung ist zwischen ihnen und den materiellen Atomen oder Molecülen, welche man im Vergleich zu der grossen Geschwindigkeit der Strahlen als ruhend annehmen kann, ob man es mit Reibungskräften oder conservativen Kräften zu thun hat, ob Anziehung oder Abstossung ausgeübt wird, ist bis jetzt völlig unbekannt.

Zur Klärung dieser Frage einiges beizutragen, ist die Aufgabe der folgenden Arbeit.

Für die Erforschung der Wirkung der Materie im festen Zustand auf die bewegten Kathodenstrahlenteilchen stehen zwei Wege offen, die Untersuchung der Reflexion und die der Erscheinungen beim Durchgang durch dünne Membranen.

### I. Teil.

### Reflexion der Kathodenstrahlen.

Beobachtet und untersucht wurde die diffuse Reflexion der Kathodenstrahlen an Metallflächen zuerst von Goldstein.[1])

1) E. Goldstein, Wied. Ann. 15. p. 254. 1882.

Es folgten dann Arbeiten von E. Wiedemann, H. Ebert und A. C. Swinton, durch welche die zurückgeworfenen Strahlen sich als ihrem Wesen nach den ursprünglichen gleich ergaben. Quantitativ bestimmte Starke[1]) das Reflexionsvermögen von Aluminium, Platin, Russ. Er fand, dass dasselbe mit dem Atomgewichte wächst, konnte aber keine Gesetzmässigkeit, die sich durch eine Formel ausdrücken liesse, nachweisen.

Ich unternahm es nun, diese Messungen auf eine grössere Anzahl von Metallen auszudehnen, wobei ich mich darauf beschränkte, das Verhältnis des Reflexionsvermögens verschiedener Stoffe zu bestimmen, vor allem aber die Abhängigkeit von Incidenz- und Emanationswinkel festzustellen, da ich hieraus Schlüsse auf das Wesen der Reflexion ziehen zu können hoffte.

Nach den Beobachtungen von Kaufmann und anderen werden die Kathodenstrahlen in einem Gase diffus zerstreut; es verhält sich also ein solches ihnen gegenüber wie ein trübes Medium, was ebenfalls ein Beweis für den ungeheuren Grössenunterschied zwischen den Elektrons und den materiellen Molecülen ist. Stellen wir uns nun ein Metall als aus räumlich getrennten Atomen bestehend vor, so werden die Kathodenstrahlenteilchen, falls keine Oberflächenkräfte wirken, in die Zwischenräume eindringen, an den Molecülen anprallen, dabei teilweise absorbirt werden, teilweise werden sie nach verschiedenen Zusammenstössen wieder in den Raum, aus welchem sie gekommen, zurückkehren. Würde sich der Mechanismus der Reflexion auf diese Weise erklären lassen, so könnte darauf das Lommel'sche Gesetz[2]) der Reflexion des Lichtes an trüben Medien übertragen werden. Es lautet in der vereinfachten Form

$$J = J_0 \frac{\cos i \cos e}{\cos i + \cos e},$$

wobei $J$ die Intensität der in einer bestimmten Richtung reflectirten Strahlen, $J_0$ die des einfallenden Strahlenbündels,

1) H. Starke, Wied. Ann. **66.** p. 49. 1898.

2) E. v. Lommel, Wied. Ann. **36.** p. 473. 1889.

$i$ den Incidenz-, $e$ den Emanationswinkel bedeuten. Wie die folgenden Untersuchungen zeigen, ist das Gesetz und daher auch das angedeutete Bild des Reflexionsvorganges absolut nicht anwendbar.

### Beschreibung der Apparate.

In der Grundidee schliesst sich meine Versuchsanordnung der von Hrn. Starke beschriebenen an, doch musste die Röhre eine etwas andere Gestalt bekommen, um die Variation von Emanations- und Incidenzwinkel zu ermöglichen.

Die 18 cm lange, 2 cm weite Röhre $R$ enthält in einem Schliffe drehbar die aus Aluminium angefertigte, sehr schwach concave Kathode $K$, und ist verschlossen durch das Doppeldiaphragma $D$, das zur Erde abgeleitet ist. Die kreisrunden Oeffnungen von $D$ haben einen Durchmesser von 2 mm. Die aus dem Diaphragma austretenden Strahlen sind nahezu parallel, denn der Durchmesser des von ihnen auf der gegenüber gelegenen Glaswand (wenn der Spiegel $S$ entfernt war) hervorgebrachten Flecks ist nur wenig grösser als die Oeffnung bei $D$.

An das Rohr $R$ schliesst sich das 14 cm weite kugelförmige Gefäss $A$. Der durchbohrte Stopfen $a$ trägt an einem Aluminiumstift den 7,3 × 2,5 cm grossen Doppelspiegel. Er besteht aus einer Aluminiumplatte, auf welche mittels Nuten die zu untersuchenden planen Bleche aufgeschoben wurden. Letztere hatten eine Dicke von 0,1—1 mm, sodass sicherlich absolut keine Strahlen durch dieselben hindurchdringen konnten.

In den durchbohrten Stopfen $b$ eingekittet ist das Glasrohr $G$, in welchem sich die Zuleitung zum Auffänger $F$ befindet. Dieser besteht aus einer 1,6 cm weiten Aluminiumdose mit 3 mm weiter Oeffnung. Um ihn vor irgendwelchen elektrischen Wirkungen, mögen diese von den Glaswänden mehrfach reflectirte Kathodenstrahlen sein, oder mögen sie durch die Leitungsfähigkeit des verdünnten Gases hervorgerufen werden, zu schützen, ist das Glasrohr sowie die Dose selbst durch eine ebenfalls aus Aluminium angefertigte Hülle, welche zur Erde abgeleitet ist, umgeben. Mit Firnis überzogene

Glimmerblättchen bilden die Isolation. Die Oeffnung der äusseren Dose bei $\delta$ ist, wie die Fig. 1 ergiebt, etwas enger als die der inneren. Ausserdem befindet sich an derselben ein 19 mm langes und 5 mm weites Metallröhrchen, das am anderen Ende durch ein äusserst feines Drahtnetz verschlossen ist.

Die Oeffnung $\delta$ des Auffängers hat die gleiche Höhe mit dem Diaphragma $D$ und ist auf den Mittelpunkt des Spiegels $S$

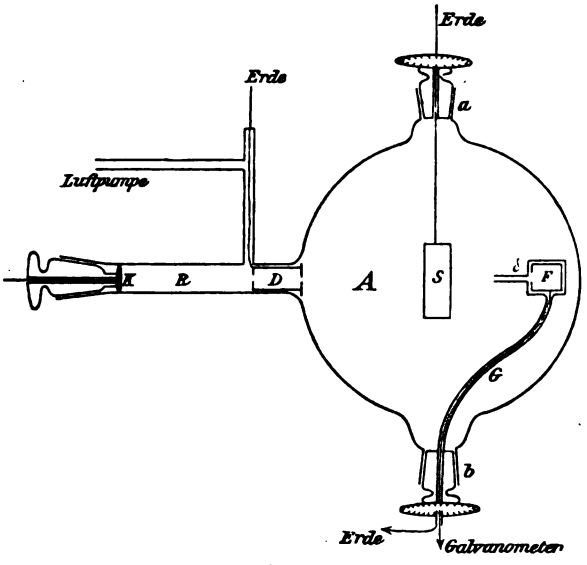



Fig. 1.

gerichtet. Durch Drehung der Stopfen $a$ und $b$, deren Axen in einer zu der Richtung der von $D$ ausgehenden Strahlen senkrechten Geraden liegen, sind Incidenzwinkel ($i$) und Emanationswinkel ($e$) beliebig zu variiren, wie Fig. 2 schematisch demonstrirt.

Die Winkel werden an Kreisteilungen, die bei $a$ und $b$ angebracht sind, abgelesen. Durch diese Versuchsanordnung ist erreicht, dass stets nur vom Spiegel reflectirte Strahlen in den Auffänger gelangen können, wenn man $e$ nie grösser als 70° wählt. Falls $i$ nicht 45° übersteigt, umfasst der Oeffnungswinkel $W$ den ganzen bestrahlten Fleck des Spiegels. Da ich

zu weite Schliffe wegen der durch das Fett verursachten Inconstanz des Vacuums vermeiden wollte, so musste der Auffänger stets im Innern des Gefässes erst zusammengesetzt werden.

Die Intensität der in den Auffänger gelangenden Kathodenstrahlen wurde gemessen, indem er mittels des Drahtes *Z* durch ein Galvanometer nach Paschen'scher Construction von der Empfindlichkeit $5 . 10^{-11}$ pro Millimeter Ausschlag zur Erde abgeleitet war. Das Inductorium nebst der den Primärstrom liefernden 5 Accumulatoren befand sich in einem mit

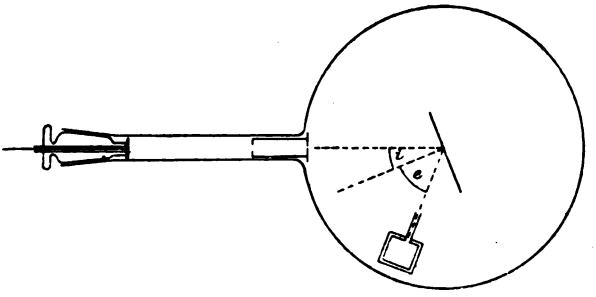



Fig. 2.

der Erde verbundenen Blechkasten, welcher auch den Teil *R* des Entladungsgefässes bis zum Diaphragma *D* umschloss. Auf diese Weise waren elektrostatische Wirkungen auf das Galvanometer und seine Zuleitungen ausgeschlossen. Eine Raps'sche Luftpumpe besorgte die Evacuation.

Eine Schwierigkeit bestand darin, dass bei den meisten Metallen durch Kathodenstrahlen mit der Zeit die Oberfläche verändert wurde. So sank z. B. durch Bestrahlung, welche im ganzen ungefähr 2 Stunden dauerte, das Verhältnis des Reflexionsvermögens von Aluminium und Kupfer von 1,77 auf 1,40. Da ich aber, um einigermaassen constantes Vacuum zu erhalten, stets, ehe ich mit den Messungen beginnen konnte, etwa eine Stunde lang Entladungen durch die Röhre hindurchgehen lassen musste, unter gleichzeitigem Arbeiten der Luftpumpe, so lenkte ich die Strahlen bei *R* durch einen Magneten ba, sodass sie gar nicht aus dem Diaphragma in den Versuchs-

raum austreten konnten. Ausserdem wurde dabei der Spiegel auf $i = 90^0$ gestellt.

### Beschreibung der Messungen.

Vor dem Einsetzen wurden die Metallflächen selbstverständlich aufs sorgfältigste gereinigt. Doch konnte kein Unterschied gefunden werden, wenn sie einmal gerauht, ein andermal auf Hochglanz polirt waren. Der Spiegel war stets mit der Erde verbunden.

Trotz aller Bemühungen gelang es mir nicht, einen vollständig unveränderlichen Grad der Luftverdünnung und damit constante Intensität der von der Kathode ausgehenden Strahlen zu erhalten. Ich sah mich daher gezwungen, wenn ich die Stärke der Reflexion in zwei bestimmten Stellungen von Spiegel und Auffänger miteinander vergleichen wollte, stets eine längere Reihe von Messungen anzustellen, bei welchen ich abwechselnd die beiden Stellungen miteinander vertauschte. Jede der unten folgenden Zahlen ist das Ergebnis einer solchen Messungsreihe. Beim Vergleich zweier Metalle verfuhr ich analog, indem ich jedesmal den Spiegel um $180^0$ drehte, sodass bald die eine bald die andere Seite von den Strahlen getroffen wurde.

### Abhängigkeit der Reflexion von Incidenz- und Emanationswinkel.[1]

Um von der nicht ganz zu vermeidenden Unsymmetrie des Apparates möglichst frei zu sein, wurden die Messungen stets in den beiden entsprechenden Stellungen rechts und links von der Richtung des ursprünglichen Strahlenbündels aus gerechnet ausgeführt und das Mittel aus beiden Resultaten gezogen.

---

1) Als meine Arbeit zum Drucke fertig war, erfuhr ich, dass Hr. Swinton (Proc. Roy. Soc. **64.** p. 377—395. 1899) mit einer ähnlichen Versuchsanordnung analoge Messungen bei Platin angestellt hat. Die Abweichungen seiner Resultate von den von mir gefundenen können vielleicht durch die Verschiedenheit der Luftverdünnung bei seinen und meinen Untersuchungen erklärt werden.

Um den Grad der Genauigkeit der Messmethode zu erkennen, seien im Folgenden die auf diese Weise gefundenen Resultate von solchen Versuchsreihen angegeben.

In den folgenden Tabellen bedeutet $i$ den Incidenzwinkel, $e$ den Emanationswinkel, $A$ den Ausschlag, welchen der vom Auffänger durch das Galvanometer zur Erde geleitete Strom hervorbringt. Er ist proportional der Intensität der in den Auffänger gelangenden Kathodenstrahlen. Unter $Q$ steht das Verhältnis der bei den beiden gegebenen Stellungen erhaltenen Ausschläge.

Aluminium.

$i = 0.$

| $e$ | $A_{25}$ | $e$ | $A_{45}$ | $Q$ | $\frac{\cos 45}{\cos 25}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 34 | 45 | 24,8 | 0,73 | |
| 25 | 15,8 | 45 | 10,8 | 0,65 | |
| 25 | 12,5 | 45 | 8,5 | 0,68 | |
| 25 | 14,3 | 45 | 10,5 | 0,73 | |
| 25 | 15,3 | 45 | 11,5 | 0,75 | |
| 25 | 21,3 | 45 | 15 | 0,70 | |
| 25 | 14,5 | 45 | 10,3 | 0,71 | |
| | | | | 0,71 | 0,78 |

$i = 0.$

| $e$ | $A_{25}$ | $e$ | $A_{70}$ | $Q$ | $\frac{\cos 70}{\cos 25}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 16,3 | 70 | 6,5 | 0,40 | |
| 25 | 15,7 | 70 | 6 | 0,38 | |
| 25 | 16,3 | 70 | 6,5 | 0,40 | |
| | | | | 0,39 | 0,38 |

$i = 20.$

| $e$ | $A_{10}$ | $e$ | $A_{45}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 16 | 45 | 13,2 | 0,82 |
| 10 | 16 | 45 | 13,0 | 0,81 |
| 10 | 17,6 | 45 | 14,3 | 0,81 |
| | | | | 0,81 |

$i = 20.$

| $e$ | $A_{45}$ | $e$ | $A_{70}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 45 | 19,5 | 70 | 12,8 | 0,67 |
| 45 | 23,7 | 70 | 17,3 | 0,73 |
| 45 | 47,4 | 70 | 27,3 | 0,58 |
| | | | | 0,66 |

Unter negativem $e$ ist im Folgenden der Emanationswinkel verstanden, welcher von der Spiegelnormalen aus nach der Seite des einfallenden Strahlenbündels gelegen ist.

$i = 20.$

| $e$ | $A_{45}$ | $e$ | $A_{-45}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 45 | 25,9 | − 45 | 20,3 | 0,78 |
| 45 | 20,9 | − 45 | 15,7 | 0,75 |
| 45 | 19,6 | − 45 | 12,5 | 0,64 |
| | | | | 0,72 |

$i = 45.$

| $e$ | $A_0$ | $e$ | $A_{20}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 23,8 | 20 | 27 | 1,13 |
| 0 | 6,0 | 20 | 7,0 | 1,17 |
| | | | | 1,15 |

$i = 45.$

| $e$ | $A_0$ | $e$ | $A_{25}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 20,3 | 25 | 22 | 1,09 |
| 0 | 12,3 | 25 | 14,7 | 1,19 |
| 0 | 16 | 25 | 18,5 | 1,16 |
| 0 | 9,3 | 25 | 10,2 | 1,10 |
| | | | | 1,135 |

$i = 45.$

| $e$ | $A_0$ | $e$ | $A_{45}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 19,2 | 45 | 17,0 | 0,89 |
| 0 | 27,7 | 45 | 31,5 | 1,14 |
| 0 | 30,3 | 45 | 38,5 | 1,25 |
| 0 | 35,7 | 45 | 37,5 | 1,05 |
| 0 | 38 | 45 | 41 | 1,08 |
| | | | | 1,08 |

$i = 45.$

| $e$ | $A_0$ | $e$ | $A_0$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 24,8 | 70 | 18,4 | 0,76 |
| 0 | 14 | 70 | 11,7 | 0,83 |
| 0 | 27 | 70 | 23 | 0,85 |
| | | | | 0,83 |

$i = 45.$

| $e$ | $A_{+20}$ | $e$ | $A_{-20}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| + 20 | 28,3 | − 20 | 22,1 | 0,78 |
| + 20 | 18 | − 20 | 15 | 0,83 |
| + 20 | 15,7 | − 20 | 13 | 0,83 |
| + 20 | 23,7 | − 20 | 18,5 | 0,78 |
| | | | | 0,805 |

$i = 45.$

| $e$ | $A_{+70}$ | $e$ | $A_{-70}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| + 70 | 18 | − 70 | 9,8 | 0,54 |
| + 70 | 21 | − 70 | 9,5 | 0,45 |
| + 70 | 16 | − 70 | 8 | 0,50 |
| | | | | 0,50 |

$e = 0.$

| $i$ | $A_{25}$ | $i$ | $A_{45}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 41,7 | 45 | 45,1 | 1,08 |
| 25 | 17,5 | 45 | 19,5 | 1,11 |
| 25 | 15 | 45 | 16,9 | 1,13 |
| 25 | 17,9 | 45 | 19,7 | 1,10 |
| | | | | 1,105 |

$e = 25.$

| $i$ | $A_0$ | $i$ | $A_{45}$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 24,5 | 45 | 34,3 | 1,40 |
| 0 | 28,5 | 45 | 41,2 | 1,44 |
| 0 | 17,7 | 45 | 24,0 | 1,36 |
| 0 | 20,2 | 45 | 27,6 | 1,37 |
| | | | | 1,39 |

In folgender Tabelle seien nun die auf diese Weise gefundenen Resultate angegeben.

| | | Al | Cu | Zn | Fe | Pt | Ag |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i = 0°$ | $\frac{A_{(e=45°)}}{A_{(e=25°)}}$ | 0,71 | 0,725 | 0,72 | 0,75 | 0,78 | 0,68 |
| | $\frac{A_{(e=60°)}}{A_{(e=25°)}}$ | — | 0,526 | 0,51 | 0,49 | 0,50 | 0,50 |
| | $\frac{A_{(e=70°)}}{A_{(e=25°)}}$ | 0,39 | 0,308 | — | 0,35 | — | — |
| $i = 20°$ | $\frac{A_{(e=45°)}}{A_{(e=10°)}}$ | 0,81 | — | — | — | — | — |
| | $\frac{A_{(e=70°)}}{A_{(e=45°)}}$ | 0,66 | — | — | — | — | — |
| | $\frac{A_{(e=-45°)}}{A_{(e=+45°)}}$ | 0,72 | — | — | — | — | — |
| $i = 45°$ | $\frac{A_{(e=20°)}}{A_{(e=0°)}}$ | 1,15 | — | 1,10 | 1,06 | 0,94 | 0,93 |
| | $\frac{A_{(e=25°)}}{A_{(e=0°)}}$ | 1,135 | 1,09 | — | — | — | — |
| | $\frac{A_{(e=45°)}}{A_{(e=0°)}}$ | 1,08 | 0,98 | 1,06 | 0,99 | 0,78 | 0,76 |
| | $\frac{A_{(e=70°)}}{A_{(e=0°)}}$ | 0,83 | — | — | — | — | — |
| | $\frac{A_{(e=-20°)}}{A_{(e=+20°)}}$ | 0,805 | — | 0,84 | 0,91 | 1,16 | 1,11 |
| | $\frac{A_{(e=-70°)}}{A_{(e=+70°)}}$ | 0,50 | — | — | — | — | — |
| $e = 25°$ | $\frac{A_{(i=45°)}}{A_{(i=0°)}}$ | 1,39 | 1,15 | 1,16 | 1,12 | 0,91 | 1,00 |
| $e = 0°$ | $\frac{A_{(i=45°)}}{A_{(i=25°)}}$ | 1,105 | 1,03 | 0,95 | 0,98 | 0,95 | 0,95 |

Aus diesen Messungen ergiebt sich folgendes:

1. Bei senkrechter Incidenz nimmt die Intensität der reflectirten Strahlen annähernd mit dem Cosinus des Emanationswinkels ab, wie aus den Tabellen zu ersehen ist. Doch er-

folgt die Abnahme etwas schneller, was nicht durch Beobachtungsfehler zu erklären ist.

2. Bei schiefer Incidenz verhalten sich die einzelnen Metalle verschieden.

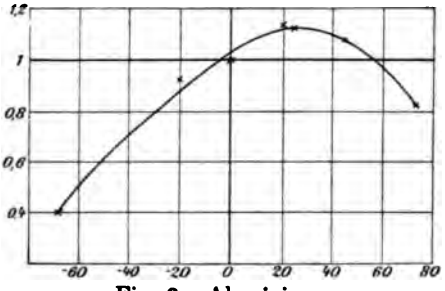



Fig. 3. Aluminium.

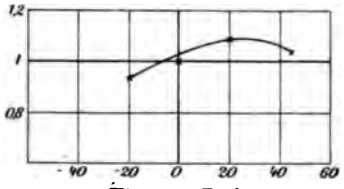



Fig. 4. Zink.

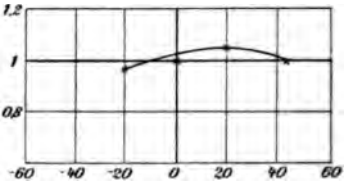



Fig. 5. Eisen.

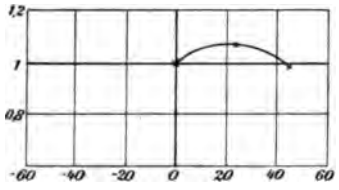



Fig. 6. Kupfer.

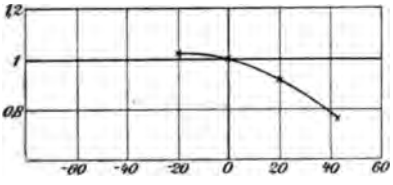



Fig. 7. Silber.

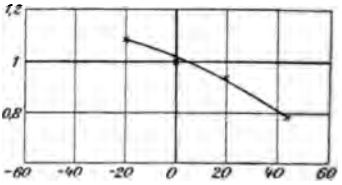



Fig. 8. Platin.

Am besten ist dies aus vorstehenden Curven (Figg. 3—8) zu erkennen, in welchen die Emanationswinkel als Abscissen, die relativen Werte der Intensitäten als Ordinaten eingetragen sind. Es sind die Galvanometerausschläge beim Emanations-

winkel $0^0$ gleich 1 gesetzt und die bei den übrigen Winkeln gefundenen darauf bezogen. Der Incidenzwinkel $i$ war stets gleich $45^0$.

Die für die Metalle Aluminium, Zink, Kupfer und Eisen gefundenen Curven fallen ungefähr zusammen. Die Unterschiede liegen innerhalb der wahrscheinlichen Fehlergrenzen. Dagegen zeigen Silber und Platin ein vollständig anderes Verhalten. Während bei der ersten Gruppe von Metallen das Maximum der Intensität in der Nähe von $e = +20^0$ liegt, haben die Curven von Platin und Silber ihren höchsten Punkt auf der Seite der negativen $e$.

Da mir anfangs dies sehr unwahrscheinlich erschien, so habe ich die betreffenden Messungen mehrmals wiederholt und stets trotz vielfachem Verändern der Reflectoren und des Auffängers dasselbe Resultat erhalten. Einige mehr qualitative Versuche mit Gold ergaben ein ähnliches Verhalten dieses Metalles. Die Beobachtungen, bei welchen $e$ constant gleich 0 war, und $i = 25^0$ bez. $45^0$ betrug, ergaben geringere Verschiedenheiten zwischen den einzelnen Metallen. Trotzdem sind solche zu verzeichnen, welche ausserhalb der Fehlergrenze liegen. Für Aluminium ergab sich eine Zunahme der Reflexion in Richtung von $e = 0$ mit wachsendem $i$, während bei den anderen Metallen eine solche nicht vorhanden war, oder sich sogar eine geringe Abnahme zeigte.

Etwas grössere Differenzen sind bei den Messungen $e = 25^0$ $i = 0$ bez. $45^0$ zu constatiren.

Bei Aluminium wächst die Reflexion mit $i$ stark, bei Kupfer, Eisen, Zink etwas schwächer, bei Silber ist sie constant und nimmt bei Platin sogar etwas ab.

Die letztere Messung wurde auch mit Gold angestellt, welches sich ähnlich wie Zink, Eisen etc. verhält. Das ungleiche Verhalten der einzelnen Metalle könnte vielleicht durch die Annahme erklärt werden, dass die Reflexion der Kathodenstrahlen stets in zwei voneinander unabhängigen Vorgängen besteht, von denen bei diesem Metall der eine mehr in den Vordergrund tritt, bei jenem der andere. Doch ist es klar, dass man für das Verhältnis des Reflexionsvermögens zweier Metalle je nach der Grösse von $e$ und $i$ verschiedene Werte erhält. Dies bestätigen auch die folgenden Untersuchungen.

Es wurden stets eine grössere Anzahl von Messungen angestellt und das Mittel daraus genommen; nur in einigen wenigen Fällen weichen die einzelnen Zahlen von diesem um 5—10 Proc. ab.

$A$(Al) bez. $A$(Cu) bedeutet den Ausschlag, welchen das mit dem Empfänger verbundene Galvanometer zeigte, wenn die mit Aluminium bez. Kupfer belegte Seite des Reflectors von den Kathodenstrahlen getroffen wurde. $K$(Cu)/$K$(Al) gleich $A$(Cu)/$A$(Al) gleich dem Verhältnis des Reflexionsvermögens in der gegebenen Richtung.

Für $i = 0^0$, $e = 25^0$:

| $A$ (Al) | $A$ (Cu) | $\frac{K\,(\mathrm{Cu})}{K\,(\mathrm{Al})}$ |
|---|---|---|
| 25,5 | 44 | 1,72 |
| 18 | 31 | 1,72 |
| 20,5 | 36,7 | 1,79 |
| 26,3 | 45,5 | 1,73 |
| 30,3 | 50,5 | 1,67 |
| 12,2 | 21,8 | 1,80 |
| | | 1,74 |

Für $i = 45^0$, $e = 25^0$:

| $A$ (Al) | $A$ (Cu) | $\frac{K_1\,(\mathrm{Cu})}{K_1'(\mathrm{Al})}$ |
|---|---|---|
| 18 | 26,5 | 1,47 |
| 18,2 | 29 | 1,59 |
| 13,5 | 18,5 | 1,37 |
| 13,3 | 19,5 | 1,47 |
| | | 1,48 |

$$\frac{K}{K'} \cdot \frac{Q}{Q'} = \frac{1{,}74 \cdot 1{,}15}{1{,}39} = 1{,}44$$

Analog wurde gefunden bei Kupfer und Eisen für $i = 0^0$, $e = 25^0$:

$$\frac{K\,(\mathrm{Cu})}{K\,(\mathrm{Fe})} = \begin{array}{r} 1{,}17 \\ 1{,}12 \\ 1{,}15 \\ \hline 1{,}15 \end{array}$$

für $i = 0^0$, $e = 45^0$:

$$\frac{K\,(\mathrm{Cu})}{K'\,(\mathrm{Fe})} = \begin{array}{r} 1{,}18 \\ 1{,}17 \\ 1{,}17 \\ \hline 1{,}17 \end{array}$$

Bei Zink und Eisen ergab sich für $i = 0^0$, $e = 25^0$:

$$\frac{K\,(\text{Zink})}{K'\,(\text{Eisen})} = \begin{array}{r} 1{,}03 \\ 1{,}13 \\ 1{,}14 \\ 1{,}04 \\ \hline 1{,}09 \end{array}$$

Bei Aluminium und Silber für $i = 0^0$, $e = 25^0$:

$$\frac{K\,(\text{Silber})}{K'\,(\text{Aluminium})} = \begin{array}{r} 2{,}40 \\ 2{,}59 \\ 2{,}69 \\ 2{,}75 \\ 2{,}53 \\ \hline 2{,}59 \end{array}$$

für $i = 45^0$, $e = 25^0$:

$$\frac{K_1}{K_1'} = \begin{array}{r} 1{,}58 \\ 2{,}00 \\ 1{,}52 \\ 1{,}55 \\ 2{,}00 \\ \hline 1{,}72 \end{array} \quad \left(\frac{K}{K'} \cdot \frac{Q}{Q'} = \frac{2{,}59 \,.\, 1{,}00}{1{,}39} = 1{,}86\right)$$

Bei Aluminium und Platin für $i = 0^0$, $e = 25^0$:

$$\frac{K\,(\text{Platin})}{K'\,(\text{Aluminium})} = \begin{array}{r} 2{,}74 \\ 3{,}28 \\ 3{,}43 \\ 2{,}78 \\ \hline 3{,}06 \end{array}$$

für $i = 45^0$, $e = 25^0$:

$$\frac{K_1}{K_1'} = \begin{array}{r} 1{,}61 \\ 1{,}64 \\ 2{,}05 \\ 1{,}89 \\ \hline 1{,}80 \end{array} \quad \left(\frac{K}{K'} \cdot \frac{Q}{Q'} = \frac{3{,}06 \,.\, 0{,}91}{1{,}39} = 2{,}00\right)$$

Die Zahlen, welche das Reflexionsvermögen der verschiedenen Metalle bezogen auf Aluminium angeben, sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

| | Cu | Fe | Zn | Ag | Pt |
|---|---|---|---|---|---|
| $i = 0$ $e = 25$ | 1,74 | 1,51 | 1,65 | 2,59 | 3,06 |
| $i = 45$ $e = 25$ | 1,48 | — | — | 1,72 | 1,80 |
| | ber. 1,44 | | | ber. 1,86 | ber. 2,00 |

Aus den oben gefundenen Werten von $Q$ für $e = 25^0$, $i = 0^0$ bez. $45^0$, welche das Verhältnis des Reflexionsvermögens eines Metalles in den beiden gegebenen Stellungen ausdrückt, lässt sich auch der Quotient $K_1 / K_1'$ für $i = 45^0$, $e = 25^0$ aus dem für $i = 0^0$, $e = 25^0$ beobachteten berechnen als

$$\frac{K_1}{K_1'} = \frac{K}{K'} \frac{Q}{Q'},$$

wenn sich $Q$ auf das eine $Q'$ auf das andere Metall bezieht.

Die so gefundenen Werte habe ich neben die direct bestimmten geschrieben; die Uebereinstimmung ist bei der Schwierigkeit, quantitative Messungen mit Kathodenstrahlen auszuführen, genügend.

## II. Teil.

### Absorption der Kathodenstrahlen.

Der Durchgang von Kathodenstrahlen durch sehr dünne Schichten wurde zuerst von Hertz[1]) beobachtet, von Lenard[2]) später genauer untersucht. Die von letzterem Forscher angewandte Methode zur Bestimmung der Absorption in feinen Metallblättchen von verschiedener Dicke war im wesentlichen folgende. Die Strahlen traten aus dem evacuirten Entladungsgefäss durch ein sogenanntes Lenard'sches Fenster in den mit Luft erfüllten Beobachtungsraum. Es wurde dann die Entfernung, auf welche man einen fluorescirenden Schirm dem Fenster nähern musste, um auf ihm eben noch ein schwaches Leuchten constatiren zu können, bestimmt, wobei einmal in den Weg der Strahlen das zu untersuchende Blättchen gebracht wurde, während ein andermal die Absorption allein in der Luft erfolgte.

Unter der Annahme, dass die Intensität der Strahlen infolge ihrer Ausbreitung nach allen Seiten proportional dem Quadrat der Entfernung vom Fenster abnimmt, dass ferner

1) H. Hertz, Wied. Ann. **45.** p. 28. 1892.
2) P. Lenard, Wied. Ann. **56.** p. 255. 1895.

sämtliche Schichten ein und desselben Mediums gleichmässig absorbirend wirken, berechnet sich das Absorptionsvermögen eines Metalles aus folgenden Formeln:

$$i = J_0 \frac{e^{-Rl}}{R^2} \quad \text{ohne Metallschicht,}$$

$$i = J_0 \frac{e^{-lr-a\delta}}{r^2} \quad \text{mit Metallschicht,}$$

$$a = \frac{1}{\delta}\left[l(R-r) + \log\frac{R^2}{r^2}\right],$$

wobei $i$ die Intensität der auf den Schirm fallenden Kathodenstrahlen, $J_0$ die Intensität der ursprünglichen Strahlen vor der Absorption, $R$ und $r$ die Entfernungen des Schirmes vom Fenster, $\delta$ die Dicke der dazwischen gestellten Metallschicht, $a$ den Absorptionscoefficient dieses Metalles, $l$ den der Luft bedeutet.

Es bestand also die Messung im Principe in einem Vergleich der Absorption im Metall mit der in Luft.

Für Aluminiumblättchen verschiedener Dicke fand Lenard Werte von $a$, welche zwischen 9700 und 6000 $cm^{-1}$ schwankten. Doch hebt er hervor, dass die Absorption in hohem Grade von der Spannung abhängt.

Lenard verglich ferner die Durchlässigkeit verschiedener Stoffe untereinander und kam zu dem interessanten Ergebnis, dass die Quotienten aus Absorptionscoefficient und Dichtigkeit, so sehr auch diese beiden einzelnen Grössen variiren mögen, annähernd gleiche Werte haben. Es ist demnach die Durchlässigkeit im wesentlichen nur abhängig vom Product aus Dicke und Dichte der durchstrahlten Schicht. Gleichwohl gilt dies Gesetz nur annähernd, und es sind die Abweichungen davon nicht anzuzweifeln. Es machen sich also specifische Eigenschaften der Stoffe trotzdem geltend.

Diese Abweichungen vom Lenard'schen Gesetz bei einigen Metallen möglichst genau zu bestimmen, ist das eine Ziel der folgenden Untersuchungen. Dann aber wollte ich vor allem die Abhängigkeit der Absorption von der Dicke der Schicht eines Stoffes, also das Absorptionsgesetz nach einer anderen Methode prüfen. Ich bestimmte die Intensität der Kathodenstrahlen, welche ein Blättchen durchdrungen haben, durch die von ihnen mitgeführte Elektricitätsmenge. Während Lenard die Untersuchungen mit Hülfe eines Fensters im lufterfüllten

Raum machte, brachte ich die zu prüfenden Blättchen in das Vacuum selbst in den Weg der ursprünglichen Strahlen. Es wurde daher dem Apparat folgende Gestalt gegeben.

**Beschreibung der Apparate.**

Die Versuchsanordnung gestaltete sich folgendermaassen:

Das Entladungsgefäss (vgl. Fig. 9) bestand aus einem 18 cm langen, 5 cm weiten Rohr, welches in einem Ansatz von 2,5 cm Durchmesser die an einem Schliff befestigte Aluminiumkathode (*K*) enthielt. Auf das andere Ende war die Messing-

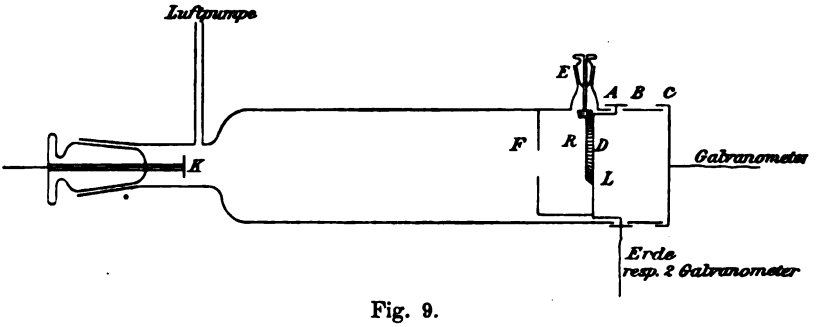



Fig. 9.

kapsel *A* mit Siegellack aufgekittet. An diese schloss sich, ebenfalls durch Siegellack abgedichtet und durch den 1 cm breiten Glasring *B* von *A* isolirt die Aluminiumkapsel *C*. Vor das in *A* befindliche 3 mm weite Loch (*L*) konnten die verschiedenen zu untersuchenden Metallblättchen mittels des Rädchens *R* gebracht werden. Dies (Fig. 10) war drehbar um die Axe (*D*). Sein Durchmesser betrug 2,5 cm. Auf sechs 3 mm weite Löcher konnten vermittelst kleiner Rähmchen ebensoviel verschiedene Blättchen aufgeschraubt werden. Der Rand war gezähnt, sodass es leicht im Vacuum durch das an dem Schliffe *E* angebrachte kleine Zahnrad gedreht werden konnte. Das Einschnappen einer Feder ermöglichte es, ein solches Fenster genau vor das Loch *L* zu bringen. Der Schirm *F* diente dazu, die eben nicht gebrauchten Blättchen vor Kathodenstrahlen zu schützen. *A* war stets mit der Erde verbunden.

Fig. 10.

Um die Intensität der bei *L* hindurchgegangenen und auf *C* absorbirten Strahlen zu bestimmen, war *C* durch ein Gal-

vanometer zur Erde abgeleitet. Ich verwandte anfangs ein solches nach Dubois-Rubens von der Empfindlichkeit $1.10^{-10}$ Amp., später eines nach Paschen von der Empfindlichkeit $2.10^{-10}$ Amp. pro Millimeter Scalenausschlag. Um das Galvanometer und dessen Zuleitung vor störenden elektrischen Wirkungen zu schützen, war das Inductorium, die fünf den Primärstrom liefernden Accumulatoren, sowie die Entladungsröhre bis $F$ von einem zur Erde abgeleiteten Blechkasten umschlossen. In diesem befand sich auch das mit der Kathode verbundene Braun'sche Elektrometer, welches ich bei manchen Messungen verwandte.

Um vergleichbare Resultate zu erhalten, muss bei einer Versuchsreihe, in welcher die sechs verschiedenen Blättchen nacheinander auf ihre Durchlässigkeit geprüft werden, die Menge und Art der von der Kathode ausgehenden Strahlen sich gleich bleiben. Es ist aber nicht möglich, in einer mit Schliffen und Kittstellen versehenen Röhre das Vacuum auf constanter Höhe zu halten. Die Kathodenstrahlen entwickeln stets Gase, und hiermit ist eine Veränderung ihrer Intensität und der Entladungsspannung verbunden. Man ist also gezwungen, bei jeder einzelnen Messung aufs neue den Zustand, bei welchem die Versuchsreihe durchgeführt werden soll, herzustellen. Selbstverständlich muss man auch auf sehr gleichmässiges Arbeiten des Unterbrechers achten.

Ich verfuhr nun anfangs folgendermaassen. Vor jeder einzelnen Messung wurde die Röhre sehr stark ausgepumpt. Dann liess ich die Entladung durchgehen und beobachtete gleichzeitig den Ausschlag des mit der Kapsel $C$ verbundenen Galvanometers. Dieser nahm zuerst mit der Verschlechterung des Vacuums zu, dann wurde er wieder kleiner. Ich notirte anfangs jedesmal das Maximum. Wie sich aber herausstellte, ist diese Methode nur anwendbar, wenn die Durchlässigkeit der zu vergleichenden Fenster nicht sehr verschieden ist. Es wird nämlich bei dicken Blättchen dieses Maximum der durchgedrungenen Elektricitätsmenge bei einem anderen und zwar bei einem höheren Grade des Vacuums erreicht als bei dünneren. Man hat also keine vergleichbaren Zustände. Es erklärt sich dies folgendermaassen. Mit der Verschlechterung des Vacuums nimmt die Menge der ausgesandten Kathodenstrahlen zu und

gleichzeitig ihre Geschwindigkeit ab. Von dieser ist aber in hohem Maasse ihr Durchdringungsvermögen abhängig.

Das Maximum wird erreicht, wenn sich diese beiden Factoren compensiren. Ist also $J_0$ die Intensität der die vordere Fläche des Fensters treffenden Kathodenstrahlen (wobei der Einfachheit halber von der Reflexion abgesehen ist), $J$ die vom Galvanometer gemessene Elektricitätsmenge, $\alpha$ der Absorptionscoefficient, $\delta$ die Dicke des Blättchens, so ergiebt sich

$$J = C J_0 e^{-\delta \alpha},$$

und für das Maximum

$$dJ = 0 = C e^{-\delta \alpha}(d J_0 - J_0 \delta d \alpha),$$

also

$$\frac{d J_0}{J_0} = \delta d \alpha$$

$$J_0 = \frac{1}{\delta} \frac{d J_0}{d \alpha}.$$

Hieraus ergiebt sich die Abhängigkeit des Zustandes, bei welchem ein Maximum von $J$ zu verzeichnen ist, von der Grösse von $J_0$ und damit vom Grad der Verdünnung.

Befriedigende Uebereinstimmung der Messungen fand ich, als ich parallel zur Röhre eine Funkenstrecke schaltete und stets die Ablesung machte, wenn der continuirliche Funkenstrom erlosch. Doch traten dabei Störungen am Galvanometer auf, deren Grund ich noch nicht entdecken konnte. Vielleicht stehen sie in Beziehung zu den von J. J. Thomson[1]) beschriebenen merkwürdigen Erscheinungen. Endlich gelang es mir die Schwierigkeit zu überwinden, indem ich zwischen die Kapsel $A$ und die Erde ein weniger empfindliches Galvanometer mit objectiver Ablesung einschaltete, welches also die Stärke des gesamten Entladungsstromes angab. Sowie diese eine bestimmte Höhe erreicht hatte, machte ich die Ablesung an dem mit $C$ verbundenen Galvanometer. Zugleich beobachtete ich das mit der Kathode verbundene Braun'sche Elektrometer vermittelst eines zweiten Fernrohres. Die Stärke des Primärstromes des Inductoriums wurde durch ein Galvanoskop controlirt.

Grosse Schwierigkeiten verursachte auch die unvermeidliche Veränderung der Metallblättchen durch die Kathoden-

1) J. J. Thomson, Die Entladung der Elektricität durch Gase, p. 73. 1900.

strahlen. Während diese bei Aluminium sehr gering war, wurden sehr dünnes Blattgold und noch mehr Blattsilber in kürzester Zeit, oft in einigen Secunden, zerstört. Es wurde dabei die ursprünglich weiche biegsame Membran spröde, sie zog sich zusammen und zerriss am Rande. In dickeren Blättchen bildeten sich bei längerer Bestrahlung Löcher von 1 qmm Grösse. Es scheint das Metall direct zerstäubt zu werden. Gold wird, ehe es zerreisst, mattweiss. Ich versuchte die Silber- und Goldblättchen durch Darauflegen dünnen Blattaluminiums vor der Zerstörung zu schützen, doch ohne jeden Erfolg, und musste daher mich auf dickere Silber- und Goldmembranen, welche wenigstens einige Zeit widerstanden, beschränken. Beim Silber macht sich auch eine deutliche Veränderung der Durchlässigkeit, und zwar eine Abnahme derselben schon bei kurzer Bestrahlung geltend. Ich konnte daher bei diesem Metall keine übereinstimmenden Resultate erzielen.

Grösste Sorgfalt wurde auch darauf verwendet, lochfreie Blättchen zu erhalten. Zu diesem Zweck wurden sie im vollständig verdunkelten Zimmer vor eine entsprechende Oeffnung in einem Blechcylinder, der einen Auerbrenner umgab, gehalten. Auf diese Weise kann man die feinsten Löcher entdecken.

Zur Dickenbestimmung wurden etwa Quadratcentimeter grosse Stücke ausgeschnitten und ihre Grösse und ihr Gewicht mit möglichster Genauigkeit bestimmt.

Schichten verschiedener Dicke erhielt ich auch durch Aufeinanderlegen mehrerer Blättchen. Doch musste erst bestimmt werden, ob ein einzelnes stärkeres Blättchen einer solchen Combination von derselben Gesamtdicke in betreff der Durchlässigkeit gleichkommt.

Zu diesem Zweck wurde ein Fenster aus einmal geschlagenem Aluminium von der Dicke 0,000624 cm mit einem solchen, das aus zwei Lagen von je 0,0003195 cm Dicke bestand, also im ganzen 0,000639 cm stark war, verglichen.

Mit diesen erhielt ich folgende Ausschläge am Galvanometer:

| | Dicke cm | Ausschlag | Funkenstrecke | Ausschlag | Funkenstrecke |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | 0,000624 | 514 mm | 5,5 cm | 1780 mm | 5,2 cm |
| II. | 0,000639 | 483 „ | 5,5 „ | 1670 „ | 5,2 „ |

Der Unterschied der Ausschläge entspricht der Dickendifferenz. Die Spannung ist in Längen von Funkenstrecken zwischen Spitzen angegeben.

Eine weitere Untersuchung ergab folgendes: Diesmal bestand das eine Fenster wieder aus einem einzigen starken Blättchen, das zweite aus fünf sehr feinen.

| | Dicke | Ausschlag | Ausschlag |
|---|---|---|---|
| I. Einfach | 0,000691 cm | 613 mm | 409,8 mm |
| II. Fünffach | 0,000662 „ | 713,5 „ | 473,4 „ |

Hier wurde immer das Maximum des Ausschlages beobachtet. Die beiden Versuchsreihen zeigen der absoluten Grösse nach verschiedene Ausschläge, da der Primärstrom verändert wurde.

Die Versuche beweisen, dass es keinen messbaren Einfluss hat, wenn man an Stelle von einzelnen starken Blättchen mehrere dünne setzt, was im übrigen Lenard bereits gezeigt hat. Es ist dies sehr auffallend, da nach den Messungen von Starke an Aluminium etwa 27 Proc. der auftreffenden Strahlen reflectirt werden, also nur 73 Proc. in das Metall eindringen. Es könnte hierfür ein Analogon gefunden werden, wenn man an die Stelle der Kathodenstrahlen Lichtstrahlen, an die des Metalles ein trübes Medium *ohne* Oberflächenreflexion setzt. Die Zurückwerfung der Strahlen an einem solchen Medium beruht nur auf der Diffusion in demselben. Es wird also eine Schicht im Innern ebenso zerstreuend wirken, als eine solche an der Oberfläche. Es müssen daher schmale Zwischenräume, die senkrecht zur ursprünglichen Strahlenrichtung liegen, ohne Einfluss auf die Ausbreitung derselben sein. Für ein solches Medium käme aber das Lommel'sche Reflexionsgesetz in Betracht, das man dann wohl auch auf die Kathodenstrahlen übertragen müsste. Dem widersprechen nun die im ersten Teil beschriebenen Reflexionsversuche, welche eine Oberflächenwirkung vermuten lassen. Es müsste denn die Annahme gemacht werden, dass die Reflexion in den dünnen Zwischenräumen nach anderen Gesetzen erfolgt.

### Bestimmung der Absorption in Aluminiumblättchen verschiedener Dicke.

Unter der Annahme, die Absorption erfolge in allen Schichten des durchstrahlten Fensters in gleichem Grade, be-

rechnet sich die Intensität der hindurchgedrungenen Kathodenstrahlen zu

$$J = J_0 e^{-\alpha\delta}(1 - k).$$

($J_0$ ist die Intensität der Strahlen, welche das Fenster treffen, $J_0(1 - k)$ dringt in die Oberfläche ein, da der Bruchteil $kJ_0$ zurückgeworfen wird, $\delta$ ist die Dicke des Blättchens, $\alpha$ der Absorptionscoefficient.) Beziehen sich $J_1$, $\delta_1$ auf ein zweites Blättchen, so berechnet sich aus

$$\frac{J}{J_1} = e^{\alpha(\delta_1 - \delta)}$$

$$\alpha = \frac{1}{\delta_1 - \delta} \log(\text{nat}) \frac{J}{J_1}.$$

In den folgenden Tabellen stehen unter $\delta$ die Dicken der Fenster, welche meist durch Combination mehrerer Blättchen erhalten wurden, und $A$ ist der dem betreffenden Fenster entsprechende Galvanometerausschlag. Bei der grossen Verschiedenheit in der Durchlässigkeit der einzelnen Blättchen musste natürlich meist ein geeigneter Nebenschluss an das Galvanometer gelegt werden. In den Tabellen ist aber die direct abgelesene Anzahl Scalenteile umgerechnet auf einen Nebenschluss von unendlichem Widerstand. Der absolute Wert der Ausschläge ist bedeutungslos wegen der Verschiedenheit der Empfindlichkeit der Galvanometer und der Stärke des Primärstromes. Unter $F$ steht die Länge einer zur Entladungsröhre parallel geschalteten Funkenstrecke zwischen Spitzen, zur Angabe der Kathodenspannung. Unter $\alpha$ finden sich die Absorptionscoefficienten, die unter der Annahme, dass in diesem Intervall $\alpha$ constant ist, aus den mit der Klammer verbundenen Werten von $\delta$ und $A$ berechnet sind.

1.

| $\delta$ cm | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,000624 | 4 | 450 | 3680 | 2290 | 3,5 | 300 | 4910 | 2980 |
| 0,000319 | 4 | 1380 | | | 3,5 | 1350 | | |
| 0,000218 | 4 | 1980 | 3570 | 2650 | 3,5 | 2040 | 4150 | 3060 |

2.

| $\delta$ cm | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,001844 | 4,5 | 4,5 | 4670 | 1480 | 4 | | | |
| 0,001248 | 4,5 | 73 | 3230 | 1400 | 4 | 10,8 | 6250 | 2700 |
| 0,000624 | 4,5 | 546 | 2430 | 1530 | 4 | 525 | 2850 | 1780 |
| 0,000218 | 4,5 | 1455 | | | 4 | 1660 | | |

| $\delta$ cm | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,001844 | 3,5 | | | |
| 0,001248 | 3,5 | 4,2 | 7750 | 3160 |
| 0,000624 | 3,5 | 399 | 3600 | 2250 |
| 0,000218 | 3,5 | 1701 | | |

3.

| $\delta$ cm | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00167 | 4,4 | 8,5 | 6280 | 2030 | 5 | 37,5 | 4260 | 1405 |
| 0,00134 | 4,4 | 67,5 | 5390 | 2100 | 5 | 153 | 2760 | 1080 |
| 0,000912 | 4,4 | 681 | 3520 | 1650 | 5 | 504 | 2140 | 1035 |
| 0,000671 | 4,4 | 1573 | 1880 | 1100 | 5 | 850 | 1480 | 848 |
| 0,000328 | 4,4 | 2989 | | | 5 | 1390 | | |

| $\delta$ cm | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00167 | 5,5 | 7 | 3180 | 1025 | 7 | — | | |
| 0,00134 | 5,5 | 20 | 2670 | 1040 | 7 | 19 | 2250 | 880 |
| 0,000912 | 5,5 | 63 | 1810 | 865 | 7 | 50 | | |
| 0,000671 | 5,5 | 97,5 | 1670 | 985 | 7 | — | 1615 | 865 |
| 0,000328 | 5,5 | 173 | | | 7 | 128 | | |

| $\delta$ cm | $F$ | $A$ | $\alpha$ | $\alpha'$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,00167 | 4,5 | 4,5 | 4020 | 1305 |
| 0,00134 | 4,5 | 17 | 3530 | 1380 |
| 0,000912 | 4,5 | 77,5 | 2570 | 1225 |
| 0,000671 | 4,5 | 144 | 1870 | 1120 |
| 0,000328 | 4,5 | 273 | | |

Der Grössenordnung nach stimmen die Absorptionscoefficienten mit den von Hrn. Lenard nach der optischen Methode

gefundenen überein; doch ist im Gegensatz zu den Beobachtungen dieses Forschers eine starke Zunahme von $\alpha$ mit der Dicke der Blättchen zu verzeichnen.

Die am nächsten liegende Erklärung dieser Thatsache giebt die Annahme von Reibungskräften zwischen den Metallmolecülen und den die Strahlen bildenden Elektronen. Es würde daraus folgen, dass die Geschwindigkeit der Teilchen desto mehr abnimmt und ihre Absorbirbarkeit desto mehr zunimmt, je weiter sie in das Metall eindringen. Für dickere Blättchen erhielt $\alpha$ dann einen entsprechend höheren Wert als für dünnere. Unter der Annahme, $\alpha$ wachse linear mit $\delta$, wurde

$$\frac{dJ}{d\delta} = -J\alpha'(1 + A\delta)$$

gesetzt, woraus folgt

$$\log\frac{J}{J_0} = -\alpha'\left(\delta + A\frac{\delta^2}{2}\right).$$

Es wurde für die Constante $A$ durch Ausprobiren die Zahl 1400 eingeführt und $\alpha'$ für die verschiedenen Versuchsreihen berechnet. Wie die Tabellen zeigen, sind die Werte von $\alpha'$ ziemlich constant, doch finden sich immer noch Unterschiede, die nicht durch Versuchsfehler zu erklären sind.

Im Anschluss hierän sollen noch die Ergebnisse der Messungen folgen, welche behandeln den

**Vergleich der Absorption in verschiedenen Metallen.**

Zu diesem Zweck wurden Blättchen der verschiedenen Metalle ausgewählt, welche bei gleicher Grösse annähernd dieselbe Masse hatten, bei welchen also das Product aus Dicke und Dichte dasselbe war. Dieses ist in den folgenden Tabellen unter $s\delta$ angegeben.

Aluminium und unechtes Blattmetall.

| | $s\delta$ | $A$ | Verhältnis der Ausschläge |
|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,00174 | 1178 | 0,607 |
| Blattmetall | 0,00171 | 715 | |

| | $s\delta$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,00174 | 1300 | 995 | 1680 | 1350 |
| Blattmetall | 0,00171 | 808 | 593 | 1015 | 809 |
| Verhältnis der Ausschläge | | 0,626 | 0,596 | 0,605 | 0,599 |

Mittel 0,605

| | $s\ \delta$ | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,00245 | 1038 | 963 |
| Blattmetall | 0,00246 | 534 | 491 |
| Verhältnis der Ausschläge | | 0,515 | 0,510 |
| | | Mittel 0,5125 | |

Aluminium und Gold.

| | $s\ \delta$ | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,001787 | 7240 | 4863 |
| Gold | 0,001738 | 4435 | 2972 |
| Verhältnis der Ausschläge | | 0,61 | 0,61 |
| | | Mittel 0,61 | |

| | $s\ \delta$ | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,00174 | 1178 | 1180 |
| Gold | 0,00172 | 721 | 689 |
| Verhältnis der Ausschläge | | 0,612 | 0,584 |
| | | Mittel 0,589 | |

| | $\delta\ s$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,00174 | 995 | 1680 | 1350 |
| Gold | 0,00172 | 567 | 960 | 809 |
| Verhältnis der Ausschläge | | 0,570 | 0,570 | 0,522 |
| | | Mittel 0,554 | | |

Bei Silber gelang es nicht, aus den oben genannten Gründen übereinstimmende Resultate zu erzielen, doch seien dieselben der Vollständigkeit halber ebenfalls hier angeführt:

| | $s\ \delta$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,002461 | 1099 | 1064 | 1097 |
| Silber | 0,002508 | 1348 | 144 | 132 |
| Verhältnis der Ausschläge | | 0,123 | 0,135 | 0,120 |
| | | Mittel 0,126 | | |

| | $s\ \delta$ | $A_1$ | $A_2$ |
|---|---|---|---|
| Aluminium | 0,002461 | 1038 | 963 |
| Silber | 0,002508 | 399 | 330 |
| Verhältnis der Ausschläge | | 0,289 | 0,343 |
| | | Mittel 0,316 | |

Obgleich die Resultate bei Silber nicht Anspruch auf Genauigkeit machen können, so ergeben sie doch in Uebereinstimmung mit Lenard's Beobachtung, dass Silber am wenigsten durchlässig ist.

Um nun aus der Verschiedenheit der gemessenen Ausschläge auf die der Absorption in den einzelnen Metallen schliessen zu können, müsste man in Rechnung ziehen, wieviel durch Reflexion verloren geht.

Dass diese nicht allein die ungleiche Durchlässigkeit der Metalle erklärt, geht schon daraus hervor, dass bei Blattmetall und echt Gold die gemessenen Ausschläge beinahe dieselben waren, während die Reflexionscoefficienten erheblich differiren, ferner daraus, dass Silber weniger Strahlen hindurchlässt als Gold, während letzteres doch stärker reflectirt.

## III. Teil.

### Bestimmung der Geschwindigkeit $v$ und des Verhältnisses $\varepsilon/m$ von Ladung zu Masse eines Strahlenteilchens.

Da die obigen Absorptionsmessungen eine Abnahme der Geschwindigkeit der Teilchen beim Durchgang durch ein Blättchen vermuten liessen, so wurden zur Klärung dieser Frage die Grössen $v$ und $\varepsilon/m$ gemessen, sowohl wenn die Strahlen direct von der Kathode kamen, als auch, nachdem sie ein Lenard'sches Fenster, dessen Dicke ebenfalls variirt werden konnte, passirt hatten. Bekanntlich breiten sich die Strahlen vom Fenster nach allen Seiten aus. Es war nun ferner von Interesse diejenigen, welche senkrecht vom Fenster ausgehen, also dieselbe Richtung wie die ursprünglichen haben, zu vergleichen mit solchen, welche unter einem bestimmten Winkel seitlich austreten.

Zur Bestimmung von $v$ und $\varepsilon/m$ wurde die von Hrn. W. Wien[1]) und von Hrn. Lenard[2]) ausgearbeitete Methode der magnetischen und elektrostatischen Ablenkung angewandt.

#### Beschreibung der Versuchsanordnung.

Die bei diesen Untersuchungen benutzte Vacuumröhre hatte folgende Gestalt (vgl. Fig. 11):

Die die Kathode $K$ enthaltende Röhre $A$ war bei $a$ in die Messingkapsel $B$ mit Siegellack eingekittet. Vor der 2 mm weiten kreisrunden Oeffnung befand sich ein dem im II. Teil

1) W. Wien, Wied. Ann. **65.** p. 440. 1898.
2) P. Lenard, Wied. Ann. **64.** p. 279. 1898.

beschriebenen ähnliches Zahnrädchen, auf welches mittels ganz flacher Rähmchen vier kreisförmige Aluminiumfenster aufgeschraubt werden konnten. Der zweite Teil der Röhre, der Beobachtungsraum, war bei *c* ebenfalls auf die Kapsel aufgekittet. Mittels des Schliffes und des daran angebrachten Zahnrädchens wurden die einzelnen Fenster vor die Oeffnung *b* gebracht. Der Beobachtungsraum bestand aus zwei 5,5 cm weiten und 22 cm langen Röhren, welche einen Winkel von 45° miteinander bildeten. In einer Entfernung von 14 cm vom Fenster trugen die beiden Schliffe *S* und *S'* je einen Fluorescenz-

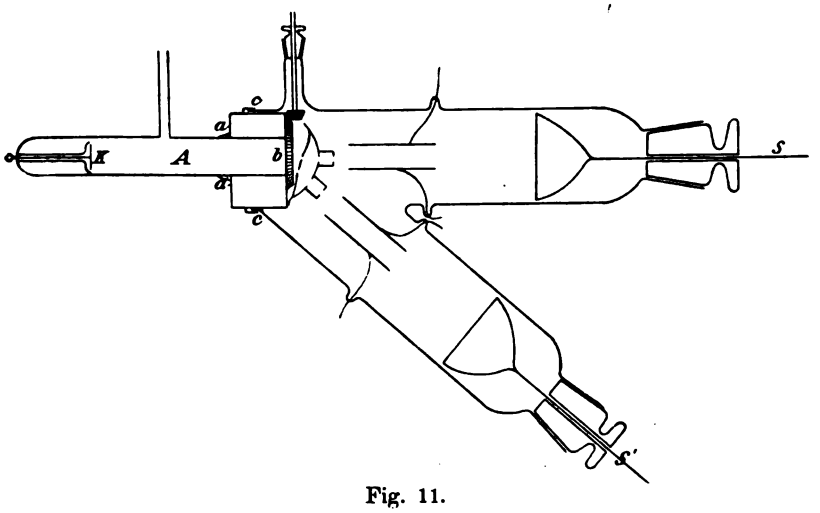



Fig. 11.

schirm. Als am empfindlichsten für Kathodenstrahlen ergab sich das schon von Hrn. Lenard[1]) angewandte Pentadecylparatolylketon. Die Fluorescenzschirme wurden nach seiner Vorschrift durch Aufstreichen der geschmolzenen Substanz auf Seidenpapier angefertigt.

Die vom Fenster ausgehenden Strahlen mussten je ein System von drei Diaphragmen passiren. Die Schlitze waren so angeordnet, dass die Richtungen der zwei Strahlenbündel möglichst genau mit den beiden Rohrachsen zusammenfielen. Man erhielt so auf den Schirmen im Dunkeln deutlich sichtbar

1) P. Lenard, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894.

fluorescirende Streifen von etwa 1 mm Breite. Es war ferner Sorge getragen, dass die Strahlenbündel genau senkrecht die Schirme trafen. Zur Erzeugung des elektrischen Feldes befanden sich symmetrisch zu den Strahlen in den beiden Röhren zwei Messingcondensatoren. Durch Elfenbeinstäbchen mit Verschraubung wurden die $4 \times 5$ cm grossen zusammengehörigen Platten in einem Abstand von 1,4 cm gehalten. Die in seitlich angeschmolzenen Röhren eingekitteten Zuleitungsdrähte dienten zugleich dazu, die Stellung der Condensatoren in dem Gefäss zu befestigen.

Wie bereits gesagt, war bei der Anordnung der ganzen Röhre die grösste Sorgfalt auf Symmetrie der einzelnen Teile, wie Abstand der Diaphragmen von den Schirmen und den Condensatoren, Entfernung der zusammengehörigen Platten untereinander und vom Strahlenbündel etc. verwendet, und es betrugen die Abweichungen von derselben höchstens Bruchteile eines Procents.

Um störende Lichteffecte zu vermeiden, war die Röhre *A* bis zur Kapsel *B* zugleich mit dem Inductorium in dem bei den früheren Versuchen beschriebenen Blechkasten eingeschlossen, die Zeichnungsebene ist als horizontal anzunehmen. Um ein zur Strahlenrichtung senkrechtes Magnetfeld zu erzeugen wurden zwei Magnetspulen, welche auf zwei Glasplatten leicht verschiebbar ruhten, möglichst nahe an die Röhre herangebracht. Sie bestanden aus zwei 14 cm hohen Blechcylindern von 14,5 cm Durchmesser, auf denen je 51 Windungen von 2 mm starkem Leitungsdraht aufgewickelt waren. Die Spulen waren hintereinander geschaltet. Ihre Stellung wurde möglichst genau symmetrisch zu den beiden Röhren gewählt.

Fig. 12 giebt die gesamte Versuchsanordnung an. In dem Blechkasten *K* befindet sich der Ruhmkorff-Inductor, 32 Volt liefern den Primärstrom. *U* ist ein durch eine aus 5 Elementen bestehende Accumulatorenbatterie getriebener „Volt-Ohm"-Quecksilberunterbrecher. Durch den Stromwender *W*, das Siemens'sche Normalampèremeter *A* und eine variable Widerstandsrolle *R* sind zwei Accumulatoren von sehr hoher Capacität mit den Magnetspulen verbunden.

Die hohe Spannung zur Erzeugung eines elektrostatischen Feldes lieferte ein Schuckert'scher Hochspannungsdynamo,

dessen Motor durch eine dritte Batterie von 60 Volt getrieben wurde. Während der eine Pol zur Erde abgeleitet war, verband den anderen eine gut isolirte Leitung mit den Condensatoren. Der Stromwender $W'$ gestattet abwechselnd je eine Platte der beiden Condensatoren mit der Hochspannungsleitung, und die anderen mit der Erde zu verbinden.

Zur Bestimmung von $v$ und $\varepsilon/m$ in absolutem Maass trat an die Stelle des Hochspannungsdynamos eine Hochspannungs-

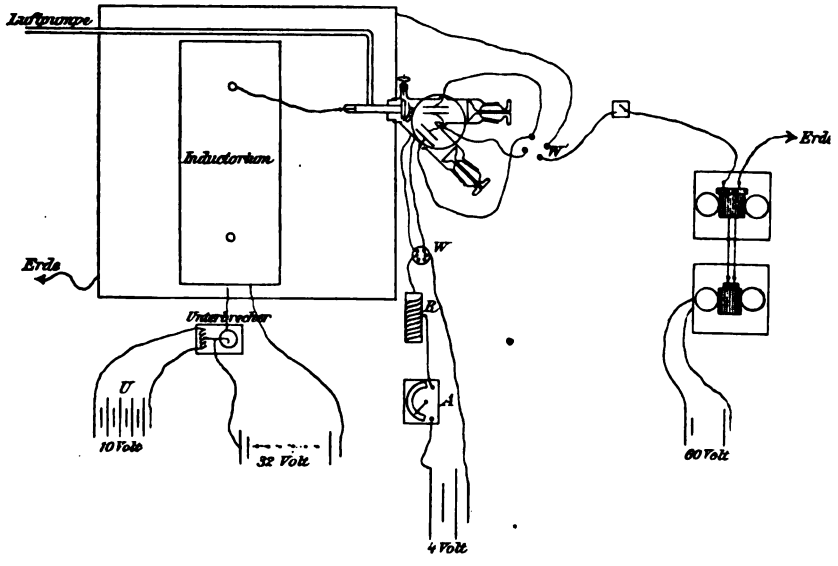



Fig. 12.

accumulatorenbatterie von 600 Elementen, da mir kein für solche Spannungen geeignetes Voltmeter zur Verfügung stand. Bei den Messungen, bei welchen die Kenntnis der Spannung unnötig war, zog ich aber den Dynamo vor, da er ein stärkeres Feld und daher weitere Ablenkung des Kathodenstrahlenbündels hervorbrachte.

Um ein constantes, homogenes elektrostatisches Feld zu erhalten, muss die Luft im Rohre in sehr hohem Grade verdünnt sein, da sie sonst einen relativ guten Leiter darstellt, in welchem sich das Spannungsgefälle in anderer Weise ausbildet. Es wurde daher das Gefäss so lange evacuirt, bis die

Raps'sche Luftpumpe beim Heben nur noch Luftbläschen von etwa cbmm-Grösse entfernte.

Will man die magnetische oder elektrostatische Ablenkung von Kathodenstrahlen messen, welche durch einen Inductor erzeugt sind, so hat man mit der Schwierigkeit zu kämpfen, dass man es meistens nicht mit einheitlichen Strahlen von gleicher Geschwindigkeit und Ablenkbarkeit zu thun hat. Solche würde man durch eine Influenzmaschine erhalten, von deren Verwendung ich aber absehen musste, da sie zu geringe Intensitäten und daher nach der Absorption in den Aluminiumblättchen keine sichtbaren Streifen auf den Fluorescenzschirmen hervorgebracht hätten. Ich erreichte durch längere Bemühungen, dass bei sehr gleichmässigem Gange des Unterbrechers das magnetisch oder elektrostatisch abgelenkte Fluorescenzbild, wenn auch etwas verwaschen und verbreitert erschien, so doch einen deutlichen hellen Kern zeigte. Wegen des immerhin schwachen Lichteffectes mussten die Beobachtungen stets in vollständiger Dunkelheit mit gut ausgeruhten Augen gemacht werden. Eine Ablesung an den auf den Fluorescenzschirmen angebrachten Scalen war daher ausgeschlossen. Es gelang aber, die Lage des abgelenkten oder nicht abgelenkten Spaltbildes genau zu markiren durch zwei (5 $cm^2$) grosse plane Messingbleche, welche auf der unmittelbar über der Röhre horizontal gelegenen Glasplatte verschiebbar vermittelst von Holzklötzchen vertical, also senkrecht zu den elektrischen, parallel zu den magnetischen Kraftlinien und zu der Richtung der Kathodenstrahlen aufgestellt waren, und durch Visiren längs einer Kante auf den hellsten Teil des Streifens eingestellt wurden. Auf diese Weise wurde jede Parallaxe vermieden. Durch Darunterschieben eines mit Millimeterscala versehenen Papierstreifens konnte der Abstand zweier solcher Messingplatten, die auf zwei Lagen, z. B. die abgelenkte und unabgelenkte des Bildes eingestellt waren, leicht bestimmt werden. Die Unsicherheit der auf diese Weise ausgeführten Messungen betrug im Mittel höchstens 5 Procent.

Es ergab sich nun, dass *die magnetische Ablenkbarkeit sowohl wie die elektrostatische unabhängig davon war*, ob die Strahlen ein Aluminiumblättchen von 0,000 624 cm oder 0,000 218 cm passirt hatten, oder durch ein frei gebliebenes

Loch im Rädchen $R$ gedrungen waren, also direct von der Kathode kamen.

*Ebenso konnte kein Unterschied zwischen der Grösse der Ablenkung im centralen und der im seitlichen Rohr constatirt werden.*

Dabei waren die Magnetspulen symmetrisch zu beiden Rohren aufgestellt, wie dies in der Zeichnung angegeben ist.

Um diese Beobachtungen noch auf andere Weise zu prüfen, wurde die Ablenkung infolge des elektrischen Kraftfeldes eben durch das magnetische compensirt. War die Ablenkung für die directen Strahlen auf diese Weise aufgehoben, so galt dies auch, als das Aluminiumfenster dazwischen geschoben war, und zwar sowohl im centralen als auch im seitlichen Rohre. Dies wäre nicht der Fall, wenn $v$ das eine Mal einen anderen Wert hätte wie das andere Mal, da ja die magnetische Ablenkung umgekehrt proportional zu $v$ ist, während die elektrostatische umgekehrt proportional zu $v^2$ ist.

Um die Werte von $v$ und $\varepsilon/m$ auch in absolutem Maasse zu bestimmen, musste der Verlauf des Magnetfeldes, welches bei dem verhältnismässig grossen Abstand von 6 cm der beiden Spulen nicht homogen war, genau bestimmt werden. Zu dem Zweck wurden dieselben horizontal gelegt, wobei die Entfernung der beiden voneinander ebenfalls 6 cm betrug, und in diesen Zwischenraum eine bifilar aufgehängte 3 cm lange Spule, durch welche ein Strom von bekannter Stärke floss, gebracht. Aus der Ablenkung, welche dieselbe in den einzelnen Punkten des Magnetfeldes erlitt, konnte nach Stenger[1]) die Feldstärke berechnet werden.

Die empirische Formel:

$$H = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

giebt den Verlauf der Feldstärke mit hinreichender Genauigkeit. Dabei ist $x$ vom Rande der Spule an gerechnet.

Ist $z$ die gemessene magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen, $x_0$ der im Magnetfelde zurückgelegte Weg, so berechnet sich nach der streng abgeleiteten Formel von Hrn. S. Simon[2]):

1) F. Stenger, Wied. Ann. **33.** p. 312. 1883.
2) S. Simon. Wied. Ann. **69.** p. 589. 1899.

$$\frac{e}{m} = \frac{v x_0}{\int_0^{x_0} dx \int_0^{x} H dx} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_0^2}{2} \frac{\int_0^{x_0} dx \left[\int_0^{x} H dx\right]^3}{\left[\int_0^{x_0} dx \int_0^{x} H dx\right]^3}}$$

Ist ferner $E$ die Spannung der Hochspannungsaccumulatorenbatterie, $x_a$ der im elektrostatischen Felde, $x_1$ der vom Eintritt ins Feld bis zum Schirm zurückgelegte Weg, $s$ die elektrostatische Ablenkung, $d$ der Abstand der Condensatorplatten, so ergiebt sich

$$\frac{e}{m} = \frac{s v^2 d}{E x_a \left(x_1 - \frac{x_a}{2}\right)}$$

und aus beiden Gleichungen folgt:

$$v = \frac{E x_a \left(x_1 - \frac{x_a}{2}\right) \cdot x_0}{d \cdot s \int_0^{x_0} dx \int_0^{x} H dx} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_0^2}{2} \frac{\int_0^{x_0} dx \left(\int_0^{x} H dx\right)^3}{\left[\int_0^{x_0} dx \int_0^{x} H dx\right]^3}}.$$

$H$ wird durch den oben angegebenen Wert ersetzt, und die Integration ausgeführt.

Es war:

$$x_a = 5,$$
$$x_1 = 10{,}8,$$
$$E = 1290 \cdot 10^8,$$
$$d = 1{,}4,$$
$$s = 0{,}5,$$
$$z_0 = 1{,}55,$$
$$x_0 = 9{,}5.$$

Aus der experimentellen Bestimmung des Magnetfeldes ergab sich ferner:

$$A = 16{,}35,$$
$$B = 10{,}20,$$
$$C' = -0{,}60,$$
$$D = -0{,}0117.$$

Für diese Werte wird:

$$v = 0{,}703 \cdot 10^{10},$$
$$\frac{e}{m} = 0{,}645 \cdot 10^{7}.$$

Dies Resultat stimmt hinreichend mit den von Hrn. Lenard gefundenen Grössen überein.

**Resultate.**

1. Die Kathodenstrahlen werden von zur Erde abgeleiteten Metallflächen diffus reflectirt. Bei senkrechter Incidenz nimmt die Intensität der reflectirten Strahlen annähernd mit dem Cosinus des Emanationswinkel ab.

Bei schiefer Incidenz verhalten sich die einzelnen Metalle verschieden. Es ist bei Aluminium, Zink, Eisen und Kupfer das Maximum der Intensität der zurückgeworfenen Strahlen nach der Seite der spiegelnden Reflexion verschoben, während Platin, Silber und Gold am stärksten nach einer Richtung reflectiren, welche zwischen dem einfallenden Strahl und den Normalen der Metallfläche gelegen ist.

Für die erste Klasse von Metallen nimmt die Reflexion mit dem Incidenzwinkel deutlich zu, für die letztere etwas ab.

Bei senkrechter Incidenz nimmt das Reflexionsvermögen mit dem Atomgewicht zu, wie schon Hr. Starke nachgewiesen hat. Doch weicht von dieser Regel Zink ein wenig ab.

2. Die Absorption der Kathodenstrahlen in dünnen Blättchen ist in hohem Grade abhängig von der Spannung. *Der Absorptionscoefficient nimmt mit der Dicke der Fenster zu.*

Das Lenard'sche Gesetz, dass Blättchen, welche aus verschiedenen Metallen bestehen, aber gleiche Masse pro Flächeneinheit haben, denselben Bruchteil der auffallenden Strahlen absorbiren, gilt nur in erster Annäherung.

3. Die Zunahme des Absorptionscoefficienten mit der Dicke des Fensters kann nicht durch die Annahme erklärt

werden, dass die Teilchen beim Durchdringen des Metalles durch Reibung an den Molecülen an Geschwindigkeit verlieren und dadurch absorbirbarer werden; denn es konnte kein Unterschied der magnetischen und elektrischen Ablenkbarkeit eines Strahles gefunden werden, wenn er einmal direct von der Kathode kam, ein andermal ein Aluminiumfenster passirt hatte.

Auch die seitlich unter schiefem Winkel vom Fenster austretenden Strahlen verhielten sich ebenso wie die central senkrechten.

Es berechnete sich $v$ zu $0{,}703 \cdot 10^{10}$, $(\varepsilon/m)$ zu $0{,}645 \cdot 10^{7}$.

Würzburg, Physikalisches Institut, Mai 1901.

(Eingegangen 26. Juni 1901.)

## 2. *Wirkung der Magnetisirung auf den Dehnungsmodul; von Karl Tangl.*

(Auszug aus den der ungar. Akad. d. Wissensch. am 22. Januar und 21. Mai 1900 vorgelegten Abhandlungen.).

### Einleitung.

Die Wirkung des magnetischen Feldes auf die physikalischen Constanten der Körper bildete den Gegenstand vieler Untersuchungen. Aus diesen ist es bekannt, dass die Magnetisirung unter anderem auch die mechanischen Constanten beeinflusst; so kennen wir die Wirkung der Magnetisirung auf die Torsion (G. Wiedemann), die Längenänderung durch Magnetisirung (Bidwell u. a.) etc. Was den Dehnungsmodul anbelangt, führten die bisherigen Untersuchungen zu widersprechenden Resultaten. Während nämlich Wertheim[1]) und Tomlinson[2]) gar keine Wirkung der Magnetisirung auf den Dehnungsmodul nachweisen konnten, fanden Byron B. Brackett[3]) und J. S. Stevens[4]), dass die Magnetisirung den Elasticitätsmodul vergrössert, Shakespear[5]) dagegen, dass sie ihn verkleinert. Es schien mir lohnend die Frage von neuem zu untersuchen. Einer Aufforderung von Prof. Dr. R. Eötvös entsprechend unternahm ich die Untersuchung bereitwilligst, um so mehr da mir ein Apparat zur Verfügung stand, der zur genannten Untersuchung sehr geeignet schien.

Zur Messung verwendete ich dünne Drähte von ca. 0,1 mm Durchmesser.

---

1) G. Wertheim, Ann. de chim. et phys. (3) **12.** p. 385—454. 1844; **23.** p. 302—327. 1848.

2) H. Tomlinson, Phil. Trans. **179.** p. 1—26. 1888.

3) Byron B. Brackelt, Phys. Rev. **5.** p. 257—284. 1897; Beibl. **22.** p. 682. 1898.

4) J. S. Stevens, Phys. Rev. **11.** p. 95—100. 1900; Phys. Zeitschr. **2.** p. 238. 1900.

5) G. A. Shakespear, Phil. Mag. **47.** p. 539—556. 1899; Beibl. **23.** p. 908. 1899.

Der Grundgedanke der angewandten Methode ist folgender: Wird der Draht bei constanter Spannung magnetisirt, so verändert er seine Länge; wird er dagegen so magnetisirt, dass seine Länge constant bleibe, so ändert sich seine Spannung. Das Verhältnis beider Aenderungen ist proportional dem Elasticitätsmodul bei der angewandten Magnetisirung. Mit dem zu beschreibenden Apparate konnte ich sowohl die Längen- wie auch die Spannungsänderungen messen, mithin konnte ich damit entscheiden, ob sich der Modul durch Magnetisirung ändert oder nicht, und wie er sich ändert. Die Methode liefert keinen Wert des Moduls in unmagnetisirtem Zustande, mittels derselben konnte man nur die Frage entscheiden: wie ändert sich der Modul, wenn die Magnetisirung sich ändert.

Das Instrument, mit dem die Messungen ausgeführt wurden, dient seit dem Jahre 1895 im physikalischen Institut der hiesigen Universität zu verschiedenen Messungen und wurde stets für sehr verwendbar befunden. Im wesentlichen ist dasselbe eine Bifilarsuspension; die genauere Beschreibung giebt der erste Teil der Abhandlung.

## I. Teil.

### 1. Messung verticaler Kräfte mit der Bifilarsuspension.

1. Wird die Bifilarsuspension aus der Ruhelage abgelenkt, so entsteht ein Drehungsmoment, das die Suspension in die Ruhehage zurückzuführen strebt. Das Drehungsmoment wird durch die Schwerkraft hervorgerufen, es liegt also nahe, die Bifilarsuspension auch zur Messung verticaler Kräfte zu verwenden.

Man könnte dabei ein dynamisches Verfahren anwenden: aus der Aenderung der Schwingungsdauer könnte man auf die Grösse der hinzutretenden verticalen Kraft schliessen.

Man kann aber auch statisch verfahren, indem man die Suspension durch eine constante Kraft ablenkt. Trägt z. B. die Suspension einen horizontalen Magneten, dann wird sie durch die erdmagnetische Kraft abgelenkt. Wenn jetzt eine neue verticale Kraft hinzutritt, so wird dadurch das Moment der Suspension geändert, das des Magneten nicht, die Suspension wird daher aus der früheren Gleichgewichtslage ab-

gelenkt. In dieser Anordnung verwendete den Apparat Prof. Dr. R. Eötvös im Jahre 1895 zu einigen Untersuchungen.

2. Die erdmagnetische Kraft kann natürlich durch eine andere, z. B. elastische ersetzt werden. Man kann dabei folgendermaassen verfahren: an das untere Ende der Bifilarsuspension wird ein einfacher Draht befestigt; letzterer trägt an seinem unteren Ende einen horizontalen Stab, dessen Drehungen durch einen fixen Stift gehemmt werden; der Stab kann sich dabei auf und ab bewegen. Wird nun die Bifilare oben tordirt, so wird dadurch der untere elastische Draht auch gedrillt, da doch dessen unteres Ende keine Drehung ausführen kann. In der Gleichgewichtslage ist das Drehungsmoment der Bifilarsuspension entgegengesetzt gleich dem des elastischen Drahtes. Würde die Bifilarsuspension dabei um den Winkel $\varphi$, der elastische Draht um den Winkel $\psi$ gedrillt, so ist also die Bedingung des Gleichgewichtes:

$$\varkappa \sin \varphi + \tau \psi = 0, \tag{1}$$

wo $\varkappa = a^2/4\,l\,mg$ ($a$ die Entfernung der beiden Fäden der Bifilarsuspension, $l$ ihre Länge, $m$ die Belastung, $g$ die Beschleunigung der Schwere bedeutet).

Die Empfindlichkeit wird leicht ersichtlich durch folgende Formel gegeben:

$$\delta\varphi = \frac{\sin\varphi}{\frac{\tau}{\varkappa} + \cos\varphi}\,\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}. \tag{2}$$

3. Will man eine grosse Empfindlichkeit, so hat man den Nenner in (2) möglichst klein zu machen. Man wählt den elastischen Draht so, dass $\tau/\varkappa < 1$ sei. Wird dann die Bifilare so weit gedrillt, dass $\tau/\varkappa + \cos\varphi = 0$ sei, so ist das Instrument labil. Der Apparat ist natürlich nur in der Nähe der labilen Lage zu gebrauchen. Derselbe wird jedoch nur dann gut verwendbar sein, wenn er noch ziemlich weit von der labilen Lage eine genügend grosse Empfindlichkeit besitzt.

Bei meinen Versuchen war eine solche Empfindlichkeit wünschenswert, dass 1 Milligramm bei einer Gesamtbelastung von 40 g wenigstens einen Ausschlag von 1 Min. gebe, dass heisst der Factor von $\delta\varkappa/\varkappa$ in (2) müsste ungefähr $= 12$ sein. Setzt man nun $\tau/\varkappa = 0{,}1$, so wird der Apparat bei

$\varphi = 95^0\,45'$ labil, bei $\varphi = 90^0$ ist jedoch der Factor nur $= 10$. Ist $\tau/\varkappa = 0{,}5$, so ist das Instrument bei $\varphi = 120^0$ labil; bei $\varphi = 115^0$ ist der Factor von $\delta\varkappa/\varkappa = 11$. Ist $0{,}5 < \tau/\varkappa < 1$, stehen die Verhältnisse noch ungünstiger.

Der Apparat war also in dieser Form nicht gut brauchbar.

### 2. Modificirte Form der Bifilarsuspension.

4. Indem ich die Form der Bifilarsuspension etwas abänderte, befreite ich dieselbe von den besprochenen Mängeln. An die zwei Fäden der Suspension — gewöhnlich verwendete ich Platindrähte — lötete ich kleine, 0,5 mm dicke horizontale Stäbchen, sodass die Suspension wie eine kleine Leiter aussah (Fig. 1, $AB$); eine sehr oft gebrauchte Aufhängung hatte z. B. eine Länge von 60 cm; daran waren in je 2 cm Entfernung die Stäbchen gelötet, sodass die ganze Aufhängung in 30 gleiche Teile geteilt war. Diese Suspension konnte mit einigen Revolutionen gedrillt werden, ohne dass sich die Fäden aufeinander wickelten.

Wir suchen die Empfindlichkeit der neuen Anordnung. Die Stäbchen sollen die Aufhängung in $n$ gleiche Teile teilen; die Länge der ganzen Aufhängung sei $l$, ferner sei, wie früher, $\varkappa = \alpha^2/4\,l\,mg$. Wird die ganze Bifilarsuspension um den Winkel $\varphi$, der untere elastische Draht dabei um den Winkel $\psi$ tordirt, so ist jede Abstufung der Bifilare um $\varphi/n$ gedreht, folglich ist die Gleichgewichtsbedingung

$$n\varkappa \sin\frac{\varphi}{n} + \tau\psi = 0. \tag{3}$$

Für die Empfindlichkeit folgt daraus:

$$\delta\varphi = \frac{n \sin\frac{\varphi}{n}}{\frac{\tau}{\varkappa} + \cos\frac{\varphi}{n}} \cdot \frac{\delta\varkappa}{\varkappa}. \tag{4}$$

5. Das Gleichgewicht ist labil, wenn $\cos\varphi/n + \tau/\varkappa = 0$, das heisst wenn der $n$-Teil so weit gedrillt ist, wie früher die ganze Aufhängung. Es sei nun wieder wie früher $\tau/\varkappa = 0{,}1$; das Gleichgewicht wird labil bei $\varphi/n = 95^0$; nimmt man ferner die

genannte 30 teilige Aufhängung und wird sie viermal vollständig umgedreht, das heisst ist $\varphi/n = 48^0$, so ist

$$\delta\varphi = 29\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}.$$

Ist $\tau/\varkappa = 0{,}5$ und $\varphi/n = 48^0$, so ist

$$\delta\varphi = 17\frac{\delta\varkappa}{\varkappa},$$

ist $\tau/\varkappa = \frac{2}{3}$ und $\varphi/n = 48^0$, so wird

$$\delta\varphi = 16\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}.$$

Der Apparat ist also empfindlicher als wir gewünscht haben und ist weit entfernt von der labilen Lage.

6. Zur experimentellen Prüfung dieser Folgerungen diente der in Fig. 1 dargestellte Apparat mit Weglassung des Drahtes $EF$ und der Magnetisirungsspule; bei $E$ war eine Schale zum Darauflegen von kleinen Gewichtstücken angehängt.

Die Bifilarsuspension $AB$ (Fig. 1) war in einem metallenen Gehäuse an einem Torsionskopfe befestigt. $T$ ist ein kleiner Spiegel, $C$ ein horizontaler Stab mit verschiebbaren Gewichten zur Regulirung der Schwingungsdauer, $CD$ der elastische Draht aus Platin, der ausser der Platte $L$ den horizontalen Stab $K$ trägt. Dieser reicht in eine feine horizontale Schlinge (Fig. 1, horizontaler Schnitt), die an ein festes Stativ gebunden ist. Durch die Schlinge ist die Drehung des Stabes in einer Richtung gehemmt, während er sich in verticaler Richtung frei bewegen kann. Wird der Torsionskopf gedreht, so wird dadurch auch der elastische Draht $CD$ gedrillt.

Die Länge $AB$ betrug 60 cm, sie war in 30 Abstufungen geteilt; die Entfernung der Fäden war 0,5 cm. Die Fäden waren aus Platin. Betrug die Belastung 40 g, so war $\tau/\varkappa = 0{,}69$. Wird der Torsionskopf so weit gedreht, dass die Bifilarsuspension mit zwei vollständigen Umdrehungen gedrillt ist, also $\varphi = 2{,}360^0$, $\varphi/n = 24^0$, so giebt (4)

$$\delta\varphi = 7{,}6\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}.$$

Daraus ergiebt sich, dass 0,105 g bei 1975 mm Scalenentfernung einen Ausschlag von 39,0 Scalenteilen geben würde,

falls ein Scalenteil 2 mm beträgt. Thatsächlich ergaben zehn aufeinander folgende Versuche folgende Werte:

| |
|---|
| 40,49 |
| 40,47 |
| 40,52 |
| 40,44 |
| 40,54 |
| 40,51 |
| 40,60 |
| 40,57 |
| 40,51 |
| 40,47 |
| Mittel 40,51 |

Wird die Bifilare dreimal vollständig umgedreht, ist also $p/n = 36$, so ist aus (4) ein Ausschlag von 61,3 Scalenteilen zu erwarten. Beobachtet wurden folgende Werte:

| |
|---|
| 62,20 |
| 62,26 |
| 62,22 |
| 62,20 |
| 62,27 |
| 62,33 |
| 62,32 |
| 62,27 |
| 62,24 |
| 62,24 |
| Mittel 62,26 |

Ist $\varphi = 4{,}360^0$, $\varphi/n = 48^0$, so ist nach (4) der Ausschlag gleich 85,2. Die beobachteten Ausschläge sind:

| |
|---|
| 83,60 |
| 83,47 |
| 83,35 |
| 83,16 |
| 83,27 |
| 83,51 |
| 83,72 |
| 83,54 |
| 83,58 |
| 83,52 |
| Mittel 83,47 |

Die Beobachtungen sind mit der Theorie in guter Uebereinstimmung; was die Sicherheit der Angaben betrifft, lassen sie nichts zu wünschen übrig.

## II. Teil.

### 1. Die magnetische Längenänderung.

1. Will man mit dem beschriebenen Apparat magnetische Längenänderungen messen, so muss man vor allem danach trachten, dass die Längenänderung unmittelbar eine Gewichtsänderung bewirke. Dies kann man mittels folgender Einrichtung erreichen: Anstatt der Schale wird bei $E$ der zu untersuchende Draht $EF$ befestigt (Fig. 1); an diesem hängt der Glascylinder $H$, der teilweise in Quecksilber taucht; indem man den Glascylinder mehr oder weniger in das Quecksilber taucht, kann man die Belastung beliebig ändern. Wird der Draht $EF$ magnetisirt, so ändert sich seine Länge; nehmen wir an, er verkürzt sich, dann hebt sich der Glascylinder etwas aus dem Quecksilber heraus, die Belastung der Bifilare wächst, es ändert sich ihre Gleichgewichtslage. Wird nun das Quecksilberniveau so weit gehoben, dass die Bifilare in die frühere Gleichgewichtslage zurückkehrt, so ist die Hebung des Quecksilberniveaus gleich der Verkürzung des Drahtes.

Denn kehrt die Bifilare in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück, so ist ihre Belastung die gleiche geworden, Punkt $E$ ist in derselben Höhe wie früher, nur das untere Ende des magnetisirten Drahtes hat sich gehoben eben so viel, als das Quecksilberniveau gehoben wurde.

2. Um so kleine Aenderungen des Quecksilberniveaus — höchstens 0,02 mm — bewerkstelligen und messen zu können, reichte in dasselbe ein verticaler Glascylinder von 14,35 mm Durchmesser, der mittels einer Mikrometerschraube verschoben werden konnte. Das Gefäss, in dem das Quecksilber sich befand, hatte einen Durchmesser von 173,5 mm. Bei den gegebenen Dimensionen musste der Glascylinder 2,904 mm gesenkt werden, um das Niveau 0,02 mm zu heben. Die Schraubenhöhe des Mikrometers betrug 0,323 mm; die Verschiebung des Glascylinders konnte also mit genügender Genauigkeit gemessen werden.

3. Bei den Versuchen mit Eisendraht war die Empfindlichkeit des Apparates folgende: Sank das Quecksilberniveau 0,000 307 mm, so gab der Apparat einen Ausschlag von 1 Scalenteil (2 mm), wenn der Scalenabstand 207,0 cm betrug.

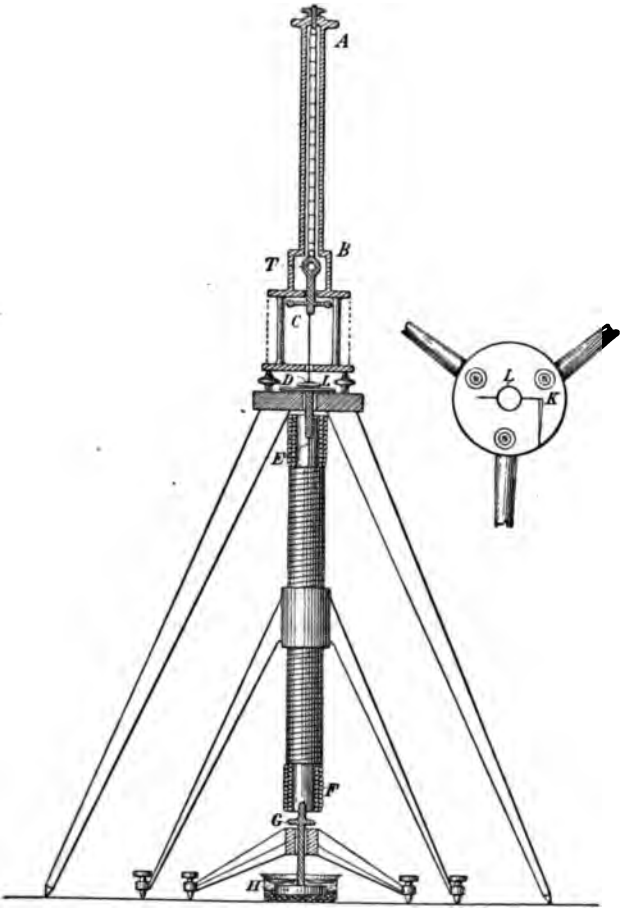



Fig. 1.

Da 0,1 Scalenteil noch gut schätzbar ist, so war noch eine Längenänderung von 0,00003 mm messbar. Diese Empfindlichkeit genügte, da die kleinste zu messende Längenänderung 0,004 mm betrug.

### 2. Die magnetische Spannungsänderung.

4. Kennt man ausser der Längenänderung infolge der Magnetisirung noch jene Spannungsänderung, die den Draht auf seine ursprüngliche Länge zurückführt, so kann man den Elasticitätsmodul (Dehnungsmodul) des Drahtes berechnen. Mit der beschriebenen Bifilarsuspension kann man auch jene Spannungsänderung bestimmen. Zu diesem Zwecke wird das untere Ende des Drahtes $EF$ festgeklemmt. Wird nun der Draht magnetisirt und verkürzt er sich z. B., so bleibt sein unteres Ende fix, das obere verschiebt sich nach unten und übt auf die Bifilare einen Zug aus, letztere giebt also einen Ausschlag. Die ursprüngliche Gleichgewichtslage kann dadurch hergestellt werden, dass man die Belastung der Bifilare verkleinert, indem man von der Platte $L$ ein entsprechendes Gewichtstück wegnimmt. Dann kommt das obere Ende des magnetisirten Drahtes wieder in die ursprüngliche Höhe und das weggenommene Gewicht giebt die Spannungsänderung, die den Draht auf die ursprüngliche Länge zurückführt. Denn ist die ursprüngliche Gleichgewichtslage hergestellt, so ist die Spannung der Bifilare und des elastischen Drahtes dieselbe wie vor der Magnetisirung, folglich ist Punkt $D$ in derselben Höhe wie vor der Magnetisirung. Nun steht zwar der magnetisirte Draht $EF$ und der unterhalb der Platte $L$ gelegene Teil des Stabes $DE$ unter einer anderen, und zwar grösseren Spannung als vor der Magnetisirung, folglich liegt Punkt $E$ um so viel tiefer, als sich der Stab $DE$ infolge der Spannungszunahme (gleich dem von $L$ weggenommenen Gewichte) verlängert hat. Der Durchmesser vom Stab $DE$ wurde aber so gewählt (1,5 mm), dass dieser Fehler unmerklich bleibt.

Die gemessenen Spannungsänderungen betrugen einige Gramme, was sehr gut messbar war, da 0,05 g einen Ausschlag von 1 Scalenteil gab.

### 3. Versuchsanordnung.

5. Der im I. Teil unter 6. beschriebene Apparat stand auf einem starken Dreigestell; er konnte mit Stellschrauben vertical gestellt werden.

Bei $E$ wurde der zu untersuchende Draht $EF$ (ca. 90 cm) angelötet. Unten trug derselbe mittels eines 2 mm starken Messingstabes den mit Blei ausgefüllten Glascylinder $H$, der teilweise in Quecksilber tauchte. Derselbe hatte einen Durchmesser von 90,0 mm, eine Höhe von 40 mm. An den Messingstab war eine Platte $G$ gelötet. Bei den Spannungsversuchen wurde das unterhalb derselben befindliche feste Dreigestell so weit gehoben, dass Platte $G$ darauf auflag, um die Unbeweglichkeit des unteren Drahtendes zu sichern.

Der Ausschlag wurde mit Scale und Fernrohr gemessen.

6. Den Draht $EF$ umgab eine Magnetisirungsspule von 99,3 cm Länge, sodass sie den Draht an beiden Enden mit ca. 5 cm überragte. Sie bestand aus einer Glasröhre von 62,0 mm Durchmesser, die in vier Lagen mit 0,8 mm dickem Draht bewickelt war, in je 972 Windungen.

Ist $l$ die Länge der Spule, $a$ der Radius, $n$ die Zahl der Windungen und $i$ die Stromstärke, so ist in der Axe der Spule in der Entfernung $x$ von der Mitte die Feldstärke:

$$H = \frac{2\pi n i}{l}\left[\frac{\frac{l}{2}-x}{\sqrt{a^2+\left(\frac{l}{2}+x\right)^2}}+\frac{\frac{l}{2}+x}{\sqrt{a^2+\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}}\right].$$

Bei den gegebenen Dimensionen ergiebt sich daraus für die Mitte der Spule

$$H = \frac{2\pi n i}{l}\cdot 0{,}998,$$

an den Enden des Drahtes $EF$ aber

$$H = \frac{4\pi n i}{l}\cdot 0{,}918.$$

Bildet man folgenden Mittelwert:

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda} H\,dx,$$

wo $2\lambda$ die Länge des Drahtes ist, so ergiebt sich dafür

$$\frac{4\pi n i}{l}\cdot 0{,}990.$$

Dieser Wert ist nur sehr wenig von dem im Mittelpunkte gültigen verschieden. Das Feld ist also als genügend homogen

zu betrachten, um aus der Inhomogenität des Feldes stammende ponderomotorische Kräfte vernachlässigen zu können.

7. Die Stromstärke in den einzelnen Schichten der Spule betrug ca. 10 Amp. Um störende Wärmewirkung auf den zu untersuchenden Draht auszuschliessen, war längs der Axe der Spule eine Messingröhre von 1 cm lichter Weite angebracht (in Fig. 1 nicht gezeichnet). Die Röhre umschloss den Draht *EF*. Der Raum zwischen der Röhre und der Spule war während der Dauer des Versuches mit schmelzendem Eis gefüllt. Diese Eisschicht schützte den Draht sehr gut gegen Erwärmung. Wurden nämlich zwei Schichten der Spule entgegengesetzt geschaltet, sodass der Strom kein magnetisches Feld erzeugte, so behielt die Bifilare ihre Gleichgewichtslage, wenn der Strom 20 sec lang geschlossen war. Während einer Messung war aber der Strom nie länger als 5 sec geschlossen.

Die Stromstärke wurde mit einem absoluten Galvanometer gemessen.

8. Der Gang der Versuche war folgender: Nachdem die Spule mit Eis gefüllt war, wurde der Draht *EF* mit der Bifilarsuspension verbunden. Bevor der Glascylinder *H* mit dem Drahte verbunden oder der Draht unten festgeklemmt wurde, hing ich so viel Gewicht an den Draht, als die gewünschte Belastung betrug. Die Gleichgewichtslage der Bifilare wurde notirt. Dann wurde das Gewicht weggenommen und der Draht mit dem Glascylinder *H* verbunden bez. unten festgeklemmt. Das Quecksilberniveau bez. der Dreifuss auf dem Platte *G* auflag, wurde dann so weit gesenkt, bis die Aufhängung in die notirte Gleichgewichtslage zurückkehrte. So war die Spannung immer dieselbe.

9. Die Beobachtungen wurden bei vier verschiedenen Magnetisirungen ausgeführt und zwar bei auf- und absteigender Magnetisirung. Bei jeder Messung war der Strom 5 sec lang geschlossen. Vor der eigentlichen Beobachtung wurde der Draht bei aufsteigender, dann bei absteigender Kraft magnetisirt.

Die Gleichgewichtslage wurde vor und nach sowie während der Magnetisirung aus Umkehrpunkten bestimmt; die Dämpfung war äusserst gering. Die Empfindlichkeit wurde bei jeder Versuchsreihe bestimmt, indem bei den Versuchen mit Längenänderung die Mikrometerschraube 4 oder 6 mal umgedreht

und der entsprechende Ausschlag gemessen wurde. Bei den Versuchen mit Spannungsänderung dagegen wurde auf die Platte $L$ ein ringförmiges Gewicht möglichst vorsichtig und central gelegt und der Ausschlag beobachtet.

Das Quecksilber wurde sorgfältig gereinigt und oft gewechselt. Ausserdem erwies es sich als vorteilhaft, auf das Quecksilber schwach angesäuertes Wasser zu giessen. Das Wasser bedeckte ganz den Glascylinder $H$.

Der Strom wurde vom städtischen Elektricitätswerk geliefert; die Stromstärke nach Beobachtung der Längen- und Spannungsänderung gemessen.

#### 4. Beobachtungen.

10. Vor den eigentlichen Messungen überzeugte ich mich, dass die Ausschläge nur von den Längen- bez. Spannungsänderungen herrühren. An Stelle des Eisen- oder Nickeldrahtes wurde ceteris paribus ein Platindraht gesetzt; wurde der Strom geschlossen, so gab der Apparat nicht den mindestens Ausschlag; auf die einzelnen Teile des Apparates wurde also keine magnetische Anziehung ausgeübt. Statt dem Glascylinder $H$ wurde an den Draht ein anderes Gewicht ganz frei angebracht, ohne in das Quecksilber zu tauchen. Die Magnetisirung gab nun keinen Ausschlag; auf den Draht wurde also keine Anziehung ausgeübt. Die Untersuchung ergab, dass die schiefe Stellung der Spule sowie die excentrische Lage des Drahtes in der Spule keinen Einfluss auf den Ausschlag habe.

Ferner untersuchte ich, ob der Ausschlag mit der zu messenden Kraft proportional sei. 3,027 g geben 54,8 Sct., 6,649 g dagegen 120,3 Sct. Das Verhältnis der Gewichte ist 2,197, das der Ausschläge 2,195. Sämtliche beobachteten Ausschläge blieben unter 130 Sct. Die Ausschläge sind also mit der Kraft proportional.

11. Sonach ist das Elektricitätsmodul proportional dem Verhältnis der bei derselben Magnetisirung gemessenen, den Längen- bez. Spannungsänderungen entsprechenden Ausschlägen. Aendert sich dieses Verhältnis mit der Magnetisirung, so ändert sich auch der Modul, und zwar demselben proportional.

I. Nickeldraht.

12. Nach der Analyse von Hrn. W. Güll enthielt der Draht Spuren von Eisen; Kobald war nicht darin.

| | |
|---|---|
| Länge des Drahtes | 900,2 mm |
| Durchmesser des Drahtes | 0,143 mm |
| Belastung | 100,0 g. |

Folgende Tabelle enthält die beobachteten Ausschläge von elf nacheinander ausgeführten Beobachtungsreihen, unter $l$ die den Längenänderungen, unter $s$ die den Spannungsänderungen entsprechenden; $H$ bedeutet die Feldstärke in abs. elektromagnetischen C.G.S.-Einheiten.

| $H$ | 158 | 284 | 385 | 465 | 385 | 284 | 158 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 43,5 | 71,6 | 87,5 | 97,3 | 87,3 | 71,4 | 43,2 |
| $l$ | 19,3 | 31,5 | 38,3 | 42,3 | 38,2 | 31,2 | 19,3 |
| $s$ | 43,8 | 72,1 | 87,5 | 97,4 | 87,7 | 71,8 | 43,4 |
| $l$ | 19,5 | 31,8 | 38,6 | 42,7 | 38,6 | 31,6 | 19,4 |
| $s$ | 44,1 | 72,3 | 88,9 | 98,3 | 88,6 | 71,8 | 43,3 |
| $l$ | 19,5 | 32,0 | 38,9 | 42,9 | 38,8 | 31,7 | 19,6 |
| $s$ | 43,9 | 72,1 | 88,1 | 97,8 | 87,8 | 71,5 | 43,2 |
| $l$ | 19,4 | 31,8 | 38,7 | 42,8 | 38,6 | 31,5 | 19,1 |
| $s$ | 43,3 | 70,7 | 86,9 | 97,1 | 87,2 | 70,7 | 43,0 |
| $l$ | 19,4 | 31,7 | 38,4 | 42,6 | 38,3 | 31,5 | 19,2 |
| $s$ | 43,0 | 71,3 | 87,4 | 97,1 | 87,4 | 71,1 | 43,1 |

Die Ausschläge sind in Scalenteilen (2 mm) gegeben; der Scalenabstand betrug 207,0 cm. Die Ausschläge sind auf dieselbe Empfindlichkeit reducirt und zwar entspricht bei den Längenänderungen ($l$) 1 Sct. einer Verkürzung von 0,000381 mm; bei den Spannungsänderungen einer Spannungszunahme von 0,05711 g.

Das Verhältnis aus entsprechenden Ausschlägen von je zwei aufeinander folgenden Reihen ist dem Modul proportional. Da der Dehnungsmodul auf diese Weise in unmagnetischem Zustande nicht bestimmt werden kann, so können die Aenderungen des Moduls nur auf den $H = 158$ entsprechenden Zustand bezogen werden. Dementsprechend ist das Modul bei $H = 158$ gleich 1,000 gesetzt. Die Zahlen der nächstfolgenden Tabelle sind dem Verhältnisse $s/l$ proportional, so zwar, dass dei Zahlen der $n^{\text{ten}}$ Reihe dem Verhältnisse $s/l$ aus der $n$ und

$n+1^{\text{ten}}$ Reihe der vorherigen Tabelle proportional sind. Sonach giebt die folgende Tabelle direct die Werte des Dehnungsmoduls, bezogen auf den Modul bei $H=158$, wie sie sich aus den einzelnen Versuchsreihen ergeben.

| $H$ | 158 | 284 | 385 | 465 | 385 | 284 | 158 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | 1,000 | 1,009 | 1,014 | 1,020 | 1,014 | 1,015 | 0,993 |
| | 1,000 | 1,009 | 1,007 | 1,015 | 1,012 | 1,014 | 0,991 |
| | 1,000 | 1,010 | 1,010 | 1,016 | 1,012 | 1,012 | 0,996 |
| | 1,000 | 1,006 | 1,018 | 1,018 | 1,015 | 1,005 | 0,988 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,010 | 1,013 | 1,010 | 1,001 | 0,977 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,006 | 1,013 | 1,005 | 1,002 | 0,979 |
| | 1,000 | 1,002 | 1,006 | 1,010 | 1,006 | 1,003 | 1,000 |
| | 1,000 | 0,996 | 1,006 | 1,017 | 1,012 | 1,005 | 1,008 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,014 | 1,021 | 1,016 | 1,005 | 1,003 |
| | 1,000 | 1,012 | 1,024 | 1,025 | 1,026 | 1,015 | 1,010 |
| Mittel | 1,000 | 1,004 | 1,012 | 1,017 | 1,013 | 1,008 | 0,995 |

## II. Nickeldraht.

13. Der Draht war aus derselben Rolle wie der frühere.

Länge des Drahtes 901,5 mm
Durchmesser des Drahtes 0,148 mm
Belastung 100,0 g.

Folgende Tabelle giebt die Ausschläge, auf dieselbe Empfindlichkeit reducirt wie früher.

| $H$ | 158 | 282 | 383 | 471 | 383 | 282 | 158 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | 21,1 | 34,1 | 41,1 | 45,1 | 40,8 | 33,6 | 20,7 |
| $s$ | 48,5 | 78,7 | 95,4 | 105,2 | 94,7 | 77,9 | 47,9 |
| $l$ | 20,8 | 33,7 | 40,6 | 44,4 | 40,4 | 33,4 | 20,4 |
| $s$ | 48,1 | 78,1 | 94,9 | 104,3 | 94,1 | 77,3 | 47,3 |
| $l$ | 20,6 | 33,4 | 40,2 | 44,1 | 40,0 | 33,0 | 20,4 |
| $s$ | 48,5 | 78,6 | 94,8 | 105,1 | 94,7 | 77,8 | 47,7 |
| $l$ | 20,9 | 33,7 | 40,6 | 44,6 | 40,5 | 33,4 | 20,7 |
| $s$ | 48,7 | 78,9 | 95,1 | 104,9 | 94,7 | 77,0 | 47,5 |
| $l$ | 20,9 | 33,7 | 40,5 | 44,6 | 40,2 | 33,5 | 20,7 |
| $s$ | 48,8 | 79,2 | 95,8 | 105,4 | 95,0 | 78,4 | 48,1 |
| $l$ | 20,8 | 33,7 | 40,5 | 44,3 | 40,3 | 33,4 | 20,7 |

Die folgende Tabelle enthält die Werte des Dehnungsmoduls bezogen auf den Modul bei $H=158$.

| *H* | 158 | 282 | 383 | 471 | 383 | 282 | 158 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 1,004 | 1,010 | 1,015 | 1,010 | 1,008 | 1,006 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,007 | 1,016 | 1,005 | 1,000 | 1,006 |
| | 1,000 | 1,002 | 1,010 | 1,016 | 1,007 | 1,000 | 1,003 |
| | 1,000 | 1,001 | 1,011 | 1,013 | 1,008 | 1,005 | 0,993 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,002 | 1,012 | 1,006 | 1,002 | 0,993 |
| | 1,000 | 1,005 | 1,006 | 1,012 | 1,007 | 1,004 | 0,993 |
| | 1,000 | 1,004 | 1,005 | 1,009 | 1,003 | 0,998 | 0,988 |
| | 1,000 | 1,004 | 1,007 | 1,009 | 1,011 | 0,995 | 0,988 |
| | 1,000 | 1,006 | 1,012 | 1,012 | 1,012 | 1,002 | 0,995 |
| | 1,000 | 1,002 | 1,008 | 1,014 | 1,005 | 1,000 | 0,991 |
| Mittel | 1,000 | 1,003 | 1,008 | 1,013 | 1,007 | 1,001 | 0,996 |

Bei der Kleinheit der Schwingungsdauer — 2,5 sec — konnten die Umkehrpunkte höchstens auf 0,1 Sct. genau beobachtet werden, was im Modul einen Fehler von ca. 1 Proc. ausmachen kann. Thatsächlich sind aber die Abweichungen vom Mittel bedeutend kleiner, höchstens 1 Proc.

Jede Reihe zeigt ganz deutlich, dass der Dehnungsmodul mit der Magnetisirung wächst; steigt das magnetische Feld von 160 auf 470 C.G.S., so wächst der Modul um 1,5 Proc.

I. Eisendraht.

14. Der Draht bestand aus weichem Eisen. Bei der Magnetisirung zeigte sich durchweg Verkürzung, sie war aber bedeutend kleiner als bei Nickel, ungefähr die Hälfte. Das Eisen war ziemlich rein, es enthielt weniger als 0,5 Proc. Kohle und Silicium.

Länge des Drahtes 902,0 mm
Durchmesser des Drahtes 0,128 mm
Belastung 75,0 g.

Die reducirten Ausschläge waren:

| *H* | 159 | 286 | 385 | 473 | 385 | 286 | 159 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *l* | 13,7 | 21,3 | 25,7 | 28,1 | 25,5 | 21,1 | 13,1 |
| *s* | 28,0 | 44,3 | 53,5 | 58,9 | 53,6 | 44,2 | 27,8 |
| *l* | 13,6 | 21,1 | 25,6 | 28,2 | 25,5 | 21,1 | 13,3 |
| *s* | 28,6 | 45,3 | 54,0 | 59,2 | 53,7 | 44,8 | 28,1 |
| *l* | 13,8 | 21,6 | 26,1 | 28,8 | 25,9 | 21,5 | 13,6 |
| *s* | 28,7 | 46,1 | 55,6 | 61,0 | 55,2 | 45,9 | 29,1 |
| *l* | 13,7 | 21,6 | 25,9 | 28,6 | 25,8 | 21,5 | 13,5 |
| *s* | 28,5 | 45,4 | 54,7 | 60,3 | 54,6 | 45,1 | 28,2 |
| *l* | 13,5 | 21,3 | 25,8 | 28,2 | 25,7 | 21,2 | 13,4 |
| *s* | 28,2 | 45,0 | 53,9 | 59,1 | 53,5 | 44,5 | 28,2 |
| *l* | 13,5 | 21,1 | 25,5 | 28,3 | 25,5 | 21,0 | 13,3 |

Der Apparat war jetzt empfindlicher als früher; 1 Sct. entsprach einer Verkürzung von 0,000307 mm, bez. einer Spannungsvergrösserung von 0,04204 g. Die Aenderungen des Moduls ergeben sich zu:

| $H$ | 159 | 286 | 385 | 473 | 385 | 286 | 159 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | 1,000 | 1,017 | 1,019 | 1,026 | 1,029 | 1,025 | 1,038 |
| | 1,000 | 1,020 | 1,015 | 1,010 | 1,021 | 1,018 | 1,015 |
| | 1,000 | 1,020 | 1,003 | 0,998 | 1,001 | 1,009 | 1,005 |
| | 1,000 | 1,012 | 0,998 | 0,992 | 1,000 | 1,005 | 0,997 |
| | 1,000 | 1,026 | 1,024 | 1,018 | 1,024 | 1,026 | 1,028 |
| | 1,000 | 1,018 | 1,024 | 1,018 | 1,021 | 1,019 | 1,029 |
| | 1,000 | 1,011 | 1,016 | 1,013 | 1,017 | 1,009 | 1,005 |
| | 1,000 | 1,020 | 1,014 | 1,023 | 1,017 | 1,018 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,011 | 1,000 | 1,003 | 1,004 | 1,005 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,021 | 1,011 | 0,999 | 1,004 | 1,014 | 1,014 |
| Mittel | 1,000 | 1,018 | 1,012 | 1,010 | 1,014 | 1,015 | 1,015 |

II. Eisendraht.

| | |
|---|---|
| Länge des Drahtes | 899,0 mm |
| Durchmesser des Drahtes | 0,128 mm |
| Belastung | 75,0 g. |

Die Werte der Ausschläge sind:

| $H$ | 159 | 286 | 385 | 473 | 485 | 286 | 159 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 28,7 | 44,7 | 53,8 | 59,4 | 53,9 | 45,2 | 29,1 |
| $l$ | 14,3 | 22,0 | 26,5 | 29,2 | 26,5 | 22,0 | 14,1 |
| $s$ | 28,3 | 44,5 | 53,3 | 58,5 | 53,2 | 44,0 | 28,0 |
| $l$ | 13,7 | 21,2 | 25,8 | 28,5 | 25,7 | 21,3 | 13,7 |
| $s$ | 28,4 | 44,6 | 53,4 | 59,1 | 53,5 | 44,4 | 28,6 |
| $l$ | 14,4 | 22,2 | 26,7 | 29,2 | 26,4 | 22,1 | 14,1 |
| $s$ | 28,1 | 44,4 | 53,4 | 58,6 | 53,4 | 44,2 | 28,0 |
| $l$ | 13,8 | 21,4 | 26,0 | 28,3 | 26,0 | 21,5 | 13,6 |
| $s$ | 29,0 | 45,9 | 54,8 | 60,0 | 54,9 | 45,5 | 29,0 |
| $l$ | 14,0 | 21,6 | 25,8 | 28,4 | 25,7 | 21,5 | 13,8 |
| $s$ | 28,4 | 44,6 | 53,6 | 59,2 | 53,7 | 44,5 | 28,4 |

Die Werte des Dehnungsmoduls sind:

| $H$ | 159 | 286 | 385 | 473 | 385 | 286 | 159 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | 1,000 | 1,013 | 1,012 | 1,014 | 1,014 | 1,024 | 1,029 |
| | 1,000 | 1,023 | 1,016 | 1,012 | 1,012 | 1,011 | 1,004 |
| | 1,000 | 1,016 | 1,000 | 0,994 | 1,002 | 1,000 | 0,989 |
| | 1,000 | 1,015 | 0,998 | 1,000 | 1,004 | 1,006 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,020 | 1,015 | 1,028 | 1,029 | 1,020 | 1,030 |
| | 1,000 | 1,025 | 1,025 | 1,029 | 1,037 | 1,025 | 1,018 |
| | 1,000 | 1,019 | 1,009 | 1,017 | 1,009 | 1,010 | 1,012 |
| | 1,000 | 1,021 | 1,003 | 1,009 | 1,005 | 1,007 | 1,015 |
| | 1,000 | 1,026 | 1,025 | 1,020 | 1,031 | 1,022 | 1,015 |
| | 1,000 | 1,018 | 1,024 | 1,028 | 1,030 | 1,020 | 1,014 |
| Mittel | 1,000 | 1,020 | 1,013 | 1,015 | 1,018 | 1,014 | 1,013 |

15. Da die Ausschläge kleiner als bei Nickel sind, findet man bei Eisen grössere Abweichungen vom Mittel als bei Nickel.

Das eigentümliche Verhalten des Eisens erhellt aber aus jeder Versuchsreihe. Bei $H = 286$ zeigt der Dehnungsmodul ein Maximum; bei stärkerer Magnetisirung nimmt dann der Modul ab. Wächst die Feldstärke von 159 auf 286, so nimmt der Modul um 1,9 Proc. zu, dann fällt der Modul um 0,7 Proc. und schwankt bei diesem Wert, wenn der Draht mit abnehmender Kraft magnetisirt wird.

Weder bei Nickel noch bei Eisen wurde eine remanente Längenänderung gefunden; die Gleichgewichtslage war nach der Magnetisirung dieselbe, wie vor derselben.

Was die Genauigkeit der Resultate anbelangt, so kann darüber der wahrscheinliche Fehler der Mittelwerte Aufschluss geben. Bei Nickel schwankt dieser zwischen 0,0005 und 0,0018; bei Eisen zwischen 0,0010 und 0,0028.

16. Die Aenderungen des Moduls konnten bestimmt werden, ohne den Modul selbst zu kennen. Da aber die Längen und Spannungsänderungen nach absolutem Maass bestimmt wurden, erlauben sie eine Bestimmung des Moduls in den gebräuchlichen Einheiten. So ergeben sich bei $H = 158$ folgende Werte des Moduls:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. Nickeldraht | 18 850 | I. Eisendraht | 20 000 |
| II. „ | 18 500 | II. „ | 19 400 |

Um die Zuverlässigkeit der Methode zu prüfen, wurde der Modul im unmagnetischen Zustand nach der gewöhnlichen Methode bestimmt, indem die Verlängerung des Drahtes durch ein bekanntes Gewicht mit einem Kathetometer gemessen wurde.

Vom ersten Nickeldraht konnte nur $^2/_3$ des Drahtes verwendet werden, es ergab sich für den Modul der Wert 17 660; für den zweiten 18 100. Der zweite Wert passt sehr gut in die Reihe der Moduln bei Magnetisirung; der erste weniger gut; allerdings konnte nur $^2/_3$ des Drahtes zu letzterer Messung verwendet werden; es zeigte sich auch, dass der Durchmesser längs des Drahtes Aenderungen von 10 Proc. aufwies. Es ist also wohl möglich, dass zu dem kleineren Stück ein anderer mittlerer Durchmesser gehört, als zu dem ganzen Draht.

Der zweite Eisendraht ergab $E = 19\,230$, was sehr gut in die Reihe der Moduln passt. Der erste Eisendraht riss, sodass er nicht mehr verwendbar war.

17. Aus dem Mitgeteilten ist ersichtlich, dass die Magnetisirung eine kleine, aber doch messbare Wirkung auf den Modul hat. Wertheim und Tomlinson haben gefunden, dass die Magnetisirung auf die Tonhöhe longitudinal schwingender Eisenstäbe keinen Einfluss hat, dass also der Modul ungeändert bleibt.

Wertheim giebt die Feldstärke nicht an; möglicherweise war sie zu klein, um eine nachweisbare Wirkung auszuüben. Tomlinson verwendete lange Eisenstäbe, die vor der Magnetisirung mit einem Monochord zusammen gestimmt wurden. Während der Magnetisirung konnte er keine Schwebungen wahrnehmen. Soweit aus seiner Abhandlung zu entnehmen ist, konnte die Schwingungszahl des Stabes ca. 900 betragen. Würden die für dünne Drähte gefundenen Resultate auch für dickere Stäbe gelten, so hätte der Stab mit dem Monochord während der Magnetisirung jede 2,5 Sec. eine Schwebung geben müssen. Da aber Tomlinson keine Schwebungen wahrnehmen konnte, ist es sehr wahrscheinlich, dass dickere Stäbe sich anders verhalten, als dünne Drähte. Dafür spricht auch das Resultat von Byron B. Brackett, wonach der Modul von stark magnetisirten Stäben nur um $^1/_2$ Proc. grösser wird. Shakespear fand, dass der Modul von 0,7 mm dickem Eisendraht durch die Magnetisirung kleiner wird. Seine diesbezüg-

lichen Messungen erwähnt er nur kurz in seiner Abhandlung und fügt hinzu, dass sie nicht zufriedenstellend waren.

Wertheim untersuchte die Frage auch in der Weise, dass er die durch eine bekannte Belastung hervorgerufene Verlängerung maass und zwar vor und während der Magnetisirung. Er fand, dass der Modul durch Magnetisirung kleiner wird. Bei seinen Versuchen achtete er aber nicht genügend auf die Constanz der Temperatur.

## III. Teil.

### Einfluss der Belastung.

1. Die mitgeteilten Resultate stehen mit denen anderer Beobachter zum Teil im Widerspruch. Allerdings untersuchten sie dickere Stäbe und Drähte als ich. Die Abweichung kann aber auch daher stammen, dass die Belastung eine andere war als bei meinen Versuchen. Dass die Belastung auf die magnetischen Aenderungen des Moduls einen Einfluss habe, ist aber sehr plausibel, da doch die Belastung die Magnetisirung beeinflusst (Villari'scher kritischer Punkt) und die Aenderungen des Moduls in erster Reihe wohl von der Magnetisirung abhängen. Die Versuche zeigten denn auch, dass die Wirkung der Magnetisirung auf den Dehnungsmodul ganz bedeutend von der Belastung abhängt.

2. Zur Untersuchung bediente ich mich derselben Methode wie früher, nur war der Apparat in der beschriebenen Zusammenstellung nicht wohl zu gebrauchen. Damit nämlich der Einfluss der Belastung klar hervortrete, war es notwendig, letztere in weiten Grenzen zu ändern, etwa von 100 g bis zu 1000 g. Selbst wenn die Bifilarsuspension solche Belastungen ertragen hätte, wäre die Empfindlichkeit so sehr verringert worden, dass der Apparat nicht zu gebrauchen gewesen wäre. Wie aus Formel (4) erster Teil ersichtlich, ist nämlich die Empfindlichkeit mit der Belastung nahe umgekehrt proportional.

3. Nach einigen Abänderungen am Apparat war es mir möglich, die Belastung bis zu 1000 g zu steigern, ohne die Empfindlichkeit zu beeinträchtigen. Der zu untersuchende Draht wurde unmittelbar an einem Körper befestigt, der in Quecksilber tauchte, dieser Körper dann an die Bifilarsuspension. Der hydrostatische Auftrieb compensirte zum Teil das Gewicht am Drahte, sodass die Belastung der Bifilare beliebig klein

gemacht werden konnte. Demgemäss wurde der in Fig. 1 dargestellte Apparat folgendermaassen abgeändert:

Die Bifilarsuspension und der elastische Draht $HB$ und $CD$ (Fig. 1) blieben unverändert. Zwischen dem elastischen Draht $CD$ und dem Messingstab $DE$ wurde ein Messingrahmen aus 3 mm starkem Draht eingeschaltet (Fig. 2). Wie aus Fig. 2 ersichtlich, war an dem Rahmen ein leerer Glascylinder $U$ befestigt, oben verschlossen. Dieser Cylinder tauchte ganz in

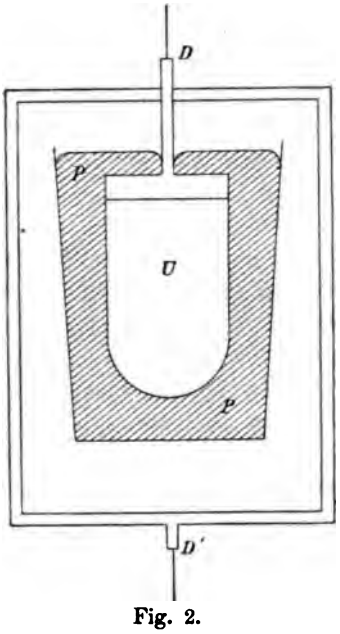



Fig. 2.

Quecksilber (schraffirter Teil); der Becher $P$, das Quecksilber enthaltend, war an das Gestell des Apparates befestigt. An dem Punkt $D$ des Rahmens wurde der elastische Draht befestigt, an $D'$ dagegen der Messingstab $DE$, der den zu untersuchenden Draht trug. Wurden die Dimensionen des Glascylinders passend gewählt und das nötige Quantum Quecksilber in dasselbe gegossen, konnte man erreichen, dass der hydrostatische Auftrieb den Zug der Belastung des zu untersuchenden Drahtes zum Teil compensirte, sodass die ganze auf den Rahmen und auf die Bifilarsuspension nach unten wirkende Kraft ca. 40 g betrug, während die Belastung des zu untersuchenden Drahtes beliebig

gesteigert werden konnte. Ein Vorteil dieser Anordnung bestand darin, dass die Belastung der Bifilare, folglich die Empfindlichkeit immer dieselbe war. Der Rahmen wurde sorgfältig verfertigt, damit die beiden Punkte $D$ und $D'$ mit dem Schwerpunkte des verdrängten Quecksilbers in eine Gerade fielen, und so die verticale Stellung des Rahmens gesichert sei. Sonst blieb der Apparat unverändert. Platte $L$ befand sich unterhalb des Rahmens.

4. Die magnetische Längen- und Spannungsänderung wurde ebenso gemessen wie früher. Es ist leicht einzusehen, dass die Einschaltung des Rahmens nichts am Princip der Methode ändert. Davon, dass der Rahmen keinen neuen systematischen Fehler einführe, konnte ich mich auch dadurch überzeugen, dass ich sowohl für Eisen, wie für Nickel dieselben Resultate erhielt wie früher ohne Rahmen. Der Gang der Versuche war derselbe wie früher.

5. Mit Rücksicht auf die grosse Zahl der Beobachtungen teile ich die Werte der Ausschläge in extenso nicht mit. Es wird vielleicht genügen, wenn ich bemerke, dass die Ausschläge zwischen 15 und 120 Scalenteilen variirten. Die kleinste Belastung, bei der ich beobachtete, betrug 75 g bei Eisen, 100 g bei Nickel. Die grösste Belastung betrug 900 g; eine noch grössere Belastung wäre bei den Dimensionen des Apparates nicht gut zu bewerkstelligen gewesen. Bei 1550 g riss der Eisendraht, bei 1300 g der Nickeldraht. Um die Wirkung der permanenten Deformation zu sehen, wurden die Drähte nach der grössten Belastung wiederum bei kleineren Belastungen beobachtet.

Um elastische Nachwirkungen möglichst auszuschliessen, wurde der Draht wenigstens einen Tag vorher mit dem Gewichte belastet, bei dem beobachtet wurde. Auch später, solange die Versuchsreihe nicht beendet war, blieb der Draht fortwährend unter derselben Belastung, er wurde davon nur auf einige Secunden befreit, die nötig waren, um den Draht in die Spule zu geben und mit dem unteren Glascylinder zu verbinden.

### III. Eisendraht.

Länge des Drahtes 901,0 mm, Durchmesser 0,13 mm.

Folgende Tabellen enthalten die Werte des Moduls, bezogen auf den Modul bei $H = 165$.

a) Belastung 75 g.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 1,012 | 1,007 | 1,017 | 1,012 | 1,002 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,022 | 1,010 | 1,003 | 1,000 | 0,990 | 0,995 |
| | 1,000 | 1,015 | 1,000 | 1,007 | 0,999 | 0,990 | 0,995 |
| | 1,000 | 1,020 | 0,998 | 1,005 | 1,006 | 1,008 | 0,995 |
| | 1,000 | 1,025 | 1,008 | 1,010 | 1,013 | 1,012 | 1,029 |
| | 1,000 | 1,020 | 1,005 | 1,004 | 1,000 | 1,005 | 1,029 |
| | 1,000 | 1,006 | 0,994 | 0,993 | 0,988 | 0,995 | 1,008 |
| | 1,000 | 1,013 | 1,002 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,014 |
| | 1,000 | 1,005 | 0,997 | 0,997 | 1,000 | 1,002 | 1,009 |
| | 1,000 | 1,015 | 1,000 | 1,003 | 1,005 | 1,012 | 1,009 |
| Mittel | 1,000 | 1,016 | 1,002 | 1,004 | 1,002 | 1,002 | 1,009 |

b) Belastung 500 g.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 0,092 | 1,006 | 1,002 | 1,008 | 1,002 | 0,898 |
| | 1,000 | 0,987 | 0,996 | 0,994 | 0,995 | 0,986 | 0,983 |
| | 1,000 | 0,990 | 0,993 | 0,991 | 0,996 | 0,987 | 0,991 |
| | 1,000 | 0,985 | 0,988 | 0,993 | 0,993 | 0,985 | 0,987 |
| | 1,000 | 0,988 | 0,993 | 0,993 | 0,992 | 0,991 | 0,995 |
| | 1,000 | 0,989 | 0,997 | 0,993 | 0,992 | 0,992 | 0,995 |
| | 1,000 | 0,982 | 0,995 | 0,995 | 0,995 | 0,995 | 0,983 |
| | 1,000 | 0,983 | 0,983 | 0,995 | 0,986 | 0,990 | 0,981 |
| | 1,000 | 0,989 | 0,997 | 1,001 | 1,000 | 0,995 | 0,998 |
| | 1,000 | 0 991 | 0,998 | 1,008 | 1,005 | 0,992 | 0,997 |
| Mittel | 1,000 | 0,988 | 0,995 | 0,995 | 0,996 | 0,992 | 0,991 |

c) Belastung 900 g.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 0,995 | 1,001 | 1,013 | 1,007 | 1,003 | 1,011 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,006 | 1,009 | 1,007 | 1,001 | 1,002 |
| | 1,000 | 1,004 | 1,007 | 1,002 | 1,008 | 1,006 | 1,009 |
| | 1,000 | 1,002 | 1,004 | 1,002 | 1,008 | 1,012 | 1,013 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,001 | 1,003 | 1,007 | 1,012 | 1,002 |
| | 1,000 | 1,007 | 1,007 | 1,008 | 1,010 | 1,014 | 1,004 |
| | 1,000 | 1,007 | 1,013 | 1,019 | 1,023 | 1,017 | 1,027 |
| | 1,000 | 0,995 | 0,999 | 1,008 | 1,005 | 0,993 | 1,017 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,005 | 1,007 | 0,999 | 1,000 | 1,000 |
| | 1,000 | 1,002 | 1,010 | 1,010 | 1,010 | 1,007 | 1,000 |
| Mittel | 1,000 | 1,001 | 1,004 | 1,008 | 1,008 | 1,007 | 1,008 |

Hiernach wurde der Draht wieder bei 500 g, dann bei 75 g Belastung beobachtet. „500 g'" und „75 g'" soll bedeuten, dass die Beobachtung bei dieser Belastung nach der Maximalbelastung geschah.

d) Belastung 500 g'.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 1,005 | 1,006 | 1,000 | 0,998 | 1,000 | 1,008 |
| | 1,000 | 1,006 | 1,014 | 1,003 | 1,009 | 1,019 | 1,027 |
| | 1,000 | 1,005 | 1,007 | 1,011 | 1,004 | 1,007 | 1,002 |
| | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 1,009 | 0,998 | 0,983 | 0,985 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,005 | 1,001 | 1,001 | 1,001 | 0,998 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,001 | 0,998 | 0,990 | 0,999 | 0,993 |
| | 1,000 | 0,997 | 0,996 | 0,994 | 0,998 | 0,995 | 0,992 |
| | 1,000 | 0,997 | 1,004 | 1,003 | 1,012 | 0,997 | 0,996 |
| | 1,000 | 0,989 | 1,003 | 1,004 | 1,006 | 1,001 | 1,006 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,001 | 1,007 | 1,008 | 0,995 | 1,002 |
| Mittel | 1,000 | 1,000 | 1,003 | 1,003 | 1,002 | 1,000 | 1,001 |

e) Belastung 75 g'.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 0,996 | 1,014 | 1,019 | 1,003 | 0,990 | 0,998 |
| | 1,000 | 0,988 | 1,003 | 1,005 | 0,998 | 0,981 | 0,996 |
| | 1,000 | 0,983 | 0,996 | 0,995 | 0,998 | 0,976 | 0,997 |
| | 1,000 | 0,995 | 0,999 | 1,004 | 1,002 | 0,991 | 0,997 |
| | 1,000 | 0,992 | 0,988 | 0,998 | 0,992 | 0,990 | 0,997 |
| | 1,000 | 0,994 | 0,989 | 0,997 | 0,987 | 0,984 | 0,993 |
| | 1,000 | 0,995 | 0,994 | 0,999 | 0,987 | 0,987 | 0,990 |
| | 1,000 | 1,000 | 0,993 | 0,993 | 1,006 | 0,999 | 1,004 |
| | 1,000 | 1,003 | 1,001 | 1,008 | 1,014 | 1,003 | 1,010 |
| | 1,000 | 1,005 | 1,002 | 1,012 | 1,003 | 1,001 | 0,996 |
| Mittel | 1,000 | 0,995 | 0,998 | 1,003 | 0,999 | 0,990 | 0,998 |

6. Vergleicht man die erste Tabelle mit den früheren Beobachtungen, so ist die Uebereinstimmung genügend zu nennen; hier wie dort zeigt der Modul bei $H = 290$ ein Maximum; bei grösseren Magnetisirungen zeigen die früheren Beobachtungen kleinere Aenderungen. Man muss in Betracht ziehen, dass solche Abweichungen von einem Draht zum

anderen wohl möglich sind; ausserdem war der Apparat jetzt empfindlicher, ferner zeigen die früheren Beobachtungen eben bei $H=400$ und $H=460$ die grössten Schwankungen, grössere als bei den jetzigen.

Was die übrigen Tabellen betrifft, ist aus ihnen ersichtlich, dass sich das Verhalten des Eisendrahtes bei 500 g Belastung total verändert; das frühere Maximum verschwindet, an seine Stelle tritt ein ausgeprägtes Minimum, das aus jeder einzelnen Versuchsreihe klar hervortritt. Bei 900 g Belastung ist das Verhalten wieder anders geworden, indem der Modul langsam ansteigt. Nach dieser Maximalbelastung hat die Belastung weniger Einfluss auf die Aenderungen des Moduls: bei 500 g ist eine sanfte Steigung vorhanden, bei 75 g entwickelt sich ein schwaches Minimum. Daraus kann man schliessen, dass das Verhalten des Eisens hauptsächlich durch die permanente Deformation beeinflusst wird, da nach der grössten Belastung die Aenderungen des Moduls viel weniger von der Belastung abhängen.

7. Mit Rücksicht auf das sonderbare Verhalten des Eisens schien es wünschenswert, die Untersuchung auch bei 300 g und 700 g Belastung auszuführen. Die Mittelwerte dieser Beobachtungsreihen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

IV. Eisendraht.

Länge des Drahtes 901,0 mm, Durchmesser des Drahtes 0,13 mm.

| $H$ | Belastung | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 75 | 300 | 500 | 700 | 900 |
| 165 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 293 | 1,019 | 0,994 | 0,987 | 0,994 | 1,004 |
| 396 | 1,005 | 0,996 | 0,997 | 1,000 | 1,006 |
| 484 | 0,998 | 0,996 | 0,996 | 1,002 | 1,011 |
| 396 | 1,004 | 0,996 | 0,995 | 0,995 | 1,006 |
| 293 | 1,016 | 0,995 | 0,994 | 0,996 | 1,004 |
| 165 | 1,007 | 0,981 | 0,986 | 0,997 | 1,004 |

Mit dem Drahte III verglichen ist die Uebereinstimmung vorzüglich; bei 75 g Belastung allein sind etwas grössere Abweichungen vorhanden; sie sind von derselben Ordnung wie die zwischen I, II und III.

Grössere Abweichungen sind bei absteigender Magnetisirung vorhanden. Höchstwahrscheinlich hat die Dauer der Magnetisirung, überhaupt die ganze Vorgeschichte des Drahtes einen Einfluss auf diese Werte; darauf, dass die Vorgeschichte der Drähte möglichst gleich sei, wurde keine besondere Sorgfalt verwendet. Die Differenz in dem Modul bei auf- und

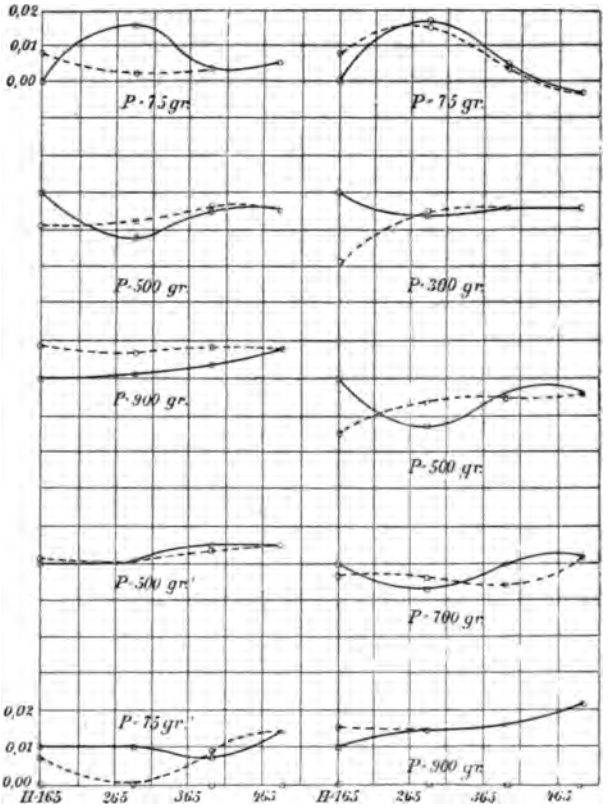



Fig. 3.

absteigender Magnetisirung macht es wahrscheinlich, dass der Draht erst nach mehrfachen solchen Magnetisirungen einen gewissen Endzustand annimmt. Es wäre angezeigt, die Untersuchung in dieser Richtung fortzusetzen.

Was die Werte bei 300 und 700 g betrifft, fügen sie sich sehr gut in die Reihe; sie zeigen den continuirlichen Uebergang aus einem Zustand in den anderen.

Nach der grössten Belastung konnte ich den Draht bei kleineren Belastungen nicht mehr beobachten, da er inzwischen riss.

Die Resultate sind in Fig. 3 graphisch dargestellt; Abscisse ist die Stärke des magnetischen Feldes, Ordinate die procentuelle Aenderung des Moduls bezogen auf seinen Wert bei $H = 165$; die punktirte Curve entspricht der absteigenden Magnetisirung.

### III. Nickeldraht.

**Länge des Drahtes 901,0 mm, Durchmesser des Drahtes 0,15 mm.**

8. Die Resultate sind so zusammengestellt wie bei Eisen.

a) Belastung 100 g.

| $H$ | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | 1,000 | 1,019 | 1,025 | 1,032 | 1,026 | 1,021 | 1,046 |
| | 1,000 | 1,010 | 1,012 | 1,008 | 1,012 | 1,004 | 1,010 |
| | 1,000 | 1,008 | 1,010 | 1,009 | 1,015 | 1,016 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,008 | 1,010 | 1,015 | 1,005 | 0,996 | 1,014 |
| | 1,000 | 1,008 | 1,011 | 1,017 | 1,003 | 0,978 | 1,000 |
| | 1,000 | 1,012 | 1,025 | 1,020 | 1,020 | 1,006 | 1,000 |
| | 1,000 | 1,014 | 1,025 | 1,025 | 1,034 | 1,017 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,010 | 1,018 | 1,025 | 1,033 | 1,016 | 1,020 |
| | 1,000 | 1,008 | 1,010 | 1,014 | 1,015 | 1,015 | 1,010 |
| | 1,000 | 1,012 | 1,007 | 1,008 | 0,999 | 1,006 | 0,990 |
| Mittel | 1,000 | 1,011 | 1,015 | 1,017 | 1,016 | 1,008 | 1,010 |

b) Belastung 500 g.

| $H$ | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | 1,000 | 0,995 | 1,015 | 1,018 | 1,025 | 1,026 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,005 | 1,015 | 1,016 | 1,015 | 1,012 | 0,993 |
| | 1,000 | 1,014 | 1,017 | 1,017 | 1,017 | 1,009 | 0,997 |
| | 1,000 | 1,003 | 1,003 | 0,998 | 1,004 | 1,001 | 0,996 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,002 | 1,004 | 1,001 | 0,992 | 0,987 |
| | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 1,006 | 0,999 | 0,988 | 0,987 |
| | 1,000 | 1,004 | 0,997 | 1,005 | 1,000 | 1,007 | 1,000 |
| | 1,000 | 1,003 | 1,008 | 1,014 | 1,010 | 1,011 | 1,007 |
| | 1,000 | 1,007 | 1,008 | 1,008 | 1,010 | 1,006 | 0,996 |
| | 1,000 | 1,017 | 1,014 | 1,023 | 1,015 | 1,018 | 1,021 |
| Mittel | 1,000 | 1,005 | 1,008 | 1,011 | 1,010 | 1,007 | 0,998 |

c) Belastung 900 g.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 0,986 | 0,996 | 1,002 | 0,983 | 0,995 | 0,977 |
| | 1,000 | 0,984 | 1,026 | 1,023 | 1,021 | 1,006 | 1,017 |
| | 1,000 | 0,995 | 0,996 | 1,017 | 1,010 | 1,016 | 1,000 |
| | 1,000 | 0,970 | 0,956 | 0,981 | 0,985 | 0,990 | 0,973 |
| | 1,000 | 0,960 | 0,962 | 0,978 | 0,983 | 0,998 | 0,993 |
| | 1,000 | 0,965 | 1,001 | 1,010 | 1,004 | 1,021 | 1,021 |
| | 1,000 | 0,968 | 1,008 | 1,022 | 1,009 | 1,000 | 1,014 |
| | 1,000 | 0,986 | 0,992 | 1,003 | 0,999 | 0,995 | 1,035 |
| | 1,000 | 0,991 | 0,986 | 0,985 | 0,986 | 0,988 | 1,018 |
| | 1,000 | 0,967 | 0,976 | 0,974 | 0,962 | 0,965 | 0,983 |
| Mittel | 1,000 | 0,977 | 0,990 | 1,000 | 0,994 | 0,997 | 1,003 |

d) Belastung 500 g.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 1,003 | 1,007 | 0,999 | 0,999 | 1,026 | 1,035 |
| | 1,000 | 1,005 | 1,000 | 0,998 | 1,007 | 1,029 | 1,052 |
| | 1,000 | 1,007 | 1,007 | 0,999 | 1,039 | 1,029 | 1,052 |
| | 1,000 | 1,005 | 1,008 | 0,997 | 1,018 | 1,011 | 1,000 |
| | 1,000 | 0,993 | 0,994 | 0,991 | 0,990 | 0,993 | 0,973 |
| | 1,000 | 0,097 | 0,995 | 0,984 | 0,983 | 0,985 | 0,973 |
| | 1,000 | 1,009 | 1,008 | 0,985 | 0,992 | 0,997 | 0,980 |
| | 1,000 | 1,003 | 0,997 | 0,993 | 0,995 | 1,005 | 0,997 |
| | 1,000 | 1,021 | 1,003 | 0,993 | 0,988 | 1,026 | 1,024 |
| | 1,000 | 1,027 | 1,015 | 0,998 | 1,003 | 1,034 | 1,028 |
| Mittel | 1,000 | 1,007 | 1,003 | 0,994 | 1,001 | 1,014 | 1,011 |

e) Belastung 100 g'.

| *H* | 165 | 293 | 396 | 484 | 396 | 293 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *E* | 1,000 | 0,998 | 0,995 | 1,006 | 1,006 | 0,998 | 1,010 |
| | 1,000 | 0,998 | 1,000 | 1,011 | 1,006 | 1,000 | 1,004 |
| | 1,000 | 0,994 | 1,004 | 1,003 | 1,006 | 1,000 | 1,017 |
| | 1,000 | 0,989 | 1,002 | 1,002 | 0,998 | 0,998 | 1,010 |
| | 1,000 | 0,998 | 1,002 | 1,005 | 1,002 | 0,998 | 1,004 |
| | 1,000 | 0,996 | 1,004 | 1,009 | 1,006 | 1,000 | 1,000 |
| | 1,000 | 1,000 | 1,012 | 1,009 | 1,002 | 1,005 | 0,993 |
| | 1,000 | 0,997 | 1,008 | 1,004 | 1,014 | 1,002 | 1,000 |
| | 1,000 | 0,999 | 1,010 | 1,000 | 1,012 | 1,004 | 1,009 |
| | 1,000 | 0,993 | 0,996 | 1,012 | 0,998 | 0,997 | 1,000 |
| Mittel | 1,000 | 0,996 | 1,003 | 1,006 | 1,005 | 1,000 | 1,005 |

9. Vergleicht man die Tabelle a) mit dem I. und II. Nickeldraht, so findet man nur bei absteigender Magnetisirung grössere Abweichungen; es scheint, dass bei Nickel die Aenderungen des Moduls noch mehr von der Vorgeschichte des Drahtes abhängen, wie bei Eisen. Bei 500 g wächst der Modul noch immer mit der Magnetisirung; bei 900 g tritt ein scharf ausgeprägtes Minimum auf. Wird die Belastung dann kleiner, so ändert sich der Modul wieder anders; bei 500 g tritt um $H = 293$ herum ein kleines Maximum auf, bei 100 g an derselben Stelle ein kleines Minimum. Fig. 4 stellt die Resultate graphisch dar.

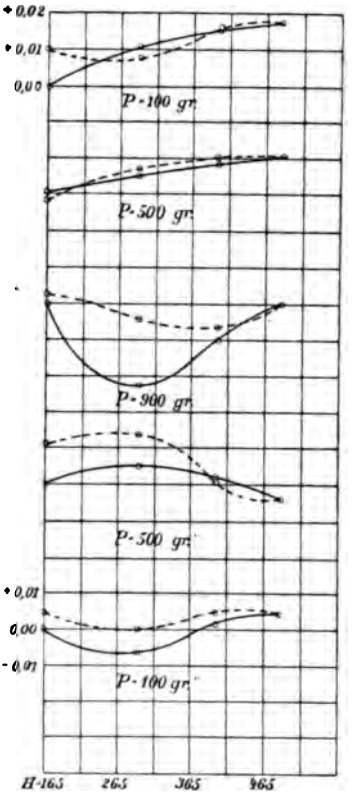


Fig. 4.

10. Die wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte sind bei aufsteigender Magnetisirung viel kleiner wie bei absteigender. Der wahrscheinliche Fehler der Mittelwerte schwankt im ersteren Falle zwischen 0,0010 und 0,0020. Bei aufsteigender Magnetisirung beträgt der grösste wahrscheinliche Fehler bei Eisen 0,0040, bei 75 g' Belastung und $H = 165$; bei Nickel 0,0100, bei 500 g' und $H = 165$.

11. Will man die Aenderungen des Moduls mit anderen physikalischen Grössen in Zusammenhang bringen, so kommt in erster Reihe die Magnetisirung in Betracht. Eine einfache Beziehung konnte ich aus dem bisherigen Beobachtungsmaterial nicht finden. Vor allem müsste für die verwendeten dünnen Drähte die Magnetisirung bei derselben Feldstärke und derselben Belastung untersucht werden, wie die Aenderungen des Moduls

## IV. Anhang.

### Die magnetische Längenänderung.

1. Die magnetischen Längen- und Spannungsänderungen brauchten zur vorliegenden Untersuchung nicht ihrer absoluten Grösse nach bestimmt zu werden. Dennoch wurden sie immer mitbestimmt; es wird vielleicht nicht uninteressant sein, wenn ich wenigstens die beobachteten Längenänderungen in absoluter Grösse zusammenstellte.

Die Eisendrähte zeigten nur Contraction, selbst bei den kleinsten Feldstärken. Die Tabellen geben die Mittelwerte der Contraction $l$ eines 1000 mm langen Eisendrahtes in zehntausendstel Millimeter.

I. Eisendraht.

Belastung 75 g.

| $H$ | $l$ |
|---|---|
| 159 | 46,5 |
| 286 | 72,5 |
| 385 | 88,0 |
| 473 | 96,5 |
| 385 | 87,5 |
| 286 | 72,5 |
| 159 | 45,5 |

II. Eisendraht.

Belastung 75 g.

| $H$ | $l$ |
|---|---|
| 159 | 48,0 |
| 286 | 74,0 |
| 385 | 89,5 |
| 478 | 98,0 |
| 385 | 89,0 |
| 286 | 74,0 |
| 159 | 47,0 |

III. Eisendraht.

| $H$ | Belastung | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 75 | 500 | 900 | 500 | 75′ |
| 165 | 47,3 | 55,7 | 59,7 | 53,9 | 48,2 |
| 293 | 73,4 | 87,1 | 91,1 | 83,5 | 75,6 |
| 396 | 88,9 | 105,7 | 112,0 | 101,4 | 90,4 |
| 484 | 97,6 | 118,3 | 126,1 | 113,8 | 99,2 |
| 396 | 88,7 | 105,0 | 111,1 | 101,0 | 90,0 |
| 293 | 73,4 | 85,9 | 90,7 | 82,6 | 75,2 |
| 165 | 46,6 | 55,2 | 58,6 | 53,0 | 47,6 |

IV. Eisendraht.

| *H* | Belastung | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 75 | 300 | 500 | 700 | 900 |
| 165 | 45,8 | 50,9 | 53,2 | 57,0 | 58,8 |
| 293 | 71,1 | 79,7 | 83,5 | 88,9 | 90,4 |
| 396 | 86,6 | 96,9 | 101,9 | 107,9 | 110,6 |
| 484 | 95,8 | 108,4 | 115,1 | 122,5 | 126,1 |
| 396 | 86,6 | 96,5 | 101,9 | 107,9 | 110,1 |
| 293 | 70,9 | 78,8 | 82,4 | 88,0 | 90,2 |
| 165 | 45,4 | 50,9 | 53,2 | 56,8 | 58,3 |

Bidwell[1]) und nach ihm andere fanden, indem sie dickere Eisenstäbe, Ringe, Ellipsoide untersuchten, dass sich Eisen bei kleiner Magnetisirung ausdehnt, bei grosser dagegen zusammenzieht. Die untersuchten Stäbe, Ringe waren mindestens 1—2 mm dick. Schon Bidwell beobachtete, dass die magnetische Dilatation mit dem Durchmesser des Stabes zugleich kleiner wird, dass ferner bei wachsender Belastung die Contraction früher eintritt und grössere Werte annimmt. Bei einem 0,7 mm starken Eisendrahte trat überhaupt nur Contraction auf.[2]) Neuestens fand auch Shakespear[3]) bei 0,7 mm dicken Eisendrähten nur Contraction. Meine Beobachtungen dienen also zur Ergänzung der älteren Beobachtungen.

2. Bei Nickel fand ich ebenfalls nur Contraction und zwar folgende Werte.

I. Nickeldraht.
Belastung 100 g.

| *H* | *l* |
|---|---|
| 158 | 82 |
| 284 | 135 |
| 385 | 164 |
| 465 | 181 |
| 385 | 163 |
| 284 | 134 |
| 158 | 82 |

II. Nickeldraht.
Belastung 100 g.

| *H* | *l* |
|---|---|
| 158 | 88 |
| 284 | 143 |
| 385 | 172 |
| 465 | 188 |
| 385 | 171 |
| 284 | 141 |
| 158 | 87 |

1) Shelford Bidwell, Phil. Trans. 179. p. 205—230. 1888.
2) Shelford Bidwell, Proc. Roy. Soc. 47. p. 469—480. 1890.
3) Shakespear, Phil. Mag. 47. p. 539—556. 1899.

III. Nickeldraht.

| *H* | Belastung | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 500 | 900 | 500 | 100 |
| 165 | 88,1 | 59,7 | 19,1 | 51,8 | 116,5 |
| 293 | 136,6 | 117,3 | 50,5 | 114,8 | 174,9 |
| 396 | 167,5 | 159,3 | 82,7 | 163,8 | 202,0 |
| 484 | 186,8 | 189,7 | 111,5 | 200,4 | 216,9 |
| 396 | 166,7 | 157,6 | 81,1 | 163,0 | 200,4 |
| 293 | 135,8 | 115,2 | 48,2 | 112,8 | 172,4 |
| 165 | 81,5 | 57,6 | 18,6 | 50,2 | 113,2 |

Die Zahlen geben die Contraction eines 1000 mm langen Drahtes in zehntausendstel Millimeter. Die Zahlen sind mit jenen von Bidwell in guter Uebereinstimmung.

Es ist ersichtlich, dass die Verkürzung ganz bedeutend von der Belastung abhängt. Bei geringer Magnetisirung wird die Contraction kleiner, wenn die Belastung wächst; bei grösserer wächst sie dagegen eine Zeit lang mit der Belastung in Uebereinstimmung mit Bidwell. Der Einfluss der permanenten Deformation tritt auch klar hervor. Bei Nickel ist der Einfluss der Belastung viel bedeutender als bei Eisen. Es ist sonderbar, dass dennoch bei Eisen der Einfluss der Belastung auf die Aenderungen des Moduls viel bedeutender ist, als bei Nickel.

Budapest, Mai 1901.

(Eingegangen 3. Juni 1901.)

schiedene, Kerne verschiedener polymorpher Krystalle sich bilden.

Die Thatsache der allgemeinen Verbreitung des Polymorphismus verursacht das Auftreten einer Menge von Tripelpunkten in den Zustandsdiagrammen. Infolge dessen ist es bei der Ausarbeitung solcher Diagramme, in denen der Stoff eine höhere Ordnung des Polymorphismus besitzt, von grosser Wichtigkeit, allgemeine Regeln über die Lage der Schmelz- und Umwandlungscurven in einem Tripelpunkt zu besitzen, da solche Regeln eine erwünschte Controle der directen Versuchsresultate ermöglichen. Die Regeln von Moutier-Duhem[1]) sowie die von L. Natanson[2]) und E. Riecke[3]) ermöglichen aber eine Controle erst dann, wenn ausser der Richtung der Gleichgewichtscurven noch ein Teil der Volumenänderungen oder der Schmelzwärmen gegeben ist, sie sind daher in praxi gewöhnlich nicht anwendbar. Man kann aber zu einer allgemeinen Regel über die Lage der Schmelz- und Umwandlungscurven in Tripelpunkten gelangen, bei deren Anwendung die Kenntnis der Volumenänderungen und Umwandlungswärmen nicht erforderlich ist. Diese Regel hat sich mir seit Anfang des Jahres 1899 nützlich bei der Aufsuchung von Umwandlungs- und Schmelzcurven, sowie bei der Controle von Zustandsdiagrammen erwiesen. Die Regel lautet: die Verlängerung einer Curve absolut stabiler Gleichgewichte über einen Tripelpunkt hinaus fällt immer zwischen zwei Curven absolut stabiler Gleichgewichte. Diese Regel kann nach den Methoden von J.W. Gibbs in folgender Weise abgeleitet werden.

1. Werden im Volumenentropie-Diagramm für die Masseneinheit jeder der drei im Tripelpunkte bei der Temperatur $T_0$ und dem Drucke $p_0$ coexistirenden Phasen die Volumen und Entropien eingetragen, so erhält man die Punkte 1, 2 und 3, welche die Ecken des Fundamentaldreieckes bilden (Fig. 1a). Alle möglichen Zustände eines Stoffs, die derselbe, in drei Phasen verteilt, bei Aenderung des Volumens annehmen kann, werden durch Punkte, die in die Dreiecksfläche fallen, dar-

1) P. Duhem, Mechanique chimique 2. p. 93. 1898 und Zeitschr. f. phys. Chem. 8. p. 367. 1891.

2) L. Natanson, Wied. Ann. 42. p. 178. 1891.

3) E. Riecke, Zeitschr. f. phys. Chem. 6. p. 411. 1890.

gestellt. Wird durch Volumenänderung die Menge einer Phase gerade zum Verschwinden gebracht, so wird der Zustand des jetzt in zwei Phasen verteilten Stoffs durch einen Punkt auf einer der Dreiecksseiten dargestellt.

Aendert sich die Temperatur, so ist ein Gleichgewicht des Stoffs bei einer Verteilung desselben in drei Phasen nicht mehr möglich, es sind dann bei drei verschiedenen Drucken Gleichgewichte mit je zwei Phasen realisirbar. Diese Gleichgewichtszustände zweier Phasen werden durch drei in die $\eta v$-Ebene fallenden Ebenen, begrenzt von je zwei Curven, die in die Endpunkte je einer Dreiecksseite treffen, dargestellt. Je zwei Punkte der beiden die Streifen begrenzenden Curven, verbunden durch eine Gerade, geben das Zweiphasengleichgewicht bei einer bestimmten Temperatur und einem bestimmten Druck. Die Lage des Punktes auf der Geraden, die das Gleichgewicht darstellt, giebt die Menge des Stoffs in jeder der Phasen an. Diese Geraden sind in der Nähe jeder der Dreiecksseiten diesen parallel, und die drei Gleichgewichtsflächen verlassen die drei Dreiecksseiten in Richtungen senkrecht zu den Dreiecksseiten.

Ueberträgt man das Gleichgewichtsdiagramm aus der $\eta v$-Ebene in die $Tp$-Ebene, so schrumpft das Dreieck 1, 2, 3 in der $Tp$-Ebene zu einem Punkt und die Streifen der Zweiphasengleichgewichte zu Linien zusammen. Es fragt sich nun, in welcher Beziehung die Richtungen der Gleichgewichtscurven auf der $Tp$-Ebene zu den Richtungen der Gleichgewichtsflächen in der Nähe der Dreiecksseiten auf der $\eta v$-Ebene stehen. Die Richtung einer Dreiecksseite ist durch den Quotienten $\Delta\eta/\Delta v$ gegeben, dieser ist gleich der Tangente des Winkels, den die Dreieckseite mit der $v$-Axe bildet. $\Delta\eta$ ist aber gleich der entsprechenden Umwandlungswärme $R$, gemessen in mechanischem Maasse, dividirt durch die Temperatur des Tripelpunktes. Demnach folgt

$$\frac{\Delta\eta}{\Delta v} = \frac{R}{T_0 \Delta v} = \left(\frac{dp}{dT}\right),$$

und für die Richtung der senkrecht die Dreieckseiten verlassenden Gleichgewichtsebenen

$$-\frac{\Delta v}{\Delta\eta} = \left(\frac{dT}{dp}\right).$$

Will man den beiden Coordinatensystemen $\eta v$ und $Tp$ die Eigenschaft geben, dass vom Nullpunkt derselben $v$ und $p$ in derselben Richtung wachsen, so ist zu beachten, dass einer Aenderung von $v$ eine Aenderung von $p$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen entspricht. Dann ergiebt sich:

$$\frac{\Delta v}{\Delta \eta} = -\left(\frac{dT}{dp}\right).$$

Oder errichtet man auf den Seiten des Dreiecks Senkrechte, die vom Dreieck aus ausstrahlend in einem beliebigen Punkte innerhalb desselben sich treffen, und druckt nach einer Drehung von 180° um die $\eta$-Axe dieses Liniensystem auf der $Tp$-Ebene ab, so erhält man die Richtung der Gleichgewichtscurven im $Tp$-Diagramm.

Jene Stücke der Senkrechten bis zum Punkte, in dem sie sich treffen, entsprechen den Gleichgewichtscurven absoluter Stabilität, ihre Verlängerungen über diesen Punkt hinaus sind zum Teil realisirbar, aber von nicht absoluter Stabilität. Da die Verlängerung einer der Senkrechten über den Schnittpunkt der drei Senkrechten hinaus immer zwischen zwei andere Senkrechte fallen muss, so folgt auch, dass im $Tp$-Diagramm die Verlängerung einer der absolut stabilen Gleichgewichtscurven über den Tripelpunkt hinaus, wobei sie die absolute Stabilität verliert, zwischen zwei absolut stabile Gleichgewichtscurven fallen muss. Dieser Satz war zu beweisen.

In dem Falle, in welchem es sich um zwei Schmelzcurven und eine Umwandlungscurve handelt, nimmt dieser Satz folgende Specialform an: die Schmelzcurve, die bei Temperaturen oberhalb des Tripelpunktes absolut stabile Gleichgewichte darstellt, kann nur steiler verlaufen, einen grösseren $dT/dp$-Wert haben, als die andere Schmelzcurve. Infolge dessen kann eine Krümmung der Schmelzcurven zur Druckaxe ihren Grund nie im Auftreten neuer polymorpher Modificationen haben.

Jetzt folgt auch unmittelbar der Satz von Duhem. Da für die grösste Volumendifferenz $\Delta\eta/\Delta v$ den kleinsten Wert hat, so wird im Tripelpunkt vor allen anderen Gleichgewichtscurven die der grössten Volumendifferenz entsprechende Gleichgewichtscurve den grössten $dT/dp$-Wert, also den steilsten Verlauf, haben. Folglich wird ein Punkt, der sich parallel der $p$-Axe bewegt, von den drei Gleichgewichtscurven und

ihren Verlängerungen nicht absolut stabiler Stabilität immer an zweiter Stelle die Curve, der die grösste Volumenänderung zukommt, schneiden.

2. Die Gleichungen, welche die Volumenänderungen und Umwandlungswärmen in einem Tripelpunkte verbinden, sind folgende:

$$\Delta v_{12} + \Delta v_{23} - \Delta v_{13} = 0. \tag{1}$$

Vollzieht man also in einem Tripelpunkte einen Kreisprocess, indem man die Masseneinheit des Stoffs, die sich ursprünglich in der Phase 1 befindet, in die Phase 2, dann in die Phase 3, und schliesslich in die Phase 1 überführt, so ist die Summe der äusseren Arbeiten bei diesem isothermen und isobaren Kreisprocess, wenn Gleichung (1) gilt, gleich Null. Daraus folgt für die Umwandlungswärmen die Gleichung:

$$R_{12} + R_{23} - R_{13} = 0. \tag{2}$$

Ferner gelten die Gleichungen:

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_{12} = \frac{\Delta v_{12} T_0}{R_{12}}, \quad \left(\frac{dT}{dp}\right)_{23} = \frac{\Delta v_{23} T_0}{R_{23}}, \quad \left(\frac{dT}{dp}\right)_{13} = \frac{\Delta v_{13} T_0}{R_{13}}. \tag{3}$$

Sind je zwei der $\Delta v$- und $R$-Werte bekannt, so ist das Fundamentaldreieck bestimmt und auch die $dT/dp$-Werte können construirt werden. In praxi ist es aber viel leichter die Richtung einer Gleichgewichtscurve zu bestimmen, als die Bestimmung einer Volumenänderung oder Umwandlungswärme besonders bei höheren Drucken auszuführen. Sind die $dT/dp$-Werte bekannt, so ist damit eine Schar von Dreiecken, die dem Fundamentaldreiecke ähnlich sind, construirbar. Ist ferner noch ein $\Delta v$-Wert, oder, was seltener vorkommt, ein $R$-Wert bekannt, so ist das Fundamentaldreieck bestimmt; dann können alle übrigen $\Delta v$- und $\eta$- bez. $R$-Werte direct im Diagramm abgelesen werden.

3. Um eine leichte Uebersicht über die Beziehungen der Gleichgewichtscurven zum Fundamentaldreieck zu geben, sind für drei Fälle die Fundamentaldreiecke auf den $\eta v$- und die Gleichgewichtscurven auf den $Tp$-Ebenen construirt worden (vgl. Figg. 1a bis 3b).

Auf den $Tp$-Ebenen sind die Richtungen der Curven absolut stabilen Gleichgewichts im Tripelpunkt durch voll ausgezogene Linien gegeben, während ihre Verlängerungen über

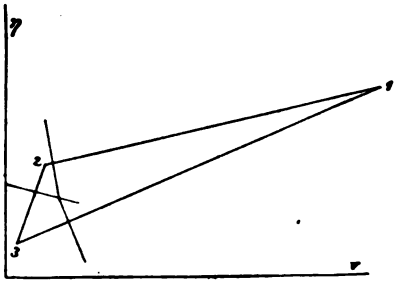


Fig. 1a.

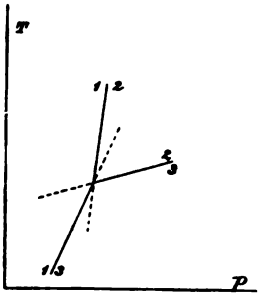


Fig. 1b.

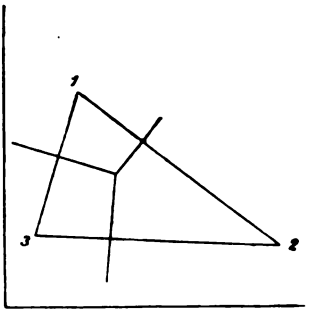


Fig. 2a.

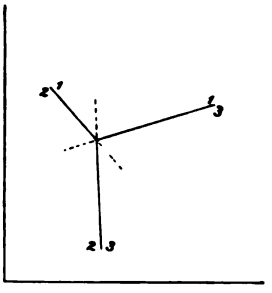


Fig. 2b.

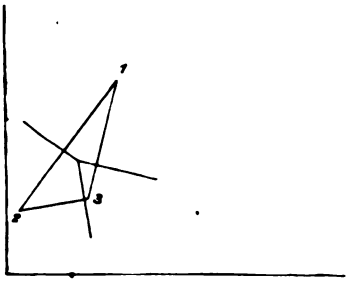


Fig. 3a.

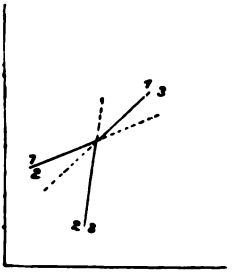


Fig. 3b.

den Tripelpunkt hinaus punktirt worden sind. Die Dimensionen der Fundamentaldreiecke sind zum Teil nicht ganz entsprechend den realen Verhältnissen wiedergegeben, worauf auch das Fehlen eines Maassstabes hinweist.

Das erste Paar der Diagramme soll das Fundamentaldreieck und die Lage der Gleichgewichtscurven im Tripelpunkt für den Fall, dass die Zahlen 1, 2 und 3 Dampf, Flüssigkeit und Krystall bezeichnen, wiedergeben. In den meisten dieser Fälle würden aber, wenn die Dreiecksseite (2 3) die gezeichnete Länge beibehält, die beiden anderen Dreiecksseiten viel länger als im Diagramm werden. Infolge dessen wird auch der Winkel, den die beiden Gleichgewichtscurven (1 2) und (1 3) bilden, viel kleiner werden. Bekanntlich ist dieser Winkel in den meisten Fällen so klein, dass es schwierig ist, den Knick beim Uebergang von der Dampfspannungscurve der Flüssigkeit zu der des Krystalles nachzuweisen. Man hätte sich diesen Nachweis erheblich erleichtern können, wenn man Stoffe untersucht hätte, deren specifisches Dampfvolumen im Tripelpunkt möglichst klein ist, z. B. $PH_4Cl$.

Dieses Diagramm bringt ferner noch die Lage der Gleichgewichtscurven in einer Reihe von Tripelpunkten zur Anschauung, bei denen zwei Arten von Krystallen mit ihrer Schmelze im Gleichgewicht sind. Der Curve (2 3) entspricht dann die Umwandlungscurve beider Krystallarten und die Curven (1 2) und (1 3) den Schmelzcurven beider Krystallarten. Solche Tripelpunkte sind früher bei der Kohlensäure und beim Trimethylcarbinol realisirt worden. Man findet die näheren Angaben nebst den realen *Tp*-Diagrammen in einer früheren Arbeit.[1])

Eine andere Art von Tripelpunkten wird durch die Diagramme 2a und 2b veranschaulicht, welche die Verhältnisse beim Tripelpunkt für Wasser (1), gewöhnliches Eis (2) und das Eis III (3) wiedergeben. Diesem Tripelpunkt ganz analog ist der für Wasser, gewöhnliches Eis und Eis II. Reale Diagramme hierüber findet man in einer vor kurzem erschienenen Abhandlung.[2]) Ein ferneres Beispiel findet sich beim Jodsilber. Die Curve (1 2) würde der Umwandlung des gelben ins rote Jodsilber entsprechen, die Curve (2 3) der Umwandlung des gelben Jodsilbers in eine über 3000 kg stabile

1) Wied. Ann. **68.** p. 570 u. 629. 1899.

2) Ann. d. Phys. **2.** p. 5 u. 17. 1900.

Modification, während die Curve (13) noch nicht realisirt worden ist.[1]) Ein Fall, in dem die Umwandlungscurve (2 3) bei sonst analogen Verhältnissen mit steigender Temperatur von kleineren zu höheren Drucken geht, kommt beim Ammoniumnitrat vor.[2])

Während bei den obigen Fällen eine mit steigender Temperatur zu höheren Drucken steigende Schmelzcurve beim Tripelpunkt in eine Schmelzcurve und eine Umwandlungscurve auseinanderfällt, kommt auch der entgegengesetzte Fall, den das Diagramm 3 veranschaulicht, vor. Beispiele für diesen Fall findet man beim Schwefel[3]), bei der Essigsäure und dem Jodmethylen in der folgenden Arbeit. Fälle, bei denen ceteris paribus die Umwandlungscurve (2 3) mit steigender Temperatur zu kleineren Drucken geht, sind bisher noch nicht aufgefunden worden.

Von den Gleichgewichtscurven im Tripelpunkt können nicht zwei Curven zusammenfallen, z. B. eine Schmelzcurve mit einer Umwandlungscurve, da sonst auch die dritte Gleichgewichtscurve mit ihnen zusammenfallen, und die Gleichung

$$\frac{\Delta v_{12}}{R_{12}} = \frac{\Delta v_{23}}{R_{23}} = \frac{\Delta v_{13}}{R_{13}}$$

gelten würde. Die Thatsache, dass diese Gleichung in keinem Tripelpunkt besteht, beweist, dass die Aenderung der potentiellen Energie der Molecüle bei der Krystallisation in keinem engeren Zusammenhang mit der Volumenänderung während derselben steht.

Dagegen wäre es möglich, dass wenn die Volumen der Flüssigkeit und des Dampfes wie ihre Entropien gleich werden, ein Krystall mit beiden Phasen im kritischen Punkt der Flüssigkeit im Gleichgewicht sich befinden könnte. Es würde dann, wie sich leicht ableiten lässt, die Schmelzcurve in einem Knick an den Endpunkt der Dampfspannungscurve ansetzen, doch die Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammentreffens ist sehr gering.

---

1) Wied. Ann. 68. p. 645. 1899.
2) l. c. p. 670.
3) l. c. p. 633.

Durchschneidet eine Schmelzcurve die durch den kritischen Punkt der $p$-Axe gelegte Parallele, so liegt kein Grund für eine plötzliche Richtungsänderung der Schmelzcurve vor. Es ist mir gelungen, die Schmelzcurve des Phosphoniumchlorids über jene Linie hinaus, also ins hyperkritische Gebiet zu verfolgen. Krystalle sind also, wie es schon die Untersuchung der Kohlensäure[1]) wahrscheinlich machte, auch im hyperkritischen Zustandsgebiet realisirbar.

1) Wied. Ann. **68**. p. 569. 1899.

(Eingegangen 7. Juni 1901.)

## 4. *Zwei Zustandsdiagramme;* *von R. Hollmann und G. Tammann.*

(Hierzu Taf. I.)

In dieser Arbeit sind die Schmelz- und Umwandlungscurven zweier Stoffe, des Jodmethylens und der Essigsäure, mitgeteilt. Das Zustandsdiagramm des Jodmethylens giebt die nicht ganz einfachen Verhältnisse eines Stoffs, der im untersuchten Zustandsfelde tetramorph ist. Die Essigsäure ist in diesem Zustandsfelde dimorph.

Will man bei Aufstellung von realen Zustandsdiagrammen die Untersuchung auf grössere Stücke der $T, p$-Ebene ausdehnen, so ist man der stärkeren Drucke wegen auf Stahlgefässe angewiesen. Durch Verwendung dieser ist man verhindert, den Stoff während seiner Umwandlung bez. Schmelzung direct zu sehen und gezwungen, sich auf die Feststellung von Volumenänderungen zu beschränken. In diesem Umstande ist jedenfalls kein Mangel des früher eingehender beschriebenen Verfahrens zur genauen und einwandfreien Bestimmung von Gleichgewichtsdrucken bei constanter Badtemperatur zu sehen. Dagegen ist es schwierig, manchmal unmöglich, aus Aenderungen optischer Eigenschaften eines Stoffes, der sich in einem Glasrohr befindet, auf Zustandsänderungen zu schliessen. Noch schwieriger aber ist es unter solchen Umständen, bei constant erhaltenem Druck auch bei langsamer Temperaturänderung den Eintritt der Zustandsänderungen der Autopsie nach zu beurteilen. Auch wenn man hierbei sehr vorsichtig manipulirt, wie R. Bunsen zuerst vor 50 Jahren, so würde doch der Fehler einer Temperaturbestimmung auf einige 0,1 ° steigen können. Der Umstand, dass bei grösseren Drucken die Vacuolenbildung zwischen den einzelnen Krystallen, die uns unter ge-

wöhnlichen Bedingungen der Krystallisation das Krystallisirte vom Flüssigen so leicht zu unterscheiden ermöglicht, nicht eintritt, macht die manchem so erwünschte directe Beschauung des sich umwandelnden Stoffs recht wertlos.

Aber auch ausser der Bestimmung der Gleichgewichtsdrucke selbst hat man bei der Ausarbeitung von Zustandsdiagrammen, bei der der Stoff sich im Stahlgefäss der directen Besichtigung entzieht, noch einige Indicien, die das Diagramm zum Schluss unanfechtbar machen können.

1. Solange man es bei der Aenderung von $T$ und $p$ mit dem Gleichgewicht derselben Phasen zu thun hat, und der $dT/dp$-Wert der Gleichgewichtscurve sich nicht erheblich ändert, geht das Zurückfallen oder -steigen des Druckes, das durch die Volumenänderung bei der Zustandsänderung verursacht wird, mit fast derselben Geschwindigkeit vor sich, weil die bisher untersuchten Zustandsänderungen, auch wenn sie in der Umwandlung von verschiedenen Krystallen ineinander bestehen, sich nach Maassgabe des Wärmezuflusses oder Wärmeabflusses unter den gegebenen Bedingungen vollziehen. Eine erhebliche Aenderung der Geschwindigkeit, mit der die secundäre Druckänderung vor sich geht, weist also auf eine Aenderung mindestens einer der Phasen hin.

2. Auf den Wechsel einer Phase weist auch das Auftreten von Knicken in den Curvenstücken, welche die einzelnen bestimmten Zustandspunkte der Gleichgewichte verbindet, hin.

3. In einem solchen Knickpunkt treffen immer drei Gleichgewichtscurven ein, deren Lage der im vorigen Aufsatze abgeleiteten Regel entsprechen muss.

4. Schliesslich vervollständigt ein systematisches Absuchen des Zustandsfeldes nach weiteren Umwandlungscurven das Diagramm. Zu diesem Zweck wird bei verschiedenen Badtemperaturen sprungweise der Druck um 200—300 kg geändert, und nach jeder Druckänderung die ihr folgende secundäre Druckänderung für 5 Minuten notirt. Ist nach einer der willkürlichen Druckänderungen die secundäre Druckänderung bedeutend grösser als bei den übrigen, so ist nach dieser Druckänderung eine Zustandsänderung vor sich gegangen. Nach Auffindung eines Punktes der Gleichgewichtscurve ist es dann

gewöhnlich nicht schwer, die Gleichgewichtscurve dieser Zustandsänderung zu verfolgen. Bei diesem systematischen Verfahren können nur Zustandsänderungen mit sehr kleinen Volumenänderungen oder solche, die sich sehr langsam vollziehen, übersehen werden.

Zur Ausarbeitung solcher vollständiger Zustandsdiagramme gehört Zeit und ruhiges, systematisches Vorwärtsschreiten vom Bekannten zum Unbekannten. Die Untersuchung des Jodmethylens erforderte 400 Arbeitsstunden.

### Die Zustandsänderungen des Jodmethylens.

Die Menge des Jodmethylens betrug 100 g, dieselbe wurde in einem Glasgefäss unter Quecksilberabschluss in den Druckcylinder gebracht und von Quecksilber umgeben. Als druckübertragende Pumpenflüssigkeit diente über 0° Ricinusöl, unterhalb 0° wurde Toluol benutzt, weil das Ricinusöl bei −21° unter Drucken höher als 2000 kg krystallisirt, wobei eine im Verhältnis zur Krystallisationswärme grosse Volumencontraction eintritt.

Das Zustandsfeld zwischen −20° bis +60° und von 1 bis 3200 kg Druck wurde von 10 zu 10° nach Zustandsänderungen abgesucht. Die den gefundenen Zustandsänderungen entsprechenden Gleichgewichtsdrucke sind in der folgenden Tab. I, geordnet nach Gleichgewichtscurven, zusammengestellt. Neben den Gleichgewichtsdrucken finden sich die Differenzen der beiden Enddrucke, die sich einstellen, wenn bei constantem Volumen die Zustandsänderungen in verschiedenen Richtungen verlaufen, es sind die Grenzen, zwischen denen der Gleichgewichtsdruck liegt. Die mit einer Asteristik gekennzeichneten Coordinaten wurden in einem kleinen Druckapparat mit einem Doppelmanometer bis 500 kg bestimmt. Der Schmelzpunkt beim Druck 1 kg wurde mit einem in die Flüssigkeit eingesenkten Thermometer und die Umwandlungstemperatur bei 1 kg Druck nach dem dilatometrischen Verfahren mit Quecksilber als Hülfsflüssigkeit bestimmt.

## Tabelle I.

Schmelzcurve (01).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 5,73 | 1 | — |
| 7,11 | 84 | (10)* |
| 8,12 | 154 | (5) |

Schmelzcurve (02).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 9,12 | 208 | (8) |
| 10,12 | 242 | (20) |
| 15,12 | 482 | (0) |
| 20,13 | 750 | (0) |
| 25,11 | 1000 | (0) |
| 30,09 | 1271 | (2) |
| 35,05 | 1527 | (5) |
| 40,06 | 1820 | (0) |

Schmelzcurve (03).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 45,04 | 2140 | (10) |
| 55,01 | 2747 | (5) |
| 60,00 | 3045 | (10) |
| † 45,04 | 2134 | (2) |
| † 50,02 | 2450 | (2) |
| † 55,02 | 2750 | (0) |
| † 60,00 | 3055 | (0) |

Umwandlungscurve (14).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| −6,5 ±0,5 | 1 | — |
| 0,00 | 187 | (44)* |
| 3,10 | 257 | (10) |
| 4,10 | 265 | (50)* |
| 6,11 | 282 | (16) |
| 8,12 | 347 | (10) |

Umwandlungscurve (24).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 8,12 | 252 | (20) |
| 9,12 | 329 | (25)* |
| 15,12 | 700 | (60) |
| 20,13 | 1065 | (68) |
| 25,11 | 1332 | (65) |
| 30,09 | 1600 | (90) |
| 35,05 | 1745 | (60) |
| † 10,12 | 352 | (20) |
| † 15,12 | 695 | (20) |
| † 25,11 | 1317 | (5) |
| † 35,05 | 1775 | (40) |

Umwandlungscurve (34).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 40,06 | 2055 | (40) |
| 45,04 | 2375 | (10) |
| 47,53 | 2500 | (25) |

Umwandlungscurve (21).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 9,12 | 259 | (22)* |

Umwandlungscurve (23).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 40,06 | 1938 | (75) |
| † 40,06 | 1935 | (20) |

† Diese Coordinaten wurden an einem anderen Präparat, das denselben Schmelzpunkt bei $p = 1$ kg wie das erste hatte, bestimmt.

Es sind, wie aus der Tab. I ersichtlich, die Differenzen der Enddrucke bei Aufsuchung der Gleichgewichtsdrucke auf den Schmelzcurven bedeutend kleiner als auf den Umwandlungscurven, weil die secundären Druckänderungen dort schneller vor sich gehen als hier. Das hängt aber mit der Grösse der

Volumenänderung, die bei der Schmelzung viel grösser ist als bei den Umwandlungen, zusammen. Die Kolbenverschiebung[1]) bei der Schmelzung von 93,72 g Methylenjodid betrug 4,47 cm, der Anfangsdruck vor und nach der Schmelzung 300 kg und die Badtemperatur 10,1°. Bei derselben Badtemperatur betrug die Kolbenverschiebung bei der Umwandlung derselben Menge der Krystallart 4, in die Krystallart 2, beim Anfangs- und Enddruck von 400 kg 0,60 cm. Hieraus ergiebt sich, wenn während der Zustandsänderungen keine Filtrationsverluste im Kolben mit beweglichem Stempel stattfanden, $\Delta v$ pro 1 g für die Schmelzung von 2 zu 0,0284 ccm und für die Umwandlung von 4 in 2 zu 0,0038 ccm.

### Die Zustandsfelder.

Das Jodmethylen ist im untersuchten Zustandsgebiet tetramorph. Die Zustandsfelder, auf denen jede dieser vier Krystallarten absolut stabil ist, übersieht man auf Taf. I. Ausser diesen vier Krystallarten bilden sich in den Zustandsgrenzen des Diagrammes keine weiteren Krystallarten. Die Zustandsfelder dreier Krystallarten sind schmale Streifen, die sich zwischen den ausgebreiteten Zustandsfeldern der Flüssigkeit und der Krystallart 4 hinziehen. Infolge dessen schmilzt die Krystallart 4 nicht, ohne vorher einer Umwandlung sich unterzogen zu haben.

### Die Grenzen der Zustandsfelder.

1. Das Zustandsfeld der Krystallart 1 wird von ihrer Dampfspannungscurve, die für den gewählten Druckmaassstab mit der $T$-Axe zusammenfällt, von der Schmelzcurve (1, 0) und den Umwandlungscurven (1, 2) und (14) umgrenzt.

2. Das Zustandsfeld der Krystallart 2 wird von der Schmelzcurve (02) und den drei Umwandlungscurven (12), (24) und (23) umgrenzt.

3. Das Zustandsfeld der Krystallart 3 ist nicht vollständig umschrieben worden, seine bekannten Grenzen sind die Schmelzcurve (03) und die Umwandlungscurven (23) und (34).

4. Auch das Zustandsfeld der Krystallart 4 ist nur teilweise umschrieben worden. Seine bekannten Grenzen sind

1) Hierüber findet man Näheres in Ann. d. Phys. 3. p. 161. 1900.

die Dampfspannungscurve der Krystallart 4, die im Diagramm mit der $T$-Axe zusammenfällt, und die Umwandlungscurven (14), (24) und (34).

### Die Tripelpunkte.

Es sind sechs Tripelpunkte realisirt worden, in denen folgende Phasen bei folgenden Drucken und Temperaturen im Gleichgewicht sich befinden.

1. Bei einem Druck von einigen 0,0001 kg und der Temperatur 5,71° sind im Gleichgewicht der Dampf, die Flüssigkeit und die Krystallart 1.

2. Bei einem noch kleineren Druck und der Temperatur −6,5° ist der Dampf im Gleichgewicht mit den Krystallarten 1 und 4.

3. Bei dem Druck 210 kg und der Temperatur 9,1° ist die Flüssigkeit im Gleichgewicht mit den Krystallarten 1 und 2.

4. Bei einem etwas höheren Druck, 360 kg und der Temperatur 10,0°, sind die Krystallarten 1, 2 und 4 miteinander im Gleichgewicht.

5. Beim Druck 1790 kg und der Temperatur 43,1° sind im Gleichgewicht die Flüssigkeit und die Krystallarten 2 und 3.

6. Beim Druck 2020 kg und der Temperatur 35,5° sind die Krystallarten 2, 3 und 4 miteinander im Gleichgewicht.

Die Kenntnis der Lage dieser Tripelpunkte genügt, um das Diagramm in seinen Hauptzügen zu entwerfen, bei der Ausarbeitung des Diagrammes ergiebt sich aber die Lage der Tripelpunkte fast ganz zuletzt. Die Lage der Gleichgewichtscurven in den Tripelpunkten entspricht, wovon man sich durch Besichtigung des Diagrammes überzeugen kann, der Regel, welche fordert, dass die Verlängerung einer Gleichgewichtscurve absoluter Stabilität zwischen zwei Grenzcurven absoluter Stabilität fällt. Nur von einer der Gleichgewichtscurven ist ein Stück, das nicht absolut stabilen Gleichgewichten entspricht, realisirt worden, nämlich das über dem Tripelpunkt 124 verlängerte Stück der Umwandlungscurve (24).

### Die Umwandlungen bei Druckänderungen.

Erniedrigt man den Druck, beginnend von einem Druck, unter dem die Krystallart 4 absolut stabil ist, so verdampft bei genügender Druckerniedrigung dieselbe unterhalb −6,5°,

ohne vorher eine Zustandsänderung erlitten zu haben. Oberhalb dieser Temperatur treten aber vor der Verdampfung von $-6{,}5$—$5{,}7$ eine, in einem grossen Temperaturintervall von $5{,}7$—$65^0$ zwei Zustandsänderungen, eine Umwandlung und die Schmelzung, aber zwischen den Temperaturen 35—43° und zwischen 8 und 9° drei Zustandsänderungen ein. Erniedrigt man zwischen 8,0 und 9,1° den Druck unter den der Umwandlungscurve (14), so bilden sich spontan in den Krystallen 4 nicht Kerne der Krystallart 1, sondern die der Krystallart 2, obwohl man sich im Gebiet absolut stabiler Zustände der Krystallart 1 befindet; wird dann der Druck unter die Fortsetzung der Umwandlungscurve (24) erniedrigt, so tritt erst jetzt die Bildung der Krystallart 1 ein, in die sich bei weiterer Druckerniedrigung zwischen 9,0 und 9,5° die Krystallart 2 umwandelt, um dann schliesslich zu schmelzen. Bewegt sich der Druck bei steigender Temperatur, während die Phasen 1 und 4 vorhanden sind, auf der Umwandlungscurve (14), so können auch oberhalb 8° die dieser Curve entsprechenden Gleichgewichte realisirt werden.

### Die Gestalt der Gleichgewichtscurven.

Ein Teil der Gleichgewichtscurven ist so kurz, dass zur Feststellung ihrer Krümmung viel genauere Messungen ihrer Coordinaten nötig wären, diese Curven und ihre Gleichungen sind:

$$(01)\ + = 5{,}73 + 0{,}0164\,p,$$
$$(12)\ + = 8{,}10 + 0{,}0127\,(p - 210),$$
$$(23)\ + = 35{,}5 + 0{,}033\,(p - 1790).$$

Zwei der Gleichgewichtscurven sind nicht genügend weit verfolgt worden, um ihre Krümmung ermitteln zu können, es sind:

$$(03)\ + = 43{,}1 + 0{,}0163\,(p - 2020),$$
$$(34)\ + = 35{,}5 + 0{,}0168\,(p - 1790).$$

Die Umwandlungscurven (14) und (24) krümmen sich zur $T$-Axe. Diese Krümmung ist bisher nur bei der Umwandlungscurve des Schwefels und einer des Ammoniumnitrats gefunden worden. Die Umwandlungscurve des Schwefels konnte durch die Gleichung

$$p = \frac{R}{\Delta v} \log \text{nat} \frac{T}{T_0},$$

wo der Quotient $R/\Delta v$ auf der Umwandlungscurve unveränderlich ist, weil es sowohl $R$ als auch $\Delta v$ sind[1]), dargestellt werden. Auch die Umwandlungscurve (14) kann durch denselben Ausdruck

$$p = 15888 \log \frac{T}{266{,}5}$$

wiedergegeben werden. Allerdings sind die Abweichungen zwischen den berechneten und gefundenen Drucken etwas grösser als die Grenzen der einzelnen Gleichgewichtsdrucke, doch ist die Umwandlungstemperatur beim Druck 1 kg nicht genügend sicher bekannt, um in dieser Angelegenheit zu einer sicheren Entscheidung zu kommen.

Auch die Gleichgewichtsdrucke der Curve (24) können bis 27° durch eine ähnliche Formel dargestellt werden,

$$p - 364 = 43746 \log \frac{T}{283{,}0}.$$

Doch versagt die Formel bei höheren Temperaturen. Da eine weitere Umwandlungscurve, welche die schnelle Aenderung der Richtung der Curve (24) zwischen 25 und 30° auf das Auftreten eines Tripelpunktes zurückführen könnte, nicht gefunden wurde, so ist wohl anzunehmen, dass auf dieser Curve $\Delta v/R$ anfangs unverändert bleibt, aber über 25° abzunehmen beginnt. Schliesslich ist für die Schmelzcurve (02) die diesen Curven eigentümliche Krümmung zur Druckaxe im Diagramm deutlich ersichtlich. Die Formel

$$t - 9{,}12 = 0{,}0210\,(p - 208) - 0{,}000001\,15\,(p - 208)^2$$

giebt den anfänglichen Verlauf der Schmelzcurve bei 25° wieder.

### Die Zustandsänderungen der Essigsäure.

Die Resultate einer früheren Untersuchung der Essigsäure sind nur bis zum Druck von 1200 kg richtig. Die Punkte im Diagramm (Taf. I) geben die früheren Bestimmungen. Bei höheren Drucken sind ganz unrichtige Resultate erhalten worden, was verursacht wurde durch teilweise Mischung von Essigsäure mit Maschinenöl, die nach dem Bruch des Glas-

1) Ann. d. Phys. 3. p. 178. 1900.

gefässes, in dem sich die Essigsäure befand, eintrat. Die Lage der damals fälschlich gefundenen Gleichgewichtscurven *b* und *c* widerspricht der möglichen Lage solcher Curven im Tripelpunkt, daher war die wiederholte Untersuchung der Essigsäure, deren Resultate man in folgender Tab. II findet, längst geplant worden.

Bei den Temperaturen −21, 0, 10, 20, 40, 46, 48, 55 und 65° wurde das Zustandsfeld bis zu Drucken von 3000 kg nach weiteren Zustandsänderungen abgesucht, jedoch ohne auf andere als die durch die beiden Schmelzcurven und die Umwandlungscurve gegebene zu stossen.

Tabelle II.

Schmelzcurve (01).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 16,65 | 1 | — |
| 24,92 | 393 | (0) |
| 35,05 | 898 | (0) |
| 40,06 | 1178 | (0) |
| 45,02 | 1488 | (20) |
| 48,02 | 1677 | (25) |
| 50,03 | 1815 | (10) |
| 55,01 | 2160 | (20) |

Schmelzcurve (02).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| 60,00 | 2500 | (0) |
| 64,99 | 2835 | (0) |
| 69,98 | 3210 | (40) |
| 70,00 | 3207 | (35) |

Umwandlungscurve (12).

| $t_{cor.}$ | $p_{cor.}$ kg pro 1 qcm | |
|---|---|---|
| −71,0 | 1 | — |
| −20,7 | 765 | (85) |
| 0,00 | 1145 | (25) |
| 10,01 | 1333 | (70) |
| 19,94 | 1558 | (40) |
| 29,91 | 1745 | (30) |
| 40,06 | 1965 | (30) |
| 45,02 | 2049 | (42) |
| 48,02 | 2117 | (45) |
| 50,03 | 2170 | (20) |
| 55,01 | 2280 | (20) |

Die Essigsäure ist im Zustandsfelde von 0—70° und von 1—3000 kg dimorph. Es treten hier zwei Tripelpunkte auf, der eine bei einem sehr kleinen Druck bei 16,65°, in dem der Essigsäuredampf mit der Flüssigkeit und der Krystallart 1 im Gleichgewicht ist, und der andere bei 57,5° und 2330 kg, in dem flüssige Essigsäure mit den Krystallarten 1 und 2 im Gleichgewicht ist. Die Umwandlungscurve lässt sich von 57,5 bis 0° durch eine gerade Linie darstellen, deren Gleichung

$$p = 2330 - 20{,}9\,(57{,}5 - t)$$

ist. Die beiden unterhalb 0° bestimmten Umwandlungspunkte bei −20,7° und 765 kg und bei −71,0° und 1 kg, von denen der letztere dilatometrisch bestimmt wurde, gehören aller Wahrscheinlichkeit anderen Umwandlungen als denen, welche die Umwandlungscurve zum Ausdruck bringt, an.

Die Schmelzcurve (02) ist nicht genügend weit verfolgt worden, um ihre Krümmung mit Sicherheit beurteilen zu können, die Gleichung

$$t = -57{,}5 + 0{,}0146\,(p - 2330)$$

giebt ihren anfänglichen Verlauf. Die Schmelzcurve (01) krümmt sich wie gewöhnlich zur Druckaxe, die Gleichung

$$16{,}65 + 0{,}0220\,p - 0{,}000001\,97\,p^2$$

giebt ihren allgemeinen Verlauf wieder.

Dorpat, im Mai 1901.

(Eingegangen 7. Juni 1901.)

## 5. *Der Temperaturcoefficient der Susceptibilität einiger Salzlösungen der Eisengruppe, mit besonderer Berücksichtigung des Eisenchlorids*[1]; *von Hugo Mosler.*

Zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten der Susceptibilität von Salzlösungen bestehen im wesentlichen zwei Versuchsanordnungen, die Torsionsmethode von G. Wiedemann[2]) und die Steighöhenmethode von Quincke[3]), nach der mit teilweisen Verbesserungen in neuerer Zeit von Jäger und Meyer[4]) Messungen der Susceptibilität ausgeführt wurden.

Die von den beiden letztgenannten Forschern gefundenen Resultate bezüglich der Temperaturcoefficienten von Salzlösungen der Eisengruppe schwanken unabhängig von der Concentration zwischen den Werten $-0{,}00219$ bis $-0{,}00305$, nur ausnahmsweise wurde für eine 18 proc. Nickelnitratlösung $\alpha = -0{,}00322$ berechnet. Hingegen wurden die Werte für den Temperaturcoefficienten von Plessner[5]), der speciell nach der Wiedemann'schen Methode arbeitete, für alle Salze und Concentrationen fast gleich gross $= -0{,}00356$ angegeben.

Aus diesem Grunde forderte mich der inzwischen verstorbene Geheimrat Wiedemann auf, zu untersuchen, ob die von Plessner oder die von Jäger und Meyer[6]) gefundenen Zahlen der Wahrheit näher kommen.

Da die Möglichkeit vorlag, dass diese Unterschiede durch Fehler in der Wiedemann-Plessner'schen Methode bedingt waren, so habe ich auf Anregung des Geheimrat Wiedemann

1) Auszug aus einer Leipziger Inaugural-Dissertation.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **126.** p. 1. 1865.

3) G. Quincke, Wied. Ann. **24.** p. 347. 1885.

4) G. Jäger u. St. Meyer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **106.** p. 594. 1897.

5) P. Plessner, Wied. Ann. **39.** p. 343. 1890.

6) G. Jäger u. St. Meyer, l. c.

diese Versuchsanordnung benutzt mit einigen später zu beschreibenden Modificationen.

Die Wiedemann-Plessner'sche Methode bestand im wesentlichen darin, dass ein Elektromagnet, welcher horizontal lag, auf das mit der zu untersuchenden Lösung gefüllte Kölbchen ein Drehmoment ausübte. Das Gefäss mit der Lösung war nämlich durch einen Arm mit einem vertical hängenden Neusilberdraht verbunden, dessen Torsion dem Drehmoment im Magnetfelde entgegen wirkte. Dieses Kölbchen bewegte sich frei in einem Thermostaten und war gegen Luftströmungen, welche bei der Erwärmung im Innern des Kastens entstanden, nicht geschützt, ein Umstand, der zu schwer controlirbaren Fehlern Anlass gab. Eine weitere, wenn auch nicht so beträchtliche Fehlerquelle lag in den elastischen Nachwirkungen des Neusilberdrahtes.

Aus diesem Grunde wurde der in vorliegender Arbeit benutzte Torsionsapparat so construirt, dass die in ihm befindliche Luft ausgepumpt werden konnte, sodass Convectionsströme bei Erwärmung vollkommen ausgeschlossen waren. Das Gefäss selbst war bifilar aufgehängt, wodurch die durch elastische Nachwirkung bewirkte Fehlerquelle auf ein Minimum herabgedrückt worden.

Im übrigen glich der Apparat dem von Lutteroth[1]) bei seinen Untersuchungen über die Abhängkeit der Magnetisirbarkeit der Krystalle benutzten.

Zunächst musste das Gefäss zur Aufnahme der Lösungen in erster Linie möglichst leicht construirt werden, da bei der bifilaren Aufhängung mit Vermehrung des Gewichtes die Empfindlichkeit abnimmt.

Ferner musste der Beobachtungsspiegel fest mit dem Gefäss verbunden sein und sich ca. 150 mm ausserhalb der Kraftlinien befinden.

Diese starre Verbindung wurde durch einen ca. 160 mm langen und 1 mm starken Glasstab erreicht, der mit dem Kölbchen verschmolzen war.

Am geeignetsten für diese Messungen erwies sich die in Fig. 1 abgebildete Gefässform.

---

1) A. Lutteroth, Wied. Ann. **66.** p. 1085. 1898.

Das Gefäss *A*, welches die Lösung aufnimmt, sitzt an einem Arm *B*, der mit dem Glasstabe *C* verschmolzen ist. Das Kölbchen selbst ist ca. 20 mm lang, 15 mm hoch und 4 mm dick und aus möglichst dünnwandigem Glase gefertigt und enthält ca. 1,3 ccm der Lösung.

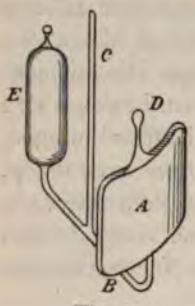


Fig. 1.

Der Abstand des Gefässes vom Glasstabe, zu dem es concentrisch gebogen ist, beträgt 16 mm. Zum Füllen ist auf das Kölbchen eine ca. 10 mm lange Spitze *D* aufgesetzt, welche nachher, um ein Verdampfen der Flüssigkeit zu vermeiden, zugeschmolzen wird. Damit der Glasstab *C* vertical hängt, musste noch ein Gegengewicht *E* angebracht werden, welches aus einem cylindrischen, mit Wasser gefüllten Kölbchen bestand. Eine bemerkenswerte Fehlerquelle entstand hierdurch nicht, da sich das Gefäss *A* direct vor der Stirnfläche des Elektromagneten befand, und weil auf das fast ausserhalb des Kraftlinienverlaufes befindliche Gegengewicht, das an sich nur eine geringe Susceptibilität hat, so gut wie gar keine magnetische Wirkung ausgeübt wird. Jene Kölbchen wurden mit dem Glasstabe *C* in eine Bifilaraufhängung des Lutteroth'schen Torsionsapparates eingehängt.

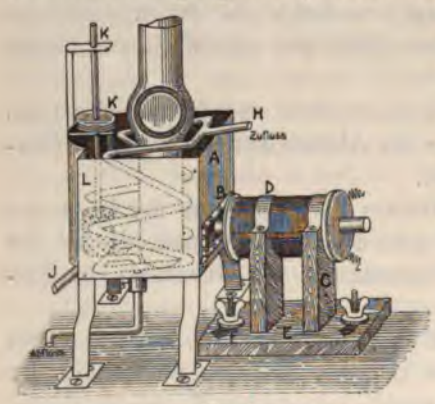


Fig. 2.

Der Torsionsapparat selbst befand sich in einem Thermostaten *A* (Fig. 2), welcher mit einem rechteckigen, durch eine Gummimembran verschlossenen Ausschnitt *B* versehen ist; der Elektromagnet *D* konnte durch letzteren dem Kölbchen mit der Lösung möglichst genähert werden.

Ein grösserer Behälter mit siedendem Wasser war erhöht aufgestellt und durch einen Schlauch mit dem Zickzackrohre *H* verbunden. Auf das untere Ende desselben war ein Schlauch

gesteckt, der mittels eines Quetschhahnes verschlossen werden konnte, und welcher gleichzeitig eine genaue Regulirung der durchfliessenden Wassermenge gestattete.

Auf diese Weise konnte man bei einiger Uebung unbeabsichtigte Temperaturschwankungen gänzlich vermeiden, sodass die Temperatur des Bades mit Leichtigkeit ca. 45 Minuten lang bis auf $^1/_{10}{}^0$ C. constant gehalten werden konnte.

Vorversuche hatten ergeben, dass plötzliche Temperaturänderungen von 0° bis 40° im Untersuchungsgefäss nach Verlauf von 30 Minuten sich ausgeglichen hatten, sodass jenes dann bestimmt die Temperatur des Bades besass. Aus diesem Grunde wurde daher mit den Beobachtungen stets $^1/_2$ Stunde lang gewartet, wenn Aenderungen in der Temperatur desselben vorgenommen wurden.

Die Grenzen der Temperaturintervalle, innerhalb welcher sich die Untersuchungen bewegten, waren 0° und 40° C.

Bei höheren Temperaturen wurde nicht untersucht, um vor durch weitere Erwärmung eintretende Dissociation sicher zu sein, welche nach Angaben von G. Wiedemann[1]) bei Eisenchloridlösungen bei einer Temperatur von 60° sich bereits bemerkbar macht.

Bei 0° C. wurden die Beobachtungen begonnen, dann weiter in der Regel bei 26,6° und 40° Ablesungen gemacht und hierauf bei absteigender Temperatur bei 13,3° und dann nochmals bei 0° gemessen, sodass stets vollkommen geschlossene Beobachtungsreihen vorliegen. Die eigentlichen Messungen wurden in der Weise ausgeführt, dass, nachdem die Temperatur im Thermostaten hinreichend lange constant gehalten war, der Stromkreis geschlossen wurde, in welchem sich der Elektromagnet, eine Accumulatorenbatterie und ein variabler Zusatzwiderstand befanden.

Alsdann regulirte man mittels jenes Widerstandes ein Magnetometer auf einen bestimmten Punkt der ca. 3 m von ihm entfernt aufgestellten Scale und stellte dann mittels eines Torsionskopfes[2]) vom Platze des Beobachters aus das Untersuchungsgefäss auf eine bestimmte Lage zu den Kraftlinien ein; in der Regel wurde bei geschlossenem Stromkreise das Fadenkreuz im Beobachtungsfernrohr auf den Teilstrich 100 der Scale

1) G. Wiedemann, Wied. Ann. 5. 1878.
2) G. Wiedemann, Lehre von der Elektricität 3. p. 850. 1883.

eingestellt; diese Einstellung wurde innerhalb einer Versuchsreihe stets unverändert beibehalten, sodass die Lösung sich stets im selben magnetischen Felde befand. Wurde jetzt der Stromkreis geöffnet, so drehte sich die Ebene des Beobachtungsspiegels um einen gewissen Winkel, welcher der magnetischen Anziehung proportional war.

Da sich bei der Erwärmung des Wasserbades die Feldstärke zunächst änderte, wurde sie magnetometrisch controlirt und mittels jenes variablen Zusatzwiderstandes wieder auf den alten Wert gebracht.

Bei jeder beobachteten Temperatur wurden in der Regel vier Ablesungen gemacht und von diesen dann der Mittelwert genommen, von dem jedoch noch der aus einer Correctionstabelle mit Rücksicht auf die Bifilaraufhängung entnommene Betrag in Abrechnung zu bringen ist.

Im Folgenden sei eine Versuchsreihe mitgeteilt, welche zur Genüge zeigt, mit welcher Genauigkeit die Einstellung durch den Torsionskopf bei geschlossenem Stromkreise erfolgen kann, und welche den geringen Unterschied der einzelnen beobachteten Ausschläge bei geöffnetem Strome erkennen lässt.

$T = 0°$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bei geöffnetem Strom . . | 268,3 | 268,5 | 268,2 | 268,5 |
| Bei geschlossenem Strom . | 100 | 100 | 100 | 100 |
| Differenz . . . . . | 168,3 | 168,5 | 168,5 | 168,5 |

$s\,(0) = 168{,}4$.

Laut Correctionstabelle: $-0{,}3$ $s\,(0) = 168{,}1$.

$T = 26{,}6°$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bei geöffnetem Strom . . | 258,5 | 258,6 | 258,3 | 258,4 |
| Bei geschlossenem Strom . | 100 | 100 | 100 | 100 |
| Differenz . . . . . | 158,5 | 158,6 | 158,3 | 158,4 |

$s\,(20{,}6) = 158{,}4$.

Laut Correctionstabelle: $= 0{,}3$ $s\,(26{,}6) = 158{,}1$.

$T = 40°$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bei geöffnetem Strom . . | 252,2 | 252,4 | 252,3 | 252,5 |
| Bei geschlossenem Strom . | 100 | 100 | 100 | 100 |
| Differenz . . . . . | 152,2 | 152,4 | 152,3 | 152,5 |

$s\,(40) = 152{,}4$.

Laut Correctionstabelle: $-0{,}2$ $s\,(40) = 152{,}2$.

$T = 13{,}3°$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bei geöffnetem Strom . . | 263,9 | 263,8 | 263,7 | 264,0 |
| Bei geschlossenem Strom . | 100 | 100 | 100 | 100 |
| Differenz . . . . . | 163,9 | 163,8 | 163,7 | 164,0 |

$s\,(13{,}3) = 163{,}9$.

Laut Correctionstabelle: $-\,0{,}3$ $s\,(13{,}3) = \mathbf{163{,}6}$.

$T = 0°$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bei geöffnetem Strom . . | 268,7 | 268,4 | 268,6 | 268,4 |
| Bei geschlossenem Strom . | 100 | 100 | 100 | 100 |
| Differenz . . . . . | 168,7 | 168,4 | 168,6 | 168,4 |

$s\,(0) = 168{,}5$.

Laut Correctionstabelle: $-\,0{,}3$ $s\,(0) = \mathbf{168{,}2}$.

Der Mittelwert für den Temperaturcoefficienten wurde hieraus auf graphischem Wege festgestellt; bei jeder Concentration wurden zwei weitere derartige Versuche bei geänderter Feldstärke noch ausgeführt.

Zur Untersuchung gelangten wässerige Lösungen von Eisenchlorid, Nickelsulfat, Mangansulfat, Kobaltnitrat und Eisennitrat. Die Salze wurden als „chemisch rein" teilweise von der chemischen Fabrik von Kahlbaum und von Schering in Berlin bezogen, ein Unterschied in den Resultaten bei gleichzeitiger Untersuchung beider Bezugsquellen war nicht zu constatiren.

Mein Freund Dr. Reckleben, als Chemiker von Beruf, hatte die grosse Liebenswürdigkeit, die Herstellung der Lösungen zu übernehmen und auf chemisch-analytischem Wege den Procentgehalt derselben zu bestimmen. Für die Bereitwilligkeit, mit welcher derselbe sich dieser Arbeit unterzogen hatte, spreche ich ihm an dieser Stelle nochmals meinen herzlichsten Dank aus.

Unter dem Procentgehalt sind Volumengewichtsprocente zu verstehen auf wasserfreies Salz bezogen. Im Folgenden seien in tabellarischer Uebersicht der Mittelwert des Temperaturcoefficienten der untersuchten Lösungen, aus je drei Beobachtungen berechnet, mitgeteilt.

A. Eisenchloridlösungen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10,3 Proc. | $\alpha = 0{,}00268$ | 33,1 Proc. | $\alpha = 0{,}00358$ |
| 23,0 „ | $\alpha = 0{,}00267$ | 37,0 „ | $\alpha = 0{,}00306$ |
| 28,5 „ | $\alpha = 0{,}00277$ | 38,5 „ | $\alpha = 0{,}00277$ |
| 29,8 „ | $\alpha = 0{,}00339$ | 43,3 „ | $\alpha = 0{,}00261$ |
| 29,9 „ | $\alpha = 0{,}00337$ | | |

Eine graphische Darstellung des Temperaturcoefficienten als Function der Concentration zeigt nachstehende Fig. 3.

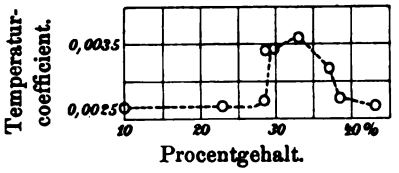



Fig. 3.

Wie hieraus ersichtlich ist, liegt anscheinend ein Maximum des Coefficienten bei einer Concentration von 33,1 Proc., das zwischen den Lösungen von 28,5 Proc. und 38,5 Proc. besteht, worauf alsbald näher eingegangen werden soll.

| B. Eisennitratlösungen. | D. Mangansulfatlösungen. |
|---|---|
| 12,1 Proc. $\alpha$ IV = 0,00273 | 13 Proc. $\alpha$ IV = 0,00288 |
| 16,4 „ $\alpha$ III = 0,00287 | 23 „ $\alpha$ III = 0,00261 |
| 21,2 „ $\alpha$ II = 0,00286 | 30,1 „ $\alpha$ II = 0,00259 |
| 28,2 „ $\alpha$ I = 0,00287 | 40,2 „ $\alpha$ I = 0,00255 |
| **C. Kobaltnitratlösungen.** | **E. Nickelsulfatlösungen.** |
| 9,9 Proc. $\alpha$ IV = 0,00276 | 14,8 Proc. $\alpha$ IV = 0,00295 |
| 20,0 „ $\alpha$ III = 0,00283 | 23,5 „ $\alpha$ III = 0,00256 |
| 27,6 „ $\alpha$ II = 0,00265 | 28,9 „ $\alpha$ II = 0,00292 |
| 37,7 „ $\alpha$ I = 0,00269 | 30,8 „ $\alpha$ I = 0,00284 |

Die einzelnen Temperaturcoefficienten zeigen mit Ausnahme vom Eisenchlorid bei den verschiedenen Lösungen desselben Salzes nur geringere unregelmässige Schwankungen in ihren Werten, die zum Teil wohl innerhalb der Fehlergrenze liegen, sodass hieraus auf eine gesetzmässige Abhängigkeit des $\alpha$ von der Concentration, wie gleichfalls Jäger und Meyer[1]) behaupten, nicht zu schliessen ist. Beim Eisenschlorid scheint indessen ein gesetzmässiges Maximum für die Werte des Coefficienten vorzuliegen und zwar fällt dasselbe auf eine Concentration von ca. 33 Proc.

Um vor etwaigen Beobachtungsfehlern sicher zu sein, wurden die Beobachtungen mit den Concentrationen, welche die höheren Werte von $\alpha$ lieferten, mit ganz neu dargestellten

1) G. Jäger u. St. Meyer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **106.** p. 622. 1897.

Lösungen wiederholt; gleichzeitig wurden, nachdem nach den ersten Versuchen dreiviertel Jahre verflossen waren, verschiedene Angaben noch einmal controlirt und zwar mit demselben Resultate wie früher, sodass hierin ein Beweis für die Zuverlässigkeit des Apparates liegt.

Die somit zweifellos festgestellte Inconstanz des Temperaturcoefficienten und der auffallende Verlauf seiner scheinbaren Abhängigkeit von der Concentration der Lösung bewog mich, nach analogen Abhängigkeiten anderer physikalischer Eigenschaften dieser Lösungen zu suchen, und zwar wurde untersucht die relative Magnetisirbarkeit, das elektrische Leitvermögen und die Gefrierpunktserniedrigung.

Zunächst wurde untersucht, ob in den relativen Werten der Magnetisirbarkeit der einzelnen Eisenschloridlösungen entsprechende Abweichungen wie bei den Temperaturcoefficienten auftreten.

Mit dem bereits beschriebenen Apparate waren diese Versuche ohne weiteres nicht durchführbar, da das mit einer neuen Lösung gefüllte Kölbchen stets beim Hineinsetzen an die alte Stelle im magnetischen Felde kommen musste.

Aus diesem Grunde wurde nebenstehender Apparat construirt (Fig. 4).

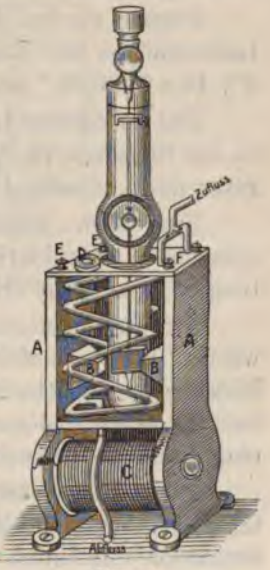


Fig. 4.

An den Elektromagnet *C* sind zwei gusseiserne Platten *A* angebracht, an denen sich die Polschuhe *B* befinden.

Die Platten *A* bilden gleichzeitig die Wände eines Thermostaten, dessen Wärmeregulirung wieder durch Zickzackrohre geschieht. In den Deckel *F* ist der gläserne Torsionsapparat eingekittet, in welchem an einer Bifilaraufhängung ein mit einem Glasstabe verschmolzenes parallelopipedisch geformtes Glasgefäss mit der zu untersuchenden Salzlösung angebracht ist.

Der Deckel *F* hat in den Ansätzen *E* eine genaue Führung, die Libelle *D* gestattet ausserdem noch eine zuverlässige Justirung des ganzen Apparates.

An den obersten Schliff, der zwecks Auswechselung der Salzlösungen geöffnet werden muss, ist noch ein Spiegel angebracht, sodass man mittels Scale und Fernrohr den Schliff beim Einsetzen stets an die alte Stelle wieder bringen kann.

Die Ausführung der Beobachtungen geschah in derselben Weise wie bei der Bestimmung der Temperaturcoefficienten, die verschiedenen Eisenchloridlösungen wurden hintereinander zunächst bei 0° und später bei 40° untersucht. Die hierbei gefundenen Werte der relativen Magnetisirbarkeit liegen auf schwach zur Abscissenaxe gekrümmten Curven, zeigen aber in der Nahe der Concentration mit maximalem Temperaturcoefficienten keine auffallenden Abweichungen, woraus sich ergiebt, dass die Genauigkeit der Beobachtungen zur Erkennung dieser Feinheiten nicht ausreicht.

Ferner wurden das specifische und moleculare elektrische Leitvermögen der Eisenchloridlösungen bei den Temperaturen 0°, 19,8°, 39,85° und 59,8° ermittelt.

Das specifische Leitvermögen zeigt ein Maximum, welches in der Nähe von 23 Proc. liegt, und sich mit steigender Temperatur nach höheren Concentrationen verschiebt.

Eine dem Maximum des Temperaturcoefficienten entsprechende charakteristische Abweichung lassen diese Beobachtungen indes nicht erkennen.

Bei der molecularen Leitfähigkeit fällt das Maximum, welches beim specifischen Leitvermögen besteht, fort, und es bilden sich zur Abscissenaxe schwach convexe Curven, welche bei den verschiedenen Temperaturen annähernd parallel zu einander ohne bemerkenswerte Abweichungen verlaufen.

Desgleichen nimmt der Temperaturcoefficient der Leitfähigkeit, ohne ein Maximum zu zeigen, mit steigender Concentration allmählich zu.

Auch die Abhängigkeit der Gefrierpunktserniedrigung von der Concentration zeigt, wie nachstehende Fig. 5 erkennen lässt, keine Analogie zu den Abweichungen der magnetischen Temperaturcoefficienten.

Zur Erklärung der Unregelmässigkeiten der magnetischen Temperaturcoefficienten kommt vielleicht die Hydrolyse der Eisenchloridlösungen in Betracht, in dem sich colloidales Eisen-

hydroxyd und Salzsäure bildet. Bereits G. Wiedemann[1]) hatte festgestellt, dass $FeCl_3$-Lösungen, welche stark hydroxydhaltig waren, einen geringeren Temperaturcoefficienten wie stark saure zeigten.

Das früher beobachtete Maximum für die Abnahme des Magnetismus liesse sich demnach durch die Annahme erklären, dass bei den betreffenden Concentrationen eine geringere Hydrolyse eintritt. Demnach müsste man doch wohl einen ähnlichen Einfluss auf das Verhalten der elektrischen Leitfähigkeit erwarten, der aber thatsächlich nicht beobachtet wurde.

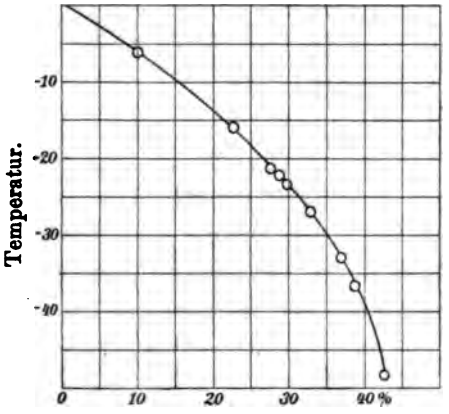



Fig. 5.

Um zunächst das Auftreten der Hydrolyse zu beseitigen, wurden Lösungen des wasserfreien Salzes in absolutem Alkohol und wasserfreiem Aether hergestellt, leider war aber die Löslichkeit eine derartig geringe, dass es unmöglich war, Lösungen innerhalb des interessanten Gebietes von 28,5 Proc. bis 38,5 Proc. anzufertigen. Ferner trat hierbei noch der Umstand störend auf, dass das Eisenchlorid in der alkoholischen Lösung das Lösungsmittel zu Aethylaldehyd oxydirte, wodurch neue Complicationen entstanden.

Endlich kann man sich die Frage vorlegen, wie die Curven, welche die Abhängigkeit der Susceptibilität von der Concentration zeigen, etwa verlaufen müssten, damit aus ihnen die Anomalie

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 126. p. 25. 1865.

im Verhalten des Temperaturcoefficienten folgen würde. Diese Frage besitzt natürlich keine eindeutige Lösung.

Die Fig. 6 veranschaulicht eine mögliche Lösung.

Dabei sind *A* und *B* die Curven der Susceptibilität bei einer Temperatur $T_0$ und $T_t$. Die Curve *A* habe bei *C* eine geringe Ausbuchtung nach der Abscissenaxe zu.

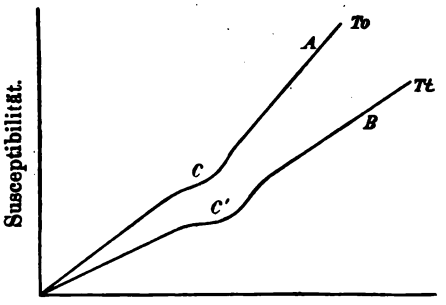



Fig. 6.

Macht man nun die Annahme, dass bei der höheren Temperatur $T_t$, wie bei der Leitfähigkeit die Ausbuchtung *C'* zunimmt und sich nach grösseren Concentrationen hin etwas verschiebt, so muss demnach ein allmähliches Anwachsen und Abfallen der Temperaturcoefficienten auftreten. Denn bezeichnet man die der Curve *A* angehörigen Magnetisirungszahlen mit $s_0$, die der Curve *B* mit $s_t$, so tritt bei der Berechnung des Temperaturcoefficienten

$$\alpha = \frac{s_0 - s_t}{t \cdot s_0},$$

da $s_0 - s_t$ infolge der Ausbuchtung ansteigt und wieder abfällt, ein Maximum des magnetischen Temperaturcoefficienten auf, wie es thatsächlich beobachtet wurde.

Dass die Ausbuchtungen *C* und *C'* bei der Untersuchung der relativen Magnetisirbarkeit nicht zu erkennen sind, ist wohl lediglich dem Umstande zuzuschreiben, dass die Grenze der Beobachtungsfehler eine verhältnismässig grosse ist, welche demnach nur den Verlauf der Susceptibilität angenähert zeigt.

Wie aus vorstehender Arbeit ersichtlich ist, zeigen die für den Temperaturcoefficienten des Magnetismus gefundenen Werte eine sehr erfreuliche Uebereinstimmung mit den Resul-

taten von Jäger und Meyer, demnach scheint die Annahme gerechtfertigt zu sein, dass die Plessner'schen Angaben etwas zu hoch sind, der Grund hierfür mag wohl in der Störung durch Convectionsströme, wie in der nur mässigen Empfindlichkeit des benutzten Apparates liegen. Jedenfalls ist hierdurch gezeigt worden, dass die empfindlicher gemachte Wiedemann'sche Methode trotzdem zur genauen Bestimmung des Temperaturcoefficienten benutzt werden kann, wenngleich die Quincke'sche Steighöhenmethode, was Bequemlichkeit anbelangt, ihr entschieden vorzuziehen ist.

An dieser Stelle unterziehe ich mich nochmals gerne der Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Wiener, welcher nach dem Tode des Hrn. Geheimrat Wiedemann in liebenswürdigster Weise die Weiterführung der Untersuchungen leitete, für die mir jederzeit bereitwilligst erteilten Ratschläge meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Desgleichen bin ich Hrn. Prof. Dr. Wiedeburg zu grossem Danke verpflichtet für die mir ebenfalls von seiner Seite zu teil gewordene reichliche Unterstützung.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 30. Mai 1901.)

## 6. *Ueber die durch elektrische Spitzenentladung erzeugten Curven;*
## *von Rudolf H. Weber.*

In einer Arbeit „Les tourbillons et les projections de l'éter“ [1]) beschreibt Hr. De Heen folgenden interessanten Versuch. Eine Harzplatte wird elektrisirt und kurze Zeit der Einwirkung von um sie herum symmetrisch angeordneten Bunsenflammen ausgesetzt. Bestreut man nun die Platte mit Schwefelpulver, so ordnet dieses sich in eigentümlichen aus geraden Linien gebildeten Figuren an. Die Erscheinung ist infolge der scharfen Linien sehr überraschend. Der Erklärung aber, die Hr. de Heen giebt, indem er ein Zusammenfegen der Elektricität auf der Platte durch Aetherströme, die von den Flammen ausgehen, annimmt, kann man sich kaum anschliessen. Die Erscheinung beruht nicht auf einem Vorgang in der Oberfläche der Harzplatte, sondern in einem Vorgang in dem Raume, durch den die Entladung der Platten erfolgt.

Zunächst möchte ich bemerken, dass der Versuch ebenso gut, vielleicht noch besser gelingt, wenn man statt der Flammen Metallspitzen verwendet. Die Spitzen müssen jedoch gegen die Platte hin, gerichtet sein. Es liegt demnach der Erscheinung eine Art der Spitzenentladung zu Grunde.

Die von mir benutzten Platten bestanden aus 2 Teilen Colophonium und 1 Teil Wachs. Die Mischung war in einer $30 \times 40$ cm grossen, $^1/_2$ cm dicken Schicht auf etwas grössere Pappscheiben gegossen. Geladen werden die Platten am besten mittels eines Spitzenkammes, der mit einem Conductor einer Influenzmaschine verbunden ist. Es ist gleichgültig, ob die Ladung negativ oder positiv ist. Bei einem Dreipulvergemisch [2])

1) P. de Heen, Bull. de l'inst. de Phys. de l'université de Liège Ser. 2. Prem. fasc. p. 589. 1900.

2) Nach K. Bürker, Ann. d. Phys. 1. p. 476. 1900; P. Grützner, l. c. p. 738.

aus Carmin, Lycopodium und Schwefel äussert sich dieselbe nur in der Farbe der Linien.

Auf einem zur Erde abgeleiteten Zinkblech, oder auch direct auf dem Tische standen vertical befestigt und in symmetrischen Figuren angeordnet eine Anzahl gleichlanger (15 cm) zugespitzter Drahtstücke. Der gegenseitige Abstand derselben betrug etwa 15 cm. Die geladenen Platten werden einen Augen-

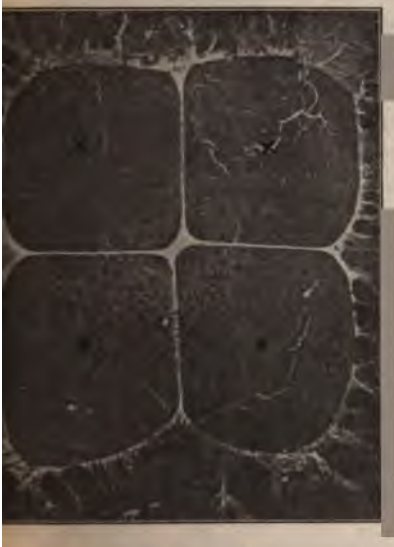


Fig. 1.

Fig. 2.

blick über dieselben gehalten, ohne mit den Spitzen in Berührung gebracht zu werden, und darauf mit einem Pulver bestäubt. Es zeigen sich dann die in Fig. 1 u. 2 abgebildeten geradlinigen Zeichnungen.

Die in den Photographieen eingezeichneten Kreuze geben die Stellen an, gegen die die Spitzen gerichtet waren. In den geraden Linien, an denen sich das Pulver ansammelt, bleiben die Platten geladen. Die von den einzelnen Spitzen ausgehenden Entladungsgebiete sind hier scharf voneinander getrennt.

Wenn man einen geladenen Conductor,[1]) den wir uns hier und in Folgendem eben begrenzt denken wollen, eine zur Erde abgeleitete Spitze nähern, so tritt bekanntlich bei hinreichend kleinem Abstande die Büschelentladung ein, besonders leicht und schön ausgebildet, wenn die Spitze positiv gegenüber dem Conductor ist. Bei negativer Spitze entsteht sie nur sehr schwer. Bei grösserem Abstand geht die Endladung unsichtbar vor sich, nur noch gekennzeichnet durch ein Glimmlicht an der Spitze. Legt man nun auf die ebene Begrenzung des Conductors eine dünne Schicht eines Isolators, z. B. Seidenpapier oder besser weissen Seidenstoff, so erkennt man bei gut ausgeruhtem Auge eine scharf abgegrenzte, leuchtende Kreisfläche; die Basis des „Entladungsgebietes",[2]) des Raumes, durch den sich die die Entladung befördernden Teilchen bewegen. Die Umgrenzung des Kreises ist von der des Conductors unabhängig. Sein Durchmesser, den ich bis zu 15 cm erhalten habe, ist abhängig von der Potentialdifferenz und in weitem Maasse von dem Oeffnungswinkel der kegelförmigen Spitze; letzteres in der Weise, dass bei stumpferem Winkel der Durchmesser kleiner ist.

Die hier vor sich gehende Entladung ist allem Anscheine nach von der sichtbaren Büschelentladung nicht nur quantitativ, sondern principiell verschieden; denn bei einer Einstellung der Spitze, bei der hier und da auch sichtbare Büschel übergehen, erkennt man, dass der Durchmesser dieses Büschels weit kleiner ist, als der des Glimmlichtkreises.

Der Durchmesser des Glimmlichtkreises und — soweit es sich beurteilen lässt — auch seine Helligkeit, sind unabhängig von der Art der elektrischen Ladung des Conductors. Leitet man statt der Spitze den Conductor zur Erde ab, so nimmt die Helligkeit bedeutend ab und die Umgrenzung verliert wesentlich an Schärfe. Bringt man in dies Entladungsgebiet Isolatoren (zwischen Conductor und Spitze), so wird der Glimmlichtkreis von dunkeln Schatten in den Umrissen des Isolators

1) Der Conductor war bei meinen Versuchen mit dem einen Pol einer Influenzmaschine mit zwei rotirenden Scheiben von 40 cm Durchmesser dauernd verbunden, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war.

2) Offenbar identisch mit der von Kundt beobachteten Staubfigur. Vgl. A. Kundt, Pogg. Ann. **136.** p. 612. 1869.

durchbrochen.[1]) Diese Schatten verschwinden aber nach kürzerer oder längerer Zeit vollkommen oder doch fast vollkommen.[2])

Nach dieser Zeit setzt sich also die Entladung auch jenseits des Isolators fort. Man kann daraus wohl schliessen, dass die die Entladung befördernden Teilchen nicht aus dem Material der Spitze bestehen, sondern dass das umgebende Medium, die Luft, oder durch Ionisation modificirte Teile desselben den Elektricitätstransport vermitteln. Dagegen ist es wohl denkbar, dass die sichtbare Büschelentladung von metallischen Teilchen herrührt.

Ordnet man nun zwei Spitzen so an, dass sich die Glimmlichtkreise der einzelnen eigentlich überdecken müssten, so sieht man an der Stelle der gemeinsamen Sehne eine scharfe dunkle Linie. Hier geht offenbar keine Entladung des Conductors vor sich. Entfernt man das Spitzenpaar allmählich mehr und mehr von dem Conductor, so wird die Linie — wenn auch langsam — immer schärfer und schmäler, um schliesslich bei hinreichend grossem Abstand zwischen Spitzen und Conductor ganz zu verschwinden. Man sieht dann nur noch die Ansätze derselben am Rande des leuchtenden Gebietes. In das von den zwei Spitzen ausgehende Entladungsgebiet schneidet sich also ein von zwei Ebenen begrenztes keilförmiges Gebiet ein (*A B* in Fig. 3), innerhalb dessen eine Entladung nicht erfolgt.

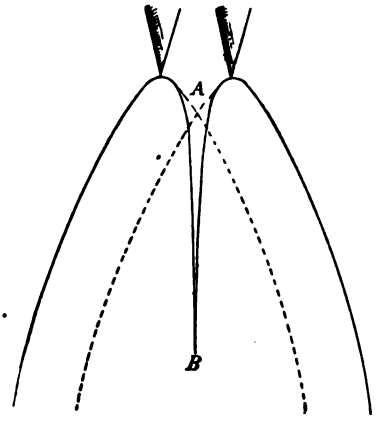


Fig. 3.

Bei mehr als zwei Spitzen erhält man mehr als eine Gerade, die sich in derselben Weise anordnen, wie die aus

1) W. Holtz, Gött. Nachr. p. 595. 602. 1880; p. 73. 1881; A. Righi, Mem. d. R. Acad. delle Scienze d. Istituto di Bologna Ser. IV. 2. p. 555. 1881; 3. p. 461. 1882; G. Quincke, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 525. 1895.

2) G. Quincke, l. c.

Schwefelpulver gebildeten des früher beschriebenen Versuches, mit denen sie offenbar identisch sind.

Man kann die Figuren direct photographisch fixiren, wenn man zwischen die Seide und den Conductor ein Blatt Bromsilberpapier legt, das man am besten mit etwas Wachs an den 4 Ecken befestigt. Ich habe meist das Bromarytpapier der N.P.G.-Actien-Gesellschaft benutzt. Die Figuren 4 und 5 sind

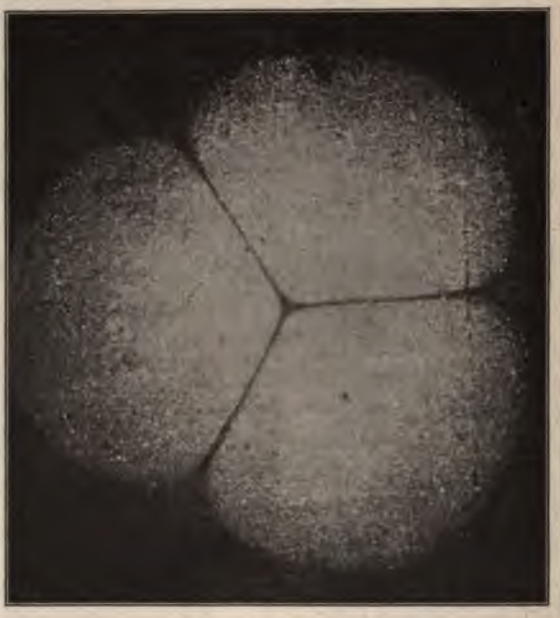


Fig. 4.

nach den so erhaltenen Papiernegativen durch Contactdruck hergestellt. Sie enthalten demnach noch die Structur des Papieres.

Zu beachten ist noch, dass die Linien an den Stellen, wo drei oder mehr zusammenstossen, in scharfen, hyperbelartigen Curven ineinander übergehen.

Wie das Zustandekommen des keilförmigen entladungsfreien Gebietes theoretisch zu erklären ist, darüber kann ich keine Angaben machen. Offenbar ist es eine Art Stauung der die Entladung befördernden Teilchen, die hier zu stande kommt.

Dass es in der That materielle Teilchen sind, die die Entladung vermitteln, geht aus folgendem Versuche hervor. Ein Flintglasrohr von 5,5 mm innerem Durchmesser wurde senkrecht gegen das von zwei Spitzen erzeugte keilförmige Gebiet gerichtet und zwar so, dass seine Mündung — soweit sich dies schätzen liess — nur wenige Millimeter von demselben

Fig. 5.

entfernt war. Lässt man nun einen Luftstrom aus der Mündung austreten, so baucht sich die auf der Seide erzeugte schwarze Linie an der entsprechenden Stelle aus. Die Teilchen werden also von dem Luftstrome beiseite getrieben (Fig. 6).

Die Geschwindigkeit des Luftstromes betrug 4,8 m/sec, sein Querschnitt im Durchmesser an der Austrittsstelle 5,5 mm, die Ablenkung der Teilchen an der Stelle der grössten Ausbauchung der schwarzen Linie im Mittel 2,7 mm. Nehmen

wir an, dass sich die Teilchen unter grosser Reibung bewegen, also ohne Trägheit, und nehmen wir ferner an, dass der Luftstrom an der Stelle, wo er auf die abzulenkenden Teilchen wirkt, noch denselben Durchmesser hat, wie an der Mündung des Glasrohres, so muss sich die Ablenkung zu der Wegstrecke, auf der die Ablenkung wirkt, verhalten wie die Geschwindigkeit des Luftstromes zu der der elektrischen Teilchen, also

Fig. 6.

$$v\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} : 4{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} = 5{,}5\text{ mm} : 2{,}7\text{ mm},$$

$$v = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

Ein zweiter Versuch mit einer Luftgeschwindigkeit von 9,5 m/sec ergab eine Verschiebung, die nicht ganz proportional der Luftgeschwindigkeit gewachsen war. Dieselbe betrug 4,2 mm, sodass man die Geschwindigkeit

$$v = 12{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

erhält.

Ein anderer Versuch, statt einen Luftstrom gegen die Teilchen zu blasen, das ganze System, Spitzen und Conductor um eine Axe rotiren zu lassen, ergab ebenfalls eine Verschiebung der schwarzen Linie von 1—2 mm. Doch ergaben die Resultate schlechte Uebereinstimmung, jedenfalls zum Teil durch die von den rotirenden Flächen mitgerissene Luft.

Es sei zum Schlusse noch darauf hingewiesen, dass man ähnliche geradlinige Figuren, wie die beschriebenen, auch bei Experimenten von ganz anderer Natur erhält. So haben Mills[1]) und später Lecher[2]) zu ähnlichen Figuren angeordnete gerade Linien „chemischer Unthätigkeit" gefunden, wenn sie von einzelnen Punkten aus in einer dünnen Flüssigkeitsschicht sich chemische Reactionen ausbreiten liessen.

---

1) E. J. Mills, Proc. Roy. Soc. **30.** p. 68. 1880.

2) E. Lecher, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **82.** II. Abt. p. 159. 1880.

Ferner treten derartige Figuren auf bei Flüssigkeitsströmungen in planparallelen Schichten, hervorgerufen durch Concentrations-[1]) oder Dichtigkeitsgefälle[2]) in der Richtung senkrecht zur Oberfläche. H. Bénard erwärmte die eine Grenzfläche einer solchen Flüssigkeitsschicht. Es entstehen durch das Temperaturgefälle Wirbelströme, die in sechskantigen, aneinander grenzenden Wirbelgebieten verlaufen. An der Oberfläche zeichnen die Grenzen dieser Gebiete sich durch Erhebungen aus, die sich in sechseckigen Figuren aneinander schliessen.

Auch die Figuren, die Kundt[3]) in schwingenden Luftplatten erhalten hat, und die er durch Lycopodiumpulver oder Korkfeilicht sichtbar macht, zeigen Verwandtschaft mit unseren Figuren. Die „Rippungen", die zwei benachbarte sog. Doppelknoten verbinden, entsprechen hier den geraden Linien; die sog. einfachen Knoten, in denen eine wechselnde Dichtigkeit stattfindet, den Centren unserer Figuren.

Diese Aehnlichkeiten mit den eben beschriebenen elektrischen Erscheinungen sind freilich zunächst nur äusserlich.

Heidelberg, den 24. Juni, 1901.

---

1) E. H. Weber, Pogg. Ann. **94.** p. 452. 1855.

2) H. Bénard, Ann. de chim. et phys. (7) **23.** p. 62. 1901.

3) A. Kundt, Zür. Vierteljahrsschr. **13.** p. 317. 1869; Pogg. Ann. **150.** p. 177. 1873.

(Eingegangen 25. Juni 1901.)

## 7. *Ueber die Diffusion von Wasserstoff durch Palladium*[1]; *von A. Winkelmann.*

Graham[2]) beobachtete zuerst, dass das Palladium die Fähigkeit hat, grosse Mengen von Wasserstoff zu absorbiren. Diese Absorption war am grössten, wenn das Palladium die Kathode in einem Wasservoltameter bildete. Mit wachsender Temperatur nimmt die Absorption ab. Ferner fand Graham, dass das glühende Palladium von Wasserstoff durchdrungen wird; aber auch bei gewöhnlicher Temperatur lässt ein Palladiumblech Wasserstoff durchwandern, wenn, wie Beetz[3]) fand, auf der einen Seite des Bleches Wasserstoff elektrolytisch entwickelt wird. Die auf diese Weise durchtretende Menge ist indessen, wie früher Graham gezeigt hatte, so gering, dass sie sich nicht manometrisch nachweisen lässt.

Die Abhängigkeit der Diffusion des Wasserstoffs von dem Druck des diffundirenden Gases ist, soviel mir bekannt, bisher nicht näher untersucht. Diese Untersuchung bildet den Gegenstand der folgenden Arbeit.

### § 1.

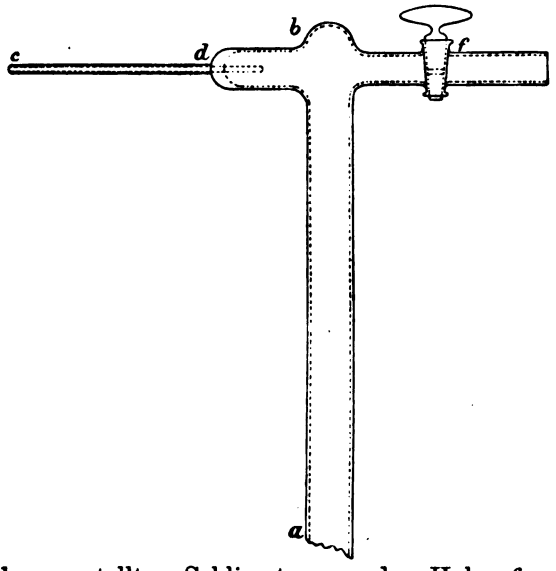
Der zuerst benutzte Apparat ist in nachstehender Figur abgebildet. Das Glasrohr *a b* von 50 cm Länge und 0,94 cm innerem Durchmesser trägt das Palladiumrohr *c d*, bei *d* offen, bei *c* geschlossen, von 8 cm Länge und 0,15 cm innerem Durchmesser. Gegenüber dem Rohr *c b* befindet sich der Hahn *f*. Um das Rohr mit Wasserstoff zu füllen, neigt man dasselbe unter 50—60°, sodass *c* nach oben kommt, und lässt

1) In der med.-naturw. Gesellsch. zu Jena am 17. Mai 1901 im Auszuge mitgeteilt.

2) Th. Graham, Pogg. Ann. **136**. p. 317. 1869.

3) W. Beetz, Sitzungsber. der Bayer. Akad. p. 157. 1878; Wied. Ann. **5**. p. 1. 1878.

durch den Hahn *f* längere Zeit Wasserstoff eintreten. Dann wird, während der Durchgang des Gases fortdauert, *a b* wieder aufgerichtet und unter *a* eine hinreichend grosse Schale mit




Quecksilber gestellt. Schliesst man den Hahn *f* und stellt unter *c d* einen Bunsenbrenner, so steigt das Quecksilber in dem Rohre *a b* sehr rasch in die Höhe, wie folgendes Beispiel zeigt.

| Zeit in sec | Quecksilberhöhe in cm | Zeit in sec | Quecksilberhöhe in cm |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 60 | 23,5 |
| 15 | 9 | 120 | 27,5 |
| 30 | 17 | 180 | 30,5 |
| 45 | 21 | 240 | 33,5 |

In den ersten 60 sec ist in dem obigen Beispiel das Quecksilber um 23,5 cm gestiegen; in den folgenden 60 sec aber bloss um 4 cm. Aus dieser starken Abnahme des weiteren Steigens geht hervor, dass der anfängliche Zustand des Rohres sich schnell ändert. Diese Aenderung wird durch eine Aenderung der Absorption und durch einen weiteren Umstand bedingt, der unten erwähnt wird. Wenn man deshalb die Diffusion allein beobachten will, muss man mit der Beobachtung so lange warten, bis ein stationärer Zustand eingetreten ist. Man kann dies einfach dadurch erzielen, dass man während

der ersten Zeit[1]) der Erwärmung des Palladiumröhrchens den Hahn *f*, der mit dem Wasserstoffentwickelungsapparat in Verbindung steht, offen lässt. Der zweite Umstand, durch den die oben erwähnte Aenderung eintritt, beruht darauf, dass Palladium, das durch eine Leuchtgasflamme erhitzt wird, Kohlenstoff aufnimmt. Um die Berührung mit dieser Flamme zu verhindern, wurde über das Palladiumrohr ein beiderseits offenes Messingrohr gesteckt. Durch das Messingrohr wird gleichzeitig die Einschmelzstelle des Palladiumröhrchens, die leicht undicht wird, geschützt; hierfür ist es ferner zweckmässig, die Flamme des Bunsenbrenners noch mit einem conischen Rohr zu umgeben, sodass ein seitliches Ausschlagen der Flamme verhindert wird.

§ 2.

Die Versuche wurden mit Glasröhren verschiedener Länge angestellt; bei dem ersten Versuch hatte das Rohr eine Länge von 50 cm.[2]) Mit Hülfe eines Fernrohres wurden die Durchgangszeiten für die einzelnen Centimeterstriche bestimmt.

Im Folgenden ist eine Beobachtungsreihe (abgekürzt von 5 zu 5 cm) angegeben; in derselben stellt $h$ die Höhe der Quecksilbersäule im Rohr über dem äusseren Quecksilberniveau dar, unter $t$ stehen die Zeiten in sec.

Barometer 75,6 cm. Temperatur der Umgebung 18,0°.

| $h$[3]) cm | $t$ sec | Differenzen der Zeiten |
|---|---|---|
| 8,83 | 0 | |
| | | 292,5 |
| 13,41 | 292,5 | |
| | | 278,0 |
| 18,49 | 570,5 | |
| | | 258,5 |
| 23,57 | 829 | |
| | | 243,0 |
| 28,65 | 1072 | |
| | | 225,5 |
| 33,73 | 1297,5 | |
| | | 213 |
| 38,81 | 1510,5 | |

1) Es ist mehrfach $^1/_2$ Stunde gewartet.

2) Ein solches Rohr eignet sich auch gut als Demonstrationsapparat; derselbe kann von Hrn. E. Gundelach in Gehlberg (Thüringen) bezogen werden.

3) Dass die Differenzen der $h$ nicht gleich 5 cm, sondern 5,08 cm sind, ist darin begründet, dass beim Steigen des Quecksilbers in dem Glasrohre das äussere Niveau sinkt.

Um den Zusammenhang dieser Zahlen zu erkennen, kann man die naheliegende Annahme machen, dass die Menge des diffundirenden Gases proportional dem jeweiligen Druck im Innern des Rohres ist.

Bezeichnet man diesen Druck mit $P$, so hat man für die in der Zeit $dt$ durchgehende Menge $dm$

$$dm = -a.P.dt. \tag{1}$$

Bezeichnet ferner $B$ den Barometerstand, $H$ die Höhe, $q$ den Querschnitt des Glasrohres, $V$ das Volumen, $\tau$ die Temperatur des Gases, so ist

$$m = \frac{C.V.P}{76(1+\alpha\tau)},$$

wo $C$ eine Constante bedeutet.

Ferner ist

$$P = (B-h),$$
$$V = q(H-h),$$

wenn man den Querschnitt $q$ des Rohres als constant voraussetzt.

Daher

$$dm = -C\{H-h+B-h\}q.dh$$

und deshalb aus (1)

$$a(B-h)dt = C.q(H+B-2h)dh.$$

Integrirt man zwischen den Grenzen $t_1$ und $t_0$ bez. $h_1$ und $h_0$, so ergiebt sich

$$(H-B)\log\text{nat}\frac{B-h_0}{B-h_1} + 2(h_1-h_0) = A(t_1-t_0), \tag{2}$$

wenn $A = (a/C.q)$ gesetzt wird.

Die Gleichung (2) liefert aus den bereits mitgeteilten Beobachtungen folgende Werte für $A$, wenn $h_0 = 8{,}33$ gesetzt wird.

| $h$ cm | $A$ |
|---|---|
| 8,33 | — |
| 13,41 | 0,02689 |
| 18,49 | 0,02770 |
| 23,57 | 0,02822 |
| 28,65 | 0,02865 |
| 33,73 | 0,02907 |
| 38,81 | 0,02933 |

Die Werte für $A$ sind nicht constant, sondern wachsen mit wachsendem $h$ und zwar in dem obigen Beispiel um etwa 9 Proc. Mit abnehmendem Druck des Gases diffundirt also eine grössere Gasmenge, als der Annahme entspricht, die der Gleichung (1) zu Grunde liegt.

Es möge hier gleich bemerkt werden, dass die Veränderung von $A$ nicht in einem veränderlichen Rohrquerschnitt ihren Grund hat; denn eine Calibrirung des Rohres zeigte, dass die Caliberfehler nur einen verschwindenden Einfluss auf $A$ haben.

Von grossem Einfluss für den gleichmässigen Gang der Diffusion ist die Constanz der Temperatur des erwärmten Palladiumröhrchens. Da über diese Constanz keine unmittelbare Beobachtung vorliegt, könnte man versucht sein, das Wachstum von $A$ einer Veränderung des Gasdruckes zuzuschreiben. Es hat sich aber bei zahlreichen Versuchen jedesmal der gleiche Gang von $A$ herausgestellt, sodass die eventuelle Variation des Gasdruckes nicht als Ursache hierfür herangezogen werden kann. Trotzdem ist es möglich, dass das Palladiumröhrchen Temperaturänderungen erfahre und dass diese für das Wachstum von $A$, wenn auch nur in sehr geringem Maasse, mitwirken. Der durch das Palladiumrohr diffundirende Wasserstoff wird erst in dem Rohre selbst erwärmt. Setzt man eine constante Wärmezufuhr für das Palladiumrohr voraus, so wird die Temperatur des Rohres eine bestimmte Höhe $T$ erreichen, wenn keine Wasserstoffdiffusion stattfindet. Tritt aber diese Diffusion ein, so wird die Temperatur niedriger als $T$ werden und zwar um so mehr, je mehr Wasserstoff in der Zeiteinheit durch das Rohr diffundirt. Es ist bekannt, dass die Diffusion durch Palladium unter sonst gleichen Umständen gleichzeitig mit der Tempratur zunimmt. Wendet man dies auf den vorliegenden Fall an, so ergiebt sich, dass im Anfang des Versuches bei grösserem Druck des Wasserstoffes die Temperatur des Palladiumrohres niedriger ist, als später, wenn der Druck des Wasserstoffs abgenommen hat, oder dass die Diffusion des Wasserstoffs schliesslich stärker ist als sie nach der Gleichung (1) sich ergiebt. In welchem Maasse die Temperaturänderung von Einfluss ist, lässt sich nicht unmittelbar erkennen; nach der Menge des Wasserstoffs, die in der Zeit-

einheit durch das Röhrchen hindurchtritt und die später für einen speciellen Fall angegeben wird, wird man nur einen minimalen Einfluss erwarten können; eine Erklärung für den oben mitgeteilten Gang der Grösse $A$ lässt sich hierdurch nicht geben.

Um den Beobachtungen gerecht zu werden, kann man versuchen, in die Gleichung (1) eine unbekannte Potenz $z$ des Druckes $P$ einzuführen.

Setzt man deshalb

$$dm = -a.P^z.dt, \tag{3}$$

so wird unter den gleichen Voraussetzungen wie früher das Integral

$$\left\{ (B-h_0)^{1-z}\left\{\frac{2(B-h_0)}{2-z}+\frac{H-B}{1-z}\right\} - (B-h_1)^{1-z}\left\{\frac{2(B-h_1)}{2-z}+\frac{H-B}{1-z}\right\} = A(t_1-t_0). \right. \tag{4}$$

Diese Gleichung liefert in Verbindung mit einer zweiten ebenso gebauten folgende Resultate für die bereits mitgeteilte Versuchsreihe.

Tabelle I.

$H = 48$ cm, $z = 0{,}71$
$B = 75{,}6$ cm, $\log A = 0{,}96514 - 2.$

| $h$ cm | $t$ sec beob. | $t$ sec ber. | Differenz beob.—ber. |
|---|---|---|---|
| 8,33 | 0 | 0 | 0 |
| 13,41 | 292,5 | 290,6 | + 1,9 |
| 18,49 | 570,5 | 567,2 | + 3,3 |
| 23,57 | 829,0 | 829,4 | − 0,4 |
| 28,65 | 1072 | 1075,4 | − 3,4 |
| 33,73 | 1297,5 | 1303,3 | − 5,8 |
| 38,81 | 1510,5 | 1510,4 | + 0,1 |

Die Differenzen der letzten Reihe überschreiten nur einmal die zulässigen Beobachtungsfehler. Bei später ausgeführten Versuchen wurden die Differenzen noch geringer.

§ 3.

Ich unterlasse aber die weiteren Versuchsreihen hier mitzuteilen, da die Formel (3), nach welcher die diffundirende

Menge nicht proportional dem Drucke $P$, sondern proportional einer Potenz von $P$ vor sich geht, einen rein empirischen Charakter trägt, und sich nicht einsehen lässt, weshalb die Grösse der Diffusion nicht proportional dem wirksamen Drucke sein soll. Bei einer Besprechung dieses Sachverhaltes mit Hrn. Straubel wies dieser auf die Möglichkeit hin, dass eine Dissociation des Wasserstoffs eintritt und dass nur die dissociirten Molecüle des Wasserstoffs, d. h. die Atome, befähigt seien, die Palladiumwand zu passiren. Setzt man voraus, dass der Druck der dissociirten Molecüle $p_1$ sei, der der nicht dissociirten Molecüle $p$, so ist der Gesamtdruck $P$

$$P = p_1 + p. \tag{5}$$

Der wirksame Druck $p_1$ ist unter diesen Umständen kleiner als der Gesamtdruck $P$ und lässt sich so bestimmen.

Das Gesetz der Massenwirkung[1]) liefert eine Beziehung des Druckes $p_1$ und $p$, nämlich

$$\frac{p_1^2}{p} = K, \tag{6}$$

wo $K$ eine Constante bezeichnet.

Aus (5) und (6) ergiebt sich

$$p_1 = \sqrt{K}\left\{\sqrt{P + \frac{K}{4}} - \sqrt{\frac{K}{4}}\right\}.$$

Setzt man deshalb entsprechend der Gleichung (1)

$$dm = -a.p_1.dt, \tag{7}$$

so erhält man

$$a\sqrt{K}\left\{\sqrt{P + \frac{K}{4}} - \sqrt{\frac{K}{4}}\right\} dt = C.q(H + B - 2h)\,dh.$$

Berücksichtigt man, dass

$$P = B - h,$$

so ergiebt sich

$$\frac{\{H - B + 2(B - h)\}\,dh}{\sqrt{B - h + \frac{K}{4}} - \sqrt{\frac{K}{4}}} = \frac{a.\sqrt{K}}{C.q}\,dt,$$

1) Vgl. z. B. W. Nernst, Theoretische Chemie p. 352. 1898.

und daraus durch Integration

$$(8)\quad \begin{cases} (H-B)\sqrt{\frac{K}{4}}\log\text{nat}\frac{y_0}{y_1} + (H-B+K)(y_0-y_1) \\ \quad + 3\sqrt{\frac{K}{4}}(y_0^2-y_1^2) + \frac{2}{5}(y_0^3-y_1^3) = A'(t_1-t_0), \end{cases}$$

wenn

$$y_0 = \sqrt{B-h_0+\frac{K}{4}} - \sqrt{\frac{K}{4}},$$

$$y_1 = \sqrt{B-h_1+\frac{K}{4}} - \sqrt{\frac{K}{4}},$$

$$A' = \frac{a\sqrt{K}}{C\,.\,q}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung (8) liefert mit einer zweiten ebenso gebauten die Grössen $K$ und $A'$.

Die früher schon mitgeteilte Versuchsreihe ergiebt

Tabelle II.

$\frac{K}{4} = 12{,}25$, $H = 48$ cm,

$\log A' = 0{,}22824-1$, $B = 75{,}6$ cm.

| $h$ cm | $t$ sec beob. | $t$ sec ber. | Differenz beob.—ber. |
|---|---|---|---|
| 8,33 | 0 | 0 | 0 |
| 13,41 | 292,5 | 289,1 | + 3,4 |
| 18,49 | 570,5 | 566,1 | + 4,4 |
| 23,57 | 829,0 | 828,6 | + 0,4 |
| 28,65 | 1072,0 | 1074,0 | − 2,0 |
| 33,73 | 1297,5 | 1301,6 | − 4,1 |
| 38,81 | 1510,5 | 1510,4 | + 0,1 |

Eine zweite Versuchsreihe mit dem gleichen Apparate ergab

Tabelle III.

$\frac{K}{4} = 23{,}04$, $H = 48$ cm,

$\log A' = 0{,}36206-1$, $B = 75{,}6$ cm.

| $h$ cm | $t$ sec beob. | $t$ sec ber. | Differenz beob.—ber. |
|---|---|---|---|
| 8,33 | 0 | 0 | 0 |
| 13,41 | 247,0 | 246,3 | + 0,7 |
| 18,49 | 483,0 | 482,0 | + 1,0 |
| 23,57 | 706,0 | 706,3 | − 0,3 |
| 28,65 | 915,5 | 917,7 | − 2,2 |
| 33,73 | 1112,5 | 1110,6 | + 1,9 |
| 38,81 | 1297,5 | 1297,8 | − 0,3 |

Während in den beiden obigen Versuchsreihen die Höhe $H$ des Glasrohres kleiner als die Barometerhöhe $B$ war, wurde jetzt ein Rohr mit einer beträchtlich grösseren Höhe benutzt; dasselbe wurde mit der Quecksilberpumpe verbunden, um mit Wasserstoff gefüllt zu werden.

Tabelle IV.

$\frac{K}{4} = 0{,}0605$, $H = 117{,}0$ cm,

$\log A' = 0{,}16234-1$, $B = 75{,}6$ cm.

| $h$ cm | $t$ sec beob. | $t$ sec ber. | Differenz beob.—ber. |
|---|---|---|---|
| 6,20 | 0 | 0 | 0 |
| 16,36 | 754,5 | 757,2 | − 2,7 |
| 26,52 | 1494,5 | 1498,9 | − 4,4 |
| 36,68 | 2207 | 2207,3 | − 0,3 |
| 46,84 | 2900 | 2891,5 | + 8,5 |
| 57,00 | 3568 | 3563,3 | + 4,7 |
| 67,16 | 4266 | 4266,3 | − 0,3 |

Die vorstehende Beobachtungsreihe ist sehr weit geführt, da die zuletzt beobachtete Höhe nur um 8,43 cm vom Barometerdruck absteht.

Schliesslich wurde noch eine Anordnung getroffen, bei der das Gasvolumen während des Versuches als constant betrachtet werden konnte. In ein Rohr von etwa 50 cm Länge und 0,69 qcm Querschnitt wurde ein engeres Rohr von 0,0049 qcm Querschnitt eingekittet; die Querschnitte der beiden Rohre verhalten sich also wie 140,8 : 1. Die Beobachtung wurde ausgeführt während das Quecksilber in dem engen Rohre um etwa 40 cm in die Höhe stieg. Hierdurch tritt eine Volumenverminderung um 0,196 ccm ein, während das Gesamtvolumen 34,5 ccm war. Die gesamte Volumenänderung beträgt demnach nur 0,0057 des ursprünglichen Volumens und kann vernachlässigt werden.

Setzt man $V = \text{const.}$, so erhält man statt der Gleichung (8)

$$(9) \qquad \sqrt{\frac{K}{4}} \log \text{nat} \frac{y_0}{y_1} + (y_0 - y_1) = A''(t_1 - t_0),$$

wo $y_0$ und $y_1$ die gleiche Bedeutung wie früher haben, und $A''$ eine neue Constante bezeichnet.

Das enge Rohr war in Millimeter geteilt; es wurde die Stellung des Quecksilbers von 300 zu 300 sec abgelesen. Die Füllung mit Wasserstoff wurde auch hier mit Hülfe der Quecksilberpumpe gemacht.

Tabelle V.

$\frac{K}{4} = 7{,}502$, $B = 75{,}67$ cm.

$\log A'' = 0{,}39941-3$,

| $h$ cm | $t$ sec beob. | $t$ sec ber. | Differenz beob.—ber. |
|---|---|---|---|
| 16,55 | 0 | 0 | 0 |
| 24,36 | 300 | 300,5 | − 0,5 |
| 31,42 | 600 | 601,1 | − 1,1 |
| 37,72 | 900 | 897,8 | + 2,2 |
| 43,42 | 1200 | 1198,1 | + 1,9 |
| 48,56 | 1500 | 1503,7 | − 3,7 |
| 53,01 | 1800 | 1804,6 | − 4,6 |
| 56,76 | 2100 | 2095,0 | + 5,0 |

Vergleicht man die beobachteten und berechneten Werte in den mitgeteilten Versuchsreihen, so ergiebt sich eine genügende Uebereinstimmung. Es folgt deshalb aus diesen Versuchen mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass die Diffusion des Wasserstoffs durch das Palladium in hoher Temperatur in Form von Atomen vor sich geht; denn nur dann lassen die Versuche sich mit dem Satze vereinigen, dass die diffundirte Menge proportional dem wirksamen Drucke ist.

Hr. C. Hoitsema[1]) kommt bei der Untersuchung der Absorption von Wasserstoff durch Palladium ebenfalls zu dem Resultat, dass der Molecularzustand des gelösten Wasserstoffs unter gewissen Bedingungen einatomig sei. Er sagt: „Die Annahme liegt also nahe, dass Wasserstoff in Palladium unter geringem Druck sich lösend, einatomige Constitution annimmt; dagegen diejenige von $H_2$ bei grösserem Wasserstoffgehalt, bei grösserer Dichte."

§ 4.

In den mitgeteilten Versuchsreihen zeigen die Werte von $K$ beträchtliche Unterschiede. Berechnet man aus denselben die

1) C. Hoitsema, Zeitschr. f. physik. Chem. 17. p. 40. 1895.

Grössen $p_1$, die den Druck der dissociirten Molecüle darstellen für den anfänglichen Gesamtdruck $P$, so ergiebt sich:

| Tabelle | $K$ | $P$ (cm) | $p_1$ (cm) | $p$ (cm) |
|---|---|---|---|---|
| II | 49,00 | 67,27 | 37,92 | 29,35 |
| III | 92,16 | 67,27 | 45,15 | 22,12 |
| IV | 0,2420 | 69,30 | 3,98 | 65,32 |
| V | 30,008 | 59,12 | 29,70 | 29,42 |

In dieser Zusammenstellung ist zu bemerken, dass nur die beiden ersten Werte (Tab. II u. III) sich auf das gleiche Palladiumröhrchen beziehen. Die Differenzen der $p_1$ sind hier vermutlich durch die verschiedene Temperatur des Palladiumröhrchens in den beiden Versuchsreihen bedingt. Von den beiden anderen Versuchsreihen (Tab. IV u. V) zeigt besonders die erste einen sehr kleinen Wert von $p_1$. Es ist wahrscheinlich, dass dies durch die Temperatur des Röhrchens nicht allein verursacht ist, sondern dass das Palladium dieses Röhrchens eine andere Beschaffenheit durch Verunreinigung mit anderen Metallen eventuell auch Kohlenstoff besessen hat.

Um die Temperatur des Palladiumröhrchens während des Versuches sicherer in der Hand zu haben, als es mittels einer Gasflamme möglich ist, wurde versucht, das Palladium elektrisch zum Glühen zu bringen. Die Versuche schlugen aber fehl, weil die Einschmelzstelle des Röhrchens in dem Glase immer sehr bald undicht wurde.

§ 5.

Bestimmt man die Gasmenge, die durch die Oberfläche des Röhrchens in der Zeiteinheit durchtritt, so liefern die verschiedenen Versuche aus den bereits angegebenen Gründen verschiedene Werte. Um einen Wert wenigstens annähernd zu erhalten, möge der Versuch aus Tab. III, der die stärkste Diffusion zeigte, benutzt werden. Nimmt man an, dass die Oberfläche des Röhrchens auf eine Länge von 3 cm durchlässig war, so findet man unter Berücksichtigung folgender Daten:

Wandstärke des Röhrchens 0,0102 cm,
Durchmesser „ „ 0,175 „

dass bei Atmosphärendruck durch 1 qcm Oberfläche des Palladiums, das 0,0102 cm dick war, in 1 Sec. 0,0080 ccm Wasserstoff durchtritt.

Zur Vergleichung möge eine Beobachtung von Graham angeführt werden, die sich auf glühendes Platin bezieht. Graham[1]) fand, dass durch 1 qm glühendes Platin in 1 Min. 489,2 ccm Wasserstoff diffundiren. Bezieht man diese Angabe auf Quadratcentimeter und Secunden, so findet man, dass beim glühenden Platin, das 0,11 cm dick war, durch 1 qcm in 1 Sec. 0,000815 ccm Wasserstoff hindurchtreten. Wenn man annimmt, dass die diffundirte Gasmenge umgekehrt proportional der Wandstärke des Metalles ist, würde der Graham'sche Versuch für ein 0,01 cm dickes Platin 0,00815 ccm Wasserstoff pro Quadratcentimeter und Secunde liefern. Diese Zahl ist ein wenig grösser, als die oben für Palladium angegebene, wobei aber zu bemerken ist, dass das Platin bei Graham viel höher erwärmt war, als das Palladium in unseren Versuchen. Für letzteres Metall, das „bis dicht an die Rotglühhitze" erwärmt war, giebt Graham[2]) an, dass bei einer Schichtdicke von 0,1 cm pro Quadratmeter 423 ccm in 1 Min. diffundiren. Dies liefert pro Secunde, Quadratcentimeter und 0,01 cm Dicke 0,00705 ccm, eine Zahl, die etwas kleiner als die hier gefundene ist.

---

Fasst man das Resultat der mitgeteilten Versuche kurz zusammen, so ergiebt sich:

Die durch glühendes Palladium diffundirende Menge Wasserstoff ist nicht proportional dem jeweiligen Druck des Wasserstoffs; vielmehr wird mit abnehmendem Druck die Gasmenge grösser, als dieser Annahme entspricht. Setzt man voraus, dass eine Dissociation des Wasserstoffs eintritt, und dass die diffundirende Gasmenge dem Druck der dissociirten Molecüle proportional ist, so werden die Versuche genügend dargestellt. Es ist deshalb sehr wahrscheinlich, dass durch glühendes Palladium bei den hier in Betracht gezogenen Temperaturen nur die Atome, nicht aber die Molecüle des Wasserstoffs hindurchtreten.

Jena, im Juni 1901.

---

1) Th. Graham, Pogg. Ann. **129.** p. 580. 1866.
2) l. c. p. 602.

(Eingegangen 24. Juni 1901.)

## 8. *Zur Kenntnis der Polarisationscapacität des blanken Platins; von P. Schönherr.*

§ 1. Es ist bereits von Scott[1]) ausgesprochen worden, dass die Polarisationscapacität des Platins hauptsächlich durch die occludirten Gase bedingt ist. Hierfür spricht auch die von Gordon[2]) constatirte Thatsache, welche ich bestätigt fand, dass Zusatz von Platinsulfat zu verdünnter Schwefelsäure die Capacität des Platins in dem genannten Elektrolyten unverändert lässt. Ferner ist von Scott ausgesprochen worden, dass die Polarisationscapacität mit der Concentration des occludirten Gases wachsen muss. Gordon und Scott haben diese Folgerung dadurch geprüft, dass sie den Gehalt an occludirten Gasen durch anodische oder kathodische Polarisation steigerten.

In der vorliegenden Untersuchung wird vorzugsweise der umgekehrte Weg eingeschlagen, nämlich die Polarisationscapacität möglichst gasfreier Zellen untersucht. Für solche fand Gubkin[3]), dass die elektromotorische Kraft am Platin durch eine sehr kleine Wasserstoffzufuhr sehr stark verändert wurde. Entsprechend hatte früher Lindeck[4]) gezeigt, dass die elektromotorische Kraft zwischen Hg und $ZnSO_4$ durch Beimengung von 0,00015 Proc. Zn zum Hg um 1,17 Volt erniedrigt wird, und dass eine bestimmte kleine Vermehrung des Zn-Gehaltes einen um so geringeren Einfluss hat, je grösser der schon vorhandene Zn-Gehalt ist. Da nun die Polarisationscapacität einer Zelle $C = dq/dp$, worin $dp$ die Aenderung der elektromotorischen Kraft bedeutet, welche eintritt, wenn die Elektricitätsmenge $dq$ durch die Zelle geschickt wird, so waren von möglichst gasfrei gemachten Zellen sehr kleine Capacitäten

1) A. M. Scott, Wied. Ann. **67.** p. 388. 1899.
2) C. M. Gordon, Wied. Ann. **61.** p. 1. 1897.
3) G. Gubkin, Inaug.-Diss., Freiburg i. B. 1886.
4) St. Lindeck, Wied. Ann. **35.** p. 311. 1888.

zu erwarten. Der Versuch hat diese Erwartung vollauf bestätigt.

§ 2. Die Capacität wurde nach dem Vorgang von M. Wien,[1]) Orlich[2]) und E. Neumann[3]) gemessen, indem in den einen Zweig einer durch ein kleines Inductorium $J$ mit Saitenunterbrecher betriebenen Wheatstone'schen Drahtcombination die Capacität $C$ und eine regulirbare Selbstinduction $P$ eingeschaltet wurde. Die Brücke enthielt ein Rubens'sches Vibrationsgalvanometer $V$. Giebt dieses keinen Ausschlag, so ist

$$(1) \qquad C = \frac{\cos\psi}{P.m^2}, \qquad w_1 + \frac{\sin\psi}{C.m} = \frac{w_2 w_4}{w_3}.$$

Hier bedeutet $m/2\pi$ die Schwingungszahl des Vibrationsgalvanometers, $w_1$ den Ohm'schen Widerstand des betrachteten Zweiges, $w_3$ den Widerstand des 1 gegenüberliegenden Zweiges. Die Grössen $C$ und $\psi$ sind dadurch bestimmt, dass, wenn der vom Vibrationsgalvanometer angezeigte Teil des Stromes $= a \sin m t$ gesetzt wird, dann für die Polarisation $p$ der Ausdruck

$$(2) \qquad p = \frac{a}{C.m} \cdot \sin\left\{m t - \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\right\}$$

angenommen ist.

§ 3. Die Bestimmung von $w_1$ war für meine Zellen nicht wohl ausführbar; doch ist $\psi$ für den von mir untersuchten Fall der Polarisation des Platins in verdünnter Schwefelsäure von Hrn. M. Wien bestimmt und zu $3^1/_2{}^0$ gefunden worden. Setzt man also in den Ausdruck für die Capacität (1) $\psi = 0$, so begeht man einen Fehler von nur $1^1/_2$ pro mille. Dagegen ist die scheinbare Widerstandszunahme $\sin\psi/C.m$ für $\psi = 3^1/_2{}^0$ schon sehr merklich (§ 6).

§ 4. Die benutzten Zellen bestanden aus zwei gleichen Elektroden, die Capacität $C_1$ pro qcm wurde nach der angenähert richtigen Formel

$$C_1 = C.\frac{2}{f}$$

berechnet.

---

1) M. Wien, Wied. Ann. 58. p. 37. 1896.

2) E. Orlich, Inaug.-Diss., Berlin 1896.

3) E. Neumann, Wied. Ann. 67. p. 500. 1899.

Die Schwingungszahl der Saite des Vibrationsgalvanometers wurde nach einer von Frl. Neumann benutzten Methode bestimmt; sie betrug in den meisten Fällen

$$85 = \frac{m}{2\pi}.$$

§ 5. Fig. 1 zeigt die erste der benutzten Zellen in $^1/_3$ nat. Grösse. Die Elektroden $E_1$, $E_2$, Platinbleche von $2 \times 3 = 6$ qcm Flächeninhalt, wurden durch Glasperlen in einem Abstand von 0,6 cm gehalten. Die Zuleitung zu den Elektroden geschah

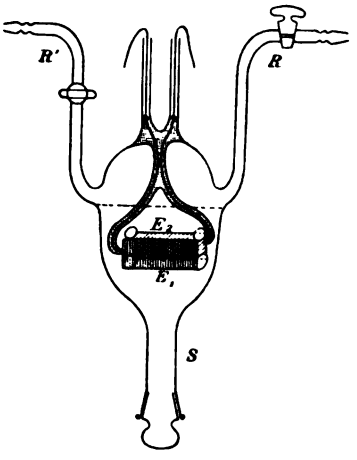



Fig. 1.

durch die eingeschmolzenen Platindrähte. Die Füllung wurde durch den Stutzen $S$ bewerkstelligt, welcher durch einen Glasschliff verschliessbar war. Das Ganze befand sich in einem mit dem benutzten Elektrolyten (0,1 norm. Schwefelsäure) gefüllten Becherglase, wobei der Glasschliff nicht gefettet war.

§ 6. *Aenderung der Capacität mit der Zeit nach dem Ansetzen.* Der Apparat wurde so, wie er vom Glasbläser kam, gereinigt, mit dem Elektrolyten gefüllt und die Veränderung der Capacität sowie des scheinbaren Widerstandes $w' = w_2 w_4 / w_3$ mit der Zeit verfolgt. Die umstehende Tabelle enthält die Ergebnisse.

| Temperatur | Zeit nach Ansetzen | $C_1$ | $w'$ | $w'_{15^0}$ |
|---|---|---|---|---|
| 14,2 | 4 m | 77,1 | 5,56 | 5,50 |
| 14,2 | 20 | 73,8 | 5,66 | 5,59 |
| 14,3 | 34 | 71,5 | 5,72 | 5,66 |
| 14,5 | 47,5 | 69,6 | 5,80 | 5,76 |
| 14,6 | 1 h 0 | 68,0 | 5,84 | 5,80 |
| 14,9 | 28,5 | 66,5 | 5,91 | 5,90 |
| 15,0 | 2 0,5 | 65,0 | 5,97 | 5,97 |
| 15,3 | 33 | 63,3 | — | — |
| 15,4 | 42 | 63,1 | 5,97 | 6,01 |
| 16,8 | 7 58 | 56,7 | 6,22 | 6,39 |
| 16,8 | 8 14 | 56,5 | 6,22 | 6,39 |
| 16,8 | 18 | 56,5 | 6,22 | 6,39 |
| 14,8 | 23 12 | 50,4 | — | — |
| 15,0 | 39 | 50,2 | — | — |
| 15,7 | 25 16 | 50,0 | 6,46 | 6,53 |
| 16,1 | 26 34 | 49,3 | 6,46 | 6,57 |
| 14,0 | 49 14 | 45,2 | 6,63 | 6,54 |
| 11,8 | 71 57 | 43,6 | 6,83 | 6,51 |

Die Capacität sinkt regelmässig mit der Zeit, in 72 Stunden von 77,1 auf 43,6, zuerst schneller, dann langsamer fallend. Zugleich wächst der scheinbare Widerstand. Derselbe ist in der letzten Columne mit dem Temperaturcoefficienten des Elektrolyten auf 15° reducirt, was eine kleine Ungenauigkeit enthält, da der Temperaturcoefficient nur für den Ohm'schen Widerstand des Elektrolyten gilt. Macht man die jedenfalls nicht genau zutreffende Annahme, dass die Phasengrösse $\psi$ in der ganzen Reihe constant geblieben ist, dann ergiebt sich aus der ersten (1) und vorletzten Beobachtung (2)

$$\sin\psi = \frac{(w_2' - w_1') \cdot m \cdot C_1 \cdot C_2}{C_1 - C_2} = \frac{1{,}0785 \cdot 2\pi \cdot 77{,}1 \cdot 45{,}2}{31{,}9} \cdot 10^{-6},$$

$$= 0{,}0624,$$

$$\psi = 3^0\,35',$$

was der Grössenordnung nach mit dem Wien'schen Werte übereinstimmt.

Die Abnahme der Capacität mit der Zeit nach dem Ansetzen der Zelle ist vielfach beobachtet worden (Blondlot[1]), Bouty[2]), Lietzau[3]), Orlich[4]). Nach § 1 wird man annehmen müssen, dass mit der Zeit Gas von der Trennungsfläche zwischen Platin und dem Elektrolyten verschwindet. Dies könnte geschehen, indem eine ursprünglich anhaftende Gasschicht fortdiffundirt, vielleicht auch, indem die Diffusion im Elektrolyten schneller als im Platin erfolgt.

§ 7. Die Zelle wurde nunmehr in dem § 5 erwähnten Becherglase in einem Sandbade auf 79° erhitzt. Die Capacität $C_1$ stieg von 41,1 Mikrof. bei 20° auf 44,5 bei 60°, sank beim Erhitzen bei 79° auf 40,5 und war nach der Abkühlung bei 17,2° auf 25,6 gefallen. Ursprünglich, bei 20°, betrug der scheinbare Widerstand 7,16 $\Omega$, nach dem Erhitzen bei 17,2° 8,69 $\Omega$. Wiederholung dieses Processes erniedrigte die Capacität auf 22,2 Mikrof.

Verschiedene ähnliche Versuche führten zu demselben Resultat, das sich vermöge der durch das Auskochen bewirkten Verminderung des Gasgehaltes an der Grenzfläche zwischen Platin und dem Elektrolyten erklärt.

§ 8. Es wurde nunmehr versucht, die Zelle durch Gaszufuhr in den alten Zustand zurückzubringen. Zunächst wurde Wasserstoff aus chemisch reinem Zink mittels der Röhren $R_1$, $R_2$ eingeführt, sodass das Gas über der Flüssigkeit lagerte, darauf die Zelle umgedreht, sodass die Platten mit dem Gas in Berührung kamen, und geschüttelt.

Es gelang so schliesslich, die Capacität von dem Anfangswert 20 auf 33,4 hinaufzubringen. Sauerstoffzufuhr hatte keinen Einfluss. Wurde indessen mittels einer in das Becherglas gestellten Hülfselektrode elektrolytisch Wasserstoff oder Sauerstoff an den Elektroden entwickelt, so gelang es, besonders durch die Sauerstoffpolarisation, die Capacität wieder ungefähr bis zu dem gleich nach Ansetzen der Zelle beobachteten Anfangswert 73,8 hinauf zu steigern.

---

1) R. Blondlot, Journ. de Phys. (1) **10.** p. 277. 1881.
2) E. Bouty, Ann. de chim. et phys. **3.** p. 145. 1894.
3) W. Lietzau, Wied. Ann. **55.** p. 388. 1895.
4) l. c.

§ 9. Es ist bekannt, dass die Capacität des Platins durch das Platiniren stark erhöht wird. Zugleich zeigt nach den Versuchen von M. Wien das platinirte Platin eine ziemlich starke Abnahme der Capacität mit wachsender Schwingungsdauer, während die Capacität des blanken Platins von der Schwingungsdauer beinahe unabhängig ist.

Andererseits nimmt die Capacität der blanken Platinelektroden nach dem vorigen Paragraph zu, wenn man sie polarisirt. Diese Thatsachen führen auf die Frage, ob auch die Capacität des blanken, aber polarisirten Platins mit der Schwingungsdauer stark veränderlich ist. Zur Beantwortung dieser Frage musste die Capacität für Wechselstrom für verschiedene Schwingungsdauer gemessen werden, während auf die Platinelektroden der Zelle eine constante polarisirende Kraft wirkte. Solche Messungen wurden schon von Orlich an Hg-Elektroden angestellt; Fig. 2 zeigt die von mir benutzte Anordnung, in welcher die Zelle durch die Accumulatorenbatterie *B* polarisirt gehalten wird. Bei den folgenden Versuchen betrug die angelegte Kraft 1,9 Volt. Die benutzten Schwingungszahlen betrugen 85 und 269 pro Secunde.

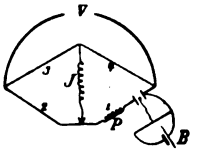



Fig. 2.

*V* Vibrationsgalvanometer. *J* Secundärspule des Inductoriums. *P* Variable Selbstinduction. *B* Batterie.

Die folgende Tabelle enthält die gewonnenen Ergebnisse.

| $\frac{n}{2\pi}$ | 85 | 269 | $\delta = \frac{C_{1\,(269)}}{C_{1\,(85)}}$ |
|---|---|---|---|
| *O* polarisirt | 147,9 | 97,4 | 0,66 |
| *O* „ | 120,3 | 80,8 | 0,67 |
| 16 Stunden nach Aufhebung der Polarisation | 72,4 | 71,3 | $0{,}98_5$ |
| *O* polarisirt | 176,4 | 92,4 | 0,52 |
| 28 St. n. Pol. | 73,4 | 72,3 | $0{,}98_5$ |
| *H* polarisirt | 211,7 | 98,2 | 0,46 |
| 18 St. n. Pol. | 87,0 | 84,2 | 0,97 |
| *H* polarisirt | 224,7 | 105,4 | 0,47 |
| 23 St. n. Pol. | 69,7 | 69,2 | 0,99 |

Wie man sieht, nimmt in der That die Capacität der polarisirten Elektroden mit wachsender Schwingungsdauer ab und zwar ungefähr wie $1/\sqrt{m}$, indem $\sqrt{85/269} = 0{,}56$ ist.

20 Stunden nach Entfernung der polarisirenden Kraft ist die Zelle wieder in ihren anfänglichen Zustand zurückgekehrt, in welchem die Capacität von der Schwingungsdauer nahezu unabhängig ist.

§ 10. Wenn durch das Auskochen auch der Elektrolyt ziemlich gasfrei gemacht werden kann, so ist von dieser Behandlung doch nur eine geringe Wirkung auf das Platin zu erwarten, aus welchem bekanntlich das Gas erst durch Anwendung lebhafter Glühhitze in ergiebiger Weise ausgetrieben wird. Es wurde daher ein zweiter, Fig. 3, in $^1/_3$ nat. Grösse dargestellter Apparat construirt, in welchem die Platinelektroden vor Einführung des Elektrolyten geglüht werden konnten.

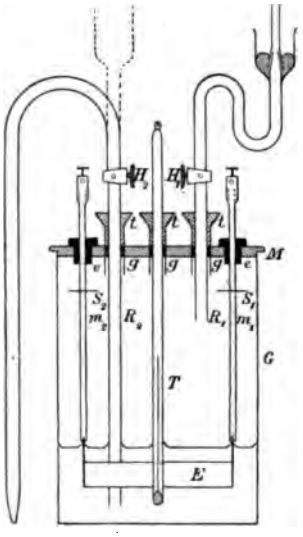


Fig. 3.

*G*, Fig. 3, ist ein dickwandiger Glascylinder, dessen Rand der aufgeschliffene Messingdeckel *M*, wenn eingefettet, luftdicht abschliesst. Durch kleine Trichter *t* im Deckel sind mittels Gummiringen *g* und darüber gegossenem Asphaltkitt luftdicht eingeführt das Thermometer *T*, das Rohr $R_1$, welches zur Quecksilberluftpumpe führt, das Rohr $R_2$, durch welches das Gefäss mit dem Elektrolyten gefüllt wird; endlich durch die Ebonitpfropfen *e* die dicken Messingdrähte *m*, welche durch Glimmerscheiben *S* gegen Wärmestrahlung geschützt sind. Die Messingdrähte besorgen die Zuleitung des Glühstromes zu den 0,01 mm dicken, $1 \times 6 = 6$ qcm grossen Platinblechen *E*, welche als Elektroden dienen. *G* stand in einem Wasserbade. Während des Glühens konnte die Messingplatte nebst den Drähten *m* durch fliessendes Wasser gekühlt werden, was bei starkem Glühstrom notwendig war, da *T*, $R_1 R_2$, $m_1 m_2$ durch Asphaltkitt gedichtet waren.

§ 11. Nachdem die Zelle zuerst mit dem Elektrolyten, wieder 0,1 norm. $H_2SO_4$, beschickt war, ergab sich $C_1 = 91{,}9$ Mikrof., nach mehreren Tagen war $C_1$ auf 45,8 gesunken (vgl. § 6). Die Zelle wurde nunmehr entleert, gereinigt, sorgfältig warm getrocknet und ausgepumpt, bis das Mac Leod-Manometer einen Druck von 0,067 mm anzeigte. Hierauf wurden die Elektroden 20′ lang durch einen Strom von 11,4 Amp. auf dunkler Rotglut erhalten und zeitweise das frei gewordene Gas abgepumpt. Der Anfangsdruck wurde wieder hergestellt, die Zelle gegen die Pumpe durch den Hahn $H_1$ abgesperrt und durch $R_2$ mit dem ausgekochten Elektrolyten gefüllt, indem die Spitze von $R_2$ unter der Flüssigkeit abgebrochen wurde. $C_1$ ergab sich, sofort gemessen, gleich 32,6, nach einem Tage gleich 19,3 Mikrof., Werte, wie sie auch durch das Auskochen erhalten waren.

§ 12. In einem zweiten Versuch wurde nun die Stärke des Glühstromes auf 16 Amp. gesteigert, das während des Glühens frei werdende Gas abgepumpt und das Glühen im ganzen während 80′ fortgesetzt. Da aber das Thermometer trotz der Wasserspülung schon nach 10′ lang fortgesetztem Glühen 100° erreichte, so musste dass Glühen jedesmal nach 10′ auf einige Zeit unterbrochen werden. Dabei zeigte sich, dass nach dem ersten Glühen der Druck sehr schnell stieg, alsdann immer langsamer, je länger das Glühen fortgesetzt wurde. Jedesmal wurde nach dem Glühen der Anfangsdruck von 0,02 mm wieder hergestellt.

Nach Einführen des Elektrolyten ergab sich $C_1$ sofort gleich 23,8, nach 45′ gleich 12,6, nach einem Tage gleich 8,14, nach drei Tagen 7,23 (vgl. § 6). Das ist ungefähr $^1/_{10}$ des Wertes, welchen frisch angesetzte Elektroden zeigen.

§ 13. *Controlversuch.* Das Gefäss wurde schliesslich noch einmal geleert, gereinigt und getrocknet, und, nachdem der Heber durch eine Art Trichter ersetzt war, das Glühen der Elektroden so lange fortgesetzt, bis derselbe Druck wie im vorigen Versuch erreicht war.

Liess man jetzt atmosphärischen Sauerstoff in die Zelle eintreten, so glühten die Elektroden nicht mehr so hell wie zuvor; namentlich erschienen die Ränder der Bleche wesentlich dunkler. Nachdem das Glühen beendet und der Elektrolyt

eingefüllt war, ergab die Messung 77,1 Mikrof. Das ist ungefähr derselbe Wert, den diese und die andere Zelle sogleich nach Zusammensetzung zeigte. 24 Stunden später war $C_1 = 32{,}8$ Mikrof.

Zum Schluss ergreife ich die Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Warburg, für die vielfache Anregung und stete Teilnahme an der vorliegenden Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Berlin, Physikalisches Institut, Juni 1901.

(Eingegangen 1. Juli 1901.)

## 9. *Ueber die Polarisationscapacität des Platins; von E. Warburg.*

§ 1. An einer polarisirbaren Elektrode bestehe ein harmonischer Wechselstrom $j = a \cdot \sin m t$. Nimmt man an, dass die polarisirenden Producte der Elektrolyse sich der Elektrode auflagern, ohne durch andere Vorgänge von ihr fortgeführt zu werden, dass die elektrolytischen Veränderungen mit der Stromrichtung sich umkehren, dass endlich die Polarisation der aufgelagerten Stoffmenge proportional ist, dann ergiebt sich die Polarisation der durchgegangenen Elektricitätsmenge proportional; das Verhältnis

$$\frac{\text{durchgegangene Elektricitätsmenge}}{\text{Polarisation}} = \text{Polarisationscapacität } C$$

ist also constant. Da ferner der Strom erst $^1/_4$ Schwingungsdauer nach Erreichung seines Maximalwertes seine Richtung wechselt, so tritt das Maximum der Polarisation um $^1/_4$ Schwingungsdauer später ein, als das Maximum der Stromstärke. Der periodisch variabele Teil der Polarisation ist unter diesen Voraussetzungen

$$(1) \qquad \frac{a}{C \cdot m} \cdot \sin\left(m t - \frac{\pi}{2}\right),$$

wo $C$ constant ist. Dieser von F. Kohlrausch[1]) behandelte Fall mag als Fall 1 bezeichnet werden.

Die Elektroden der Natur zeigen ein von dem Fall 1 mehr oder weniger abweichendes Verhalten. Das Maximum der Polarisation bleibt um weniger als $^1/_4$ Schwingungsdauer hinter dem Maximum der Stromstärke zurück, und die Polarisationscapacität $C$ nimmt mit wachsender Schwingungsdauer ab, sodass

$$(2) \qquad p = \frac{a}{C \cdot m} \cdot \sin\left(m t - \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\right),$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 443. 1872.

wo $\psi$ zwischen 0 und $\pi/4$ liegt und $C$ mit wachsendem $m$ abnimmt.[1]) So fand M. Wien l. c. für ausgeglühtes blankes Platin $\psi = 3^0\,30'$, die Capacität pro qcm $C_1$ 38,9 oder 38,0, je nachdem $m/2\pi = 128$ oder 256 war. Viel stärker sind nach demselben Autor die Abweichungen für platinirtes Platin in verdünnter Schwefelsäure, nämlich $\psi = 31^0$ und $C_1$ 2530, 2205, 1515, je nachdem $m/2\pi = 64$, 128, 256 ist.

Diese Ergebnisse können durch Berücksichtigung von Vorgängen erklärt werden, welche die elektrolytischen Producte von den Elektroden fortführen. Ein solcher Vorgang ist die Diffusion. Diese bewirkt, dass die elektrolytischen Producte an der Elektrode langsamer als die Stromstärke wachsen; dabei muss die Wirkung der Diffusion um so mehr zurücktreten, je schneller die Stromwechsel erfolgen, oder die Capacität muss mit wachsender Schwingungszahl abnehmen. Ferner ist auch ersichtlich, dass wegen der Diffusion das Maximum der Polarisation um weniger als $^1/_4$ Schwingungsdauer hinter dem Maximum der Stromstärke zurückbleiben muss.

Wenn nun, wie z. B. bei der Elektrolyse des Silbernitrates zwischen Silberelektroden, die Wirkung des Wechselstromes darauf hinausläuft, die Concentration der Salzlösung an der Elektrode periodisch zu verändern, so lässt sich die Theorie mit Berücksichtigung der Diffusion vollständig bis zur zahlenmässigen Auswertung der Capacität durchführen, wobei der Diffusionstheorie gemäss die durch den Strom zu der Elektrode hingeführte Salzmenge gleich der durch Diffusion von ihr fortgeführten zu setzen und die Helmholtz'sche Theorie des Concentrationselementes anzuwenden ist. Dabei ergiebt sich für unendlich kleine Stromoscillationen das Resultat, dass $\psi = \pi/4$ und $C$ mit $\sqrt{m}$ umgekehrt proportional ist.[2])

Die Bedingungen dieses Falles hat Frl. Neumann[3]) bei der Polarisation von Quecksilber in verdünnter Schwefelsäure, welche mit Quecksilbersulfat gesättigt ist, sowie von Silber in

1) M. Wien, Wied. Ann. **58.** p. 37. 1896; E. Orlich, Inaugural-Dissertation, Berlin 1896.

2) E. Warburg, Verhandl. d. physik. Gesellsch. zu Berlin **15.** p. 120. 1896; Wied. Ann. **67.** p. 493. 1899.

3) E. Neumann, Wied. Ann. **67.** p. 499. 1899.

verdünnter Salpetersäure mit Zusatz von Silbernitrat realisiren können.

Dieser Fall (Fall 2) und der von F. Kohlrausch behandelte (Fall 1) stellen Grenzfälle dar, zwischen denen die meisten in der Natur vorkommenden Fälle liegen, ohne den einen oder anderen zu erreichen.

Daraus scheint hervorzugehen, dass in der Regel nur ein Teil der elektrolytischen Zersetzungsproducte der Diffusion verfällt, während der andere Teil der Elektrode sich auflagert, und ohne eine Rechnung anzustellen kann man erwarten, dass diese Annahme zu Formeln führe, welche den Beobachtungen angepasst werden können. Gleichwohl mag eine Entwickelung solcher Formeln, wie ich im Folgenden sie zu geben mir erlauben möchte, nicht überflüssig erscheinen.

§ 2. Ich betrachte den am meisten untersuchten Fall der Polarisation des Platins in verdünnter Schwefelsäure. Der Strom liefert in diesem Falle an der Kathode Wasserstoff, an der Anode Sauerstoff und Schwefelsäure. Die Polarisation sehe ich als bedingt durch die gasförmigen Producte an, deren Wirkungsweise dahinstellend und vernachlässige die Wirkung der Concentrationsänderung der Schwefelsäure.

Ueber dem Elektrolyten, in welchem die Platinelektrode untergetaucht ist, lagere eine Atmosphäre von Wasserstoff von constantem Druck, bei diesem seien das Platin und der Elektrolyt mit Wasserstoff gesättigt, also untereinander und mit dem Wasserstoff im Gleichgewicht. Wir nehmen an, dass der an der Anode abgeschiedene Sauerstoff ganz zur Oxydation des Wasserstoffs verwendet werde; dann kommt die chemische Wirkung des Wechselstroms auf die Grenzfläche darauf hinaus, dass derselben abwechselnd Wasserstoff zugeführt und entzogen wird. Würde der zugeführte Wasserstoff ganz der Diffusion in das Platin und in den Elektrolyten verfallen, dann erhielte man den Grenzfall 2.

Ich will nun die § 6 näher zu begründende Annahme machen, dass an der Oberfläche des Platins eine Belegung mit Wasserstoff von der Flächendichte $\Gamma$ lagert, welche eine Function der räumlichen Dichte $\gamma$ des Wasserstoffs im Elektrolyten ist. Ferner werde vorausgesetzt, dass die Diffusion im Elektrolyten sowohl wie im Platin dem Fick'schen Diffusionsgesetz folgt,

und dass auch für Platin ein Bunsen'scher Absorptionscoefficient angenommen werden kann.

§ 3. Sei nun die $z$-Axe senkrecht zur Elektrode, der Anfang der $z$ liege in dieser, die positive Seite der $z$-Axe im Elektrolyten, die negative im Platin.

Nach den gemachten Annahmen ist

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \varkappa \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial \gamma'}{\partial t} = \varkappa' \cdot \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial z^2}, \tag{3}$$

wo $\gamma$, $\gamma'$ die räumliche Dichte des Wasserstoffs im Elektrolyten bez. im Platin, $\varkappa$, $\varkappa'$ die Diffusionsconstanten des Wasserstoffs in diesen Körpern bedeuten.

An der Grenzfläche zwischen Platin und Elektrolyt ($z=0$) muss sein

$$\frac{j}{q} \cdot \frac{\mathfrak{A} \cdot A}{107{,}9} = g \sin m t = -\varkappa \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \varkappa' \cdot \frac{\partial \gamma'}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \tag{4}$$

wo $j$ die Stromstärke, $q$ den Querschnitt des Elektrolyten, $A$ das elektrochemische Aequivalent des Silbers, $\mathfrak{A}$ das Aequivalentgewicht des Wasserstoffs, $\Gamma$ die Oberflächendichte des Wasserstoffs an der Grenzfläche bedeutet. $\Gamma$ ist Function von $\gamma$, sodass

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \tag{4a}$$

Sind, wie wir annehmen, die Stromoscillationen unendlich klein, so kann $\mu$ als Constante behandelt werden.

Weiter muss sein für $z = 0$

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha'}, \tag{5}$$

wo $\alpha$, $\alpha'$ die Bunsen'schen Absorptionscoefficienten des Wasserstoffs im Elektrolyten bez. im Platin bedeuten.

Endlich ist für

$$\begin{cases} z = +\infty & z = -\infty, \\ \gamma = \gamma_0 & \gamma' = \gamma_0 \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}, \end{cases}$$

**Dichte** des Wasserstoffs im Elektrolyten für den **stand** bedeutet.

§ 4. Den Bedingungen (3) bis (6) genügen die Ausdrücke

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma = \gamma_0 - B.g.e^{-\frac{z}{\zeta}}.\cos\left(mt - \frac{z}{\zeta} + \vartheta\right), \\ \gamma' = \gamma_0 \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} - B.g.e^{-\frac{z}{\zeta'}}.\cos\left(mt + \frac{z}{\zeta'} + \vartheta\right), \\ \text{wo} \\ \zeta = \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}}, \quad \zeta' = \sqrt{\frac{2\varkappa'}{m}}, \quad g = \frac{A.\mathfrak{A}}{107{,}9} \cdot \frac{a}{q}, \\ \operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{1}{1+\mu.\sqrt{\frac{2m}{\varkappa_1}}}, \quad \varkappa_1 = \varkappa.\delta, \quad \delta = \left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\right)^2, \\ B = \dfrac{\sin\vartheta}{\sqrt{\frac{m\varkappa_1}{2}}}, \end{array}\right.$$

und alle Wurzelzeichen positiv zu nehmen sind.

Für $\varkappa' = 0$ wird $\delta = 1$, $\varkappa_1 = \varkappa$. Daraus folgt, dass man bei der Berechnung der Wasserstoffdichte $\gamma$ von der Diffusion im Platin hätte absehen können, wenn man anstatt der Diffusionsconstante $\varkappa$ die grössere, nämlich $\delta$ fache, $\varkappa_1$ in Rechnung gebracht hätte.

Die elektromotorische Kraft $e$ an der Berührungsfläche zwischen dem Platin und dem Elektrolyten kann als Function von $\gamma$ in $z = 0$ angesehen werden. Für unendlich kleine Oscillationen ist dann

$$(8)\qquad \frac{\partial e}{\partial \gamma} = \frac{e - e_0}{\gamma - \gamma_0} = \frac{p}{\gamma - \gamma_0}.$$

Also

$$p = (\gamma - \gamma_0)_{z=0} \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0} = -B.g.\cos(mt + \vartheta).\left(\frac{\partial e}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0},$$

oder

$$(9)\qquad p = g \cdot \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\frac{m\varkappa_1}{2}}} \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0}.\sin\left(mt - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right).$$

Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit (2) findet man $\psi = \vartheta$ und folgende Endformeln für die Phasengrösse $\psi$ und die Capacität $C_1 = (C/q)$

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\psi = \dfrac{1}{1+\mu\cdot\sqrt{\dfrac{2m}{\varkappa_1}}}, \quad \varkappa_1 = \varkappa\cdot\left(1+\dfrac{\alpha'}{\alpha}\cdot\sqrt{\dfrac{\varkappa}{\varkappa}}\right)\cdot \\ C_1 = \dfrac{107{,}9}{A\cdot\mathfrak{A}}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial e}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0}}\cdot\dfrac{\sqrt{\dfrac{\varkappa_1}{2m}}}{\sin\psi}\cdot \end{cases}$$

§ 5. Ist nun

1. $\mu\cdot\sqrt{2m/\varkappa_1}$ unendlich gross gegen 1, so ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\mu\sqrt{\dfrac{2m}{\varkappa_1}}}$$

unendlich klein und gleich $\sin\psi$. Mithin $\psi = 0$

$$C_1 = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial e}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0}}\cdot\frac{107{,}9}{A\cdot\mathfrak{A}}$$

unabhängig von der Schwingungsdauer und man hat den Grenzfall 1.

Ist

2. $\mu\cdot\sqrt{2m/\varkappa_1}$ unendlich klein gegen 1, so wird

$$\operatorname{tg}\psi = 1, \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{m}}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\partial e}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0}}\cdot\frac{107{,}9}{A\cdot\mathfrak{A}}$$

und man hat den Grenzfall 2, in welchem $C_1$ proportional $1/\sqrt{m}$ und $\psi = (\pi/4)$ wird.

Die gewöhnlich vorkommenden Fälle, welche zwischen den Grenzfällen 1 und 2 liegen, werden durch die allgemeinen Formeln (10) dargestellt, wenn $\mu = (\partial\Gamma/\partial\gamma)$ positiv angenommen wird.

Alsdann liegt $\psi$ zwischen 0 und $\pi/4$ und nimmt $C_1$ langsamer als $1/\sqrt{m}$ ab, da $\sin\psi$ mit wachsendem $m$ abnimmt. In der That ist für $\psi$ nie ein Wert grösser als $\pi/4$ beobachtet worden, und es ist kein Fall gefunden, in welchem $C_1$ mit wachsendem $m$ schneller als $1/\sqrt{m}$ abnehme.

§ 6. Bei der Unterscheidung der Fälle spielt eine wichtige Rolle die Grösse $\mu = (\partial\Gamma/\partial\gamma)$, über welche sich leider für den absorbirten Wasserstoff nichts direct ermitteln lässt. Doch

kann man das Verhalten dieser Grösse in einem anderen Falle bestimmen. Zusatz von Quecksilbersulfat zu wässerigen Salzlösungen oder zu Wasser verkleinert die Constante der Oberflächenspannung der Grenzfläche dieser Körper gegen Quecksilber.[1]) Daraus lässt sich thermodynamisch ableiten, dass die Concentration des Quecksilbersulfats in der Nähe der Oberfläche grösser sein muss als im Innern, was nach Gibbs durch eine gewisse, zu der homogenen Raumerfüllung im Innern hinzukommende Oberflächendichte $\Gamma$ des Quecksilbersulfats beschrieben werden kann, und zwar liefert die Thermodynamik für $\Gamma$ den Wert[2]):

$$\Gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} = 0, \tag{11}$$

wo $\gamma$ die Dichtigkeit des Quecksilbersulfats im Innern, $\sigma$ die Constante der Oberflächenspannung bedeutet. $F$ ist die Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um die Masseneinheit des Quecksilbersulfats aus einem bestimmten Normalzustand in die Flüssigkeit mit gleichförmiger Verbreitung auf umkehrbarem Wege einzuführen, sodass Druck und Temperatur der Flüssigkeit dabei ungeändert bleiben. Aus den von Hrn. Planck[3]) gegebenen Werten der Energie und Entropie einer verdünnten Lösung ergiebt sich

$$\frac{\partial F}{\partial C} = \frac{1}{M} \cdot \frac{R\vartheta}{C}, \tag{12}$$

wenn $M$ das Moleculargewicht des Quecksilbersulfats, $R$ die Gasconstante, $\vartheta$ die absolute Temperatur, $C$ die Concentration im Sinne des Hrn. Planck bedeutet. Da für sehr verdünnte Lösungen $C$ mit $\gamma$ proportional ist, so ergiebt sich

$$\gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial \gamma} = C \frac{\partial F}{\partial C}, \tag{13}$$

und daraus

$$\Gamma = -\gamma \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} \cdot \frac{M}{R\vartheta}. \tag{14}$$

1) E. Warburg, Wied. Ann. **38.** p. 336. 1889.

2) E. Warburg, Wied. Ann. **41.** p. 7. 1890. Die Concentrationsänderungen an der Oberfläche erfolgen stets in dem Sinne einer Abnahme der Oberflächenspannung. Sehr mit Unrecht hat kürzlich Hr. Palmaer diese thermodynamisch begründeten Folgerungen für eine ad hoc gemachte Hypothese erklärt (W. Palmaer, Zeitschr. f. phys. Chem. **36.** p. 669. 1901).

3) M. Planck, Wied. Ann. **32.** p. 488. 1887.

Zur Berechnung von $\gamma$ können Versuche herangezogen werden, welche Hr. Griffiths auf meine Veranlassung gemacht hat und welche von Hrn. G. Meyer mitgeteilt sind.[1]) Hr. Griffiths hat die Oberflächenspannung $\sigma'$ für Quecksilber in Wasser und in einer Lösung von Magnesiumsulfat in Wasser, welche 0,05 Grammäquivalente Magnesiumsulfat im Liter enthielt, für verschiedenen Gehalt dieser Lösungen an Quecksilbersulfat bestimmt, wobei er die Oberflächenspannung $\sigma_0$ zwischen Quecksilber und Wasser gleich 100 setzte. Es ist also

$$\sigma = \sigma' \cdot \frac{\sigma_0}{100},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} = \frac{\sigma_0}{100} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial \gamma}.$$

Setzt man

$$\vartheta = 291^0, \quad R = 837 \cdot 10^5, \quad M = 296,$$

endlich nach Quincke

$$\sigma_0 = 0{,}4 \cdot 981,$$

so wird

$$\Gamma = \frac{296 \cdot 0{,}4 \cdot 981}{837 \cdot 10^5 \cdot 291 \cdot 100} \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial \gamma} = 4{,}76 \cdot 10^{-8} \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial \gamma}.$$

Die folgende Tabelle enthält für Lösungen von Quecksilbersulfat in Wasser in den ersten beiden Columnen die Beobachtungsergebnisse des Hrn. Griffiths, in der dritten unter $\bar{\gamma}$ den Mittelwert von $\gamma$, auf welchen sich der Wert $\bar{\gamma} / \Delta\gamma \cdot \Delta\sigma'$ der vierten Columne bezieht, in der fünften Columne den Wert von $\Gamma$ in Milliontel Milligramm auf 1 qcm.

Quecksilbersulfat in Wasser.

| $\gamma \cdot 10^4$ | $\sigma'$ | $\bar{\gamma} \cdot 10^4$ | $-\frac{\bar{\gamma}}{\Delta\gamma} \cdot \Delta\sigma'$ | $\Gamma^{g/qcm} \cdot 10^9$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,000 | 100 | — | — | — |
| 0,883 | 97,4 | 0,442 | 1,303 | 62,1 |
| 1,767 | 90,4 | 1,325 | 10,50 | 500 |
| 3,534 | 86,9 | 2,651 | 5,25 | 250 |
| 14,138 | 82,8 | 8,836 | 3,42 | 163 |
| 28,275 | 81,5 | 21,2 | 1,95 | 93 |
| 56,55 | 81,2 | 42,4 | 0,45 | 21 |
| 113,1 | 80,8 | 84,8 | 0,60 | 29 |

1) G. Meyer, Wied. Ann. 45. p. 509. 1892.

In der folgenden Tabelle, welche sich auf Quecksilbersulfat in der oben erwähnten Lösung von Magnesiumsulfat bezieht, sind die dritte und vierte Columne fortgelassen.

| $\gamma \cdot 10^4$ | $\sigma'$ | $\Gamma^{g/qcm} \cdot 10^9$ |
|---|---|---|
| 0,000 | 94,3 | — |
| 0,900 | 93,4 | 21,4 |
| 1,201 | 90,8 | 433 |
| 1,601 | 87,1 | 619 |
| 6,406 | 82,5 | 182 |
| 25,625 | 80,2 | 91 |
| 102,5 | 76,7 | 139 |

Wie man sieht, nimmt die Oberflächendichte $\Gamma$ mit wachsender Concentration des Quecksilbersulfats zuerst zu, erreicht ein Maximum bei einer noch sehr kleinen Concentration und nimmt alsdann wieder ab.

Vermutungsweise kann man annehmen, dass ähnliche thermodynamische Betrachtungen auf den Fall des absorbirten Wasserstoffs angewandt nach Einsetzung der entsprechenden Daten hier zu ähnlichen Ergebnissen führen.[1])

§ 7. Hiervon kann eine Anwendung auf einige Versuche des Hrn. Schönherr[2]) gemacht werden. Derselbe fand, dass blankes Platin im unpolarisirten Zustand sich nahezu dem Fall 1 entsprechend, im polarisirten Zustand sich nahezu dem Fall 2 (§ 1 und § 5) entsprechend verhält. Wenn man die Diffusionscoefficienten $\varkappa$, $\varkappa'$ des Wasserstoffs in erster Annäherung als unabhängig von der Concentration ansieht, so kann jene Verschiedenheit nur von einer Verschiedenheit im Verhalten der Grösse $\mu$ herrühren und in der That dadurch erklärt werden, dass die Oberflächendichte $\Gamma$ des Wasserstoffs im unpolarisirten Zustande, bei kleiner Wasserstoffconcentration, weit vom Maximum entfernt ist, im polarisirten Zustande, bei grosser Wasserstoffconcentration, dem Maximum nahe liegt. Das giebt für den unpolarisirten Zustand nach § 6 grosses $\mu$ und Annäherung an den Fall 1, im polarisirten Zustand

1) Nach den Versuchen von A. Kundt (Wied. Ann. 12. p. 548. 1881) nimmt die Oberflächenspannung der Trennungsfläche zwischen Alkohol oder Aether und Wasserstoff mit zunehmendem Wasserstoffdruck ab.

2) P. Schönherr, Ann. d. Phys. 6. p. 116. 1901.

kleines $\mu$ und Annäherung an den Fall 2, so wie es von Hrn. Schönherr beobachtet wurde.

§ 8. Für den Fall des Quecksilbersulfats in Wasser und wässeriger Magnesiumsulfatlösung wird $\mu$ jenseits des Maximums von $\Gamma$ negativ. Negative Werte von $\mu$ ergeben nach (10) $\psi > \pi/4$, was nach dem Vorstehenden zwar möglich erscheint, aber bisher nie beobachtet wurde.

§ 9. Schreibt man den Ausdruck für die Capacität (10) in der Form:

$$C_1 = \frac{107{,}9}{A \cdot \mathfrak{N}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial e}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=\gamma_0}} \cdot \frac{\mu}{q \cdot \sqrt{2+2q+q^2}}, \tag{10a}$$

wo

$$q = \mu \cdot \sqrt{\frac{2m}{x_1}},$$

so erkennt man, dass $C_1$ mit zunehmender Diffusionsconstante zunimmt.

§ 10. Bekannt ist die grosse Polarisationscapacität des Platinmohrs, welche bei der Kohlrausch'schen Methode der Messung elektrolytischer Widerstände eine wichtige Rolle spielt. Gewöhnlich schreibt man die grosse Capacität des Mohrs seiner grossen Oberfläche zu, eine Annahme, welche schon von Hrn. M. Wien[1]) als unwahrscheinlich bezeichnet und wohl durch dessen eigene Versuche endgültig widerlegt wird. In der That ist nach diesen Versuchen die Capacität des blanken Platins von der Schwingungszahl nahezu unabhängig, während die Capacität des Platinmohrs mit wachsender Schwingungszahl erheblich abnimmt und eine Annäherung an den Fall 2 zeigt.

Die grosse Capacität des Platinmohrs scheint mir vielmehr folgende Ursache zu haben. Es ist anzunehmen, dass die Körnchen des Mohrs miteinander in metallischer Verbindung stehen, und dass der Elektrolyt den Raum zwischen den Körnchen erfüllt. Man stelle sich nun vereinfachend vor, dass die Oberfläche des Platins, auf welcher der Mohr lagert, mit sehr vielen kleinen senkrecht zur Oberfläche angeordneten Stäbchen aus Platin besetzt sei. Der polarisirende Strom wird dann nicht merklich in die engen Zwischenräume zwischen den Stäbchen eindringen, sondern an ihrer äusseren Oberfläche ein Ende

1) M. Wien, Wied. Ann. 58. p. 56. 1896.

finden. Hierdurch wird diese äussere Oberfläche bei der Wasserstoffpolarisation mit Wasserstoff beladen. Aber diese Wasserstoffbeladung wird durch Localströme, die sich zwischen den oberflächlichen beladenen und den in der Tiefe gelegenen unbeladenen Stellen bilden, schnell in die Tiefe befördert werden. Dies hat denselben Effect, wie ein grosser Wert der Diffusionsconstante, wodurch der Wasserstoff von der äusseren Oberfläche, deren Beschaffenheit die Polarisation bedingt, fortgeschafft und die Capacität nach § 7 erhöht, nach Formel (10) von der Schwingungszahl abhängig gemacht wird. Das entspricht ganz dem Verhalten des Platinmohrs, wie es Hr. M. Wien beobachtete.

Berlin, Physik. Institut.

(Eingegangen 1. Juli 1901.)

## 10. *Ueber die Ausdehnung von Porzellan und Glas in hoher Temperatur;* *von L. Holborn und E. Grüneisen.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Für die Bestimmung der Ausdehnung fester Körper in hoher Temperatur ist früher eine Methode angegeben worden[1]), nach der zuerst für einen besonderen Zweck Versuche mit Platiniridium und Porzellan angestellt wurden. Nachdem alsdann später ausgedehnte Messungsreihen an einigen Metallen gemacht worden sind[2]), haben wir jetzt die Untersuchung für Porzellan zu Ende geführt und damit noch Messungen des schwer schmelzbaren Jenaer Thermometerglases $59^{III}$ verbunden.

Diese beiden Körper bieten grössere Schwierigkeiten als die Metalle. Denn einmal ist die Ausdehnung kleiner, sodann verlangen sie ein Heizrohr von gleichmässigerer Temperatur, da ihr geringes Wärmeleitvermögen nichts zum Ausgleich einer ungleichmässigen Heizung beiträgt. Durch die Herstellung eines dritten Heizrohres liess sich nach mannigfachen Versuchen erreichen, dass der Temperaturunterschied längs den zu untersuchenden Stäben aus Porzellan und Glas nicht grösser ausfiel als bei den früher im zweiten Heizrohr erhitzten Metallstäben.

Um ferner den Einfluss, den die Schwankungen der Zimmertemperatur auf die Entfernung der feststehenden Mikroskope ausübten, möglichst zu verkleinern, wurde an Stelle der früher benutzten Messingschiene als Basis eine Schiene aus Nickelstahl angebracht. Ihr Ausdehnungscoefficient beträgt etwa $2{,}5 \times 10^{-6}$.

### 1. Berliner Porzellan.

Wir haben zwei unglasirte Stäbe aus Berliner Porzellan untersucht, welche für diesen Zweck besonders von der

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 506. 1900.
2) L. Holborn u. A. Day, l. c. 4. p. 104. 1901.

königl. Manufactur angefertigt wurden. Der eine hatte einen kreisförmigen Querschnitt (6,5 mm Durchmesser) und war durch Pressen hergestellt, während der andere von rechteckigem Querschnitt (5,5 × 6,5 mm) vor dem Brennen aus der Masse herausgeschnitten war.

Die Teilung wurde wiederum in der Axe der Stäbe angebracht. Die Teilstriche waren mit dem Diamanten auf gut polirten Ebenen gezogen und mit Pariser Rot eingerieben. Gegenüber der früher mit der Kupferscheibe eingefraisten Teilung liessen diese neuen Striche an Schärfe und Feinheit nichts zu wünschen übrig, ebensowenig an Haltbarkeit während des Heizens bis 1000°. Die Ablesung erfolgte auch in höchster Temperatur nur bei künstlicher Beleuchtung. Bei 1000° jedoch war die Einstellung nicht mehr so sicher als bei den tieferen Temperaturen, der Ablesefehler wuchs ungefähr auf das Doppelte. Würde man die Heizung noch höher treiben, so wäre bald überhaupt keine Einstellung mehr möglich, da die Strahlungsvermögen von Porzellan und Pariser Rot einander immer näher kommen.

In Bezug auf die sonstigen Einzelheiten der Messung verweisen wir auf die früheren Untersuchungen.

Tab. 1 enthält die Temperaturverteilung im Heizrohr, und zwar bedeuten die Zahlen die Temperaturunterschiede gegen die Mitte, die an 8 Stellen des Rohres mit zwei an ihrer heissen Lötstelle verbundenen Thermoelementen gemessen wurden. Aus diesen Werten ist das Mittel $\Delta$ auf graphischem Wege abgeleitet.

Tabelle 1.

Temperaturgefälle im Heizrohr.

| Von der Mitte entfernt | 250° | 500° | 750° | 1000° |
|---|---|---|---|---|
| 6 cm Ost | + 5,7° | + 9,5° | + 12,3° | + 15,6° |
| 12 „ „ | + 6,7 | + 10,9 | + 13,5 | + 15,0 |
| 19 „ „ | + 5,9 | + 10,8 | + 11,3 | + 9,0 |
| 23 „ „ | − 10,2 | − 18,0 | − 28,8 | − 38.3 |
| 6 cm West | − 1,1 | − 4,8 | − 8,9 | − 12,3 |
| 12 „ „ | − 0,2 | − 2,2 | − 4,6 | − 8,0 |
| 19 „ „ | − 9,2 | − 16,3 | − 21,8 | − 30,4 |
| 23 „ „ | − 25,1 | − 39,0 | − 52,3 | − 64,0 |
| $\Delta$ | − 1,6 | − 2,6 | − 4,4 | − 7,8 |

In der Tab. 2a teilen wir die Beobachtungen mit, die mit dem runden Stabe angestellt wurden. Die Temperatur $t$ ist in Grad (Quecksilberthermometer bei Zimmertemperatur) oder in Mikrovolt (Thermoelement) ausgedrückt; $M$ und $M'$ bedeuten die Verschiebungen, die an den beiden Mikroskopen abgelesen wurden, $\Sigma$ ihre Summe, d. h. die Ausdehnung des Stabes.

In Tab. 2b ist die Ausdehnung auf die runden Temperaturwerte 250°, 375° etc. zurückgeführt. Die zusammengehörigen Werte sind gemittelt (Columne $\lambda_s$ beobachtet), $f$ bedeutet die dauernde Längenänderung, die der Stab infolge einer Heizung zwischen zwei Beobachtungsreihen erfuhr.

Die Tab. 3a und 3b enthalten in ähnlicher Anordnung die Ergebnisse für den viereckigen Porzellanstab.

Die vorliegenden Beobachtungsreihen bestätigen für beide Stäbe das schon früher gefundene Resultat, dass sich die Ausdehnung des Porzellans zwischen 0 und 1000° nicht durchweg durch eine Formel zweiten Grades darstellen lässt. Die Zunahme der Ausdehnung wird in der Nähe von 700° kleiner, um jenseits 800° schneller als vorher zu wachsen. Diese Erscheinung deutet auf eine Zustandsänderung des Porzellans hin, wofür auch eine bekannte Erfahrung der Techniker spricht. Denn diese befürchten ein Springen der Porzellanerzeugnisse am meisten in der dunklen Rotglut und achten besonders in diesem Temperaturintervall auf eine langsame Abkühlung der Brennöfen.

Zwischen 0° und 625° reicht eine quadratische Gleichung für die Darstellung der Beobachtungen aus. Für die beiden Stäbe lauten die Gleichungen, wenn die Verlängerung in $\mu$ ausgedrückt wird:

$$\lambda_s = 1{,}475\,t + 0{,}000\,573\,t^2,$$
$$\lambda_s' = 1{,}554\,t + 0{,}000\,456\,t^2.$$

Auf die Einheit der Länge bezogen ist die Ausdehnung $\lambda$ in den beiden Fällen:

$$\lambda = \{3027\,t + 1{,}177\,t^2\}\,10^{-9},$$
$$\lambda' = \{3188\,t + 0{,}936\,t^2\}\,10^{-9}.$$

In den Tab. 2b und 3b sind noch die nach diesen Formeln berechneten Werte von $\lambda_s$ aufgenommen. Ferner enthält die letzte Columne die Zahlen für $\lambda . 10^6$, für die bis 625° die Rechnung, höher hinauf die Beobachtung zu Grunde liegt.

## Tabelle 2a.

Runder Porzellanstab (gepresst).

| 1901 | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18. April | 17,5° | | | | 17,5° | | | |
| | 1814 MV | 0,069 | 0,299 | 0,368 | 1822 MV | 0,070 | 0,300 | 0,370 |
| | 2888 | −0,060 | 0,276 | 0,216 | 2889 | −0,060 | 0,274 | 0,214 |
| | 4055 | 0,105 | 0,133 | 0,238 | 4061 | 0,109 | 0,129 | 0,238 |
| 19. April | 17,6° | | | | 17,6° | | | |
| | 1803 MV | 0,075 | 0,306 | 0,381 | 1809 MV | 0,076 | 0,306 | 0,382 |
| | 2872 | −0,028 | 0,245 | 0,217 | 2880 | −0,033 | 0,245 | 0,212 |
| | 4051 | 0,050 | 0,190 | 0,240 | 4057 | 0,057 | 0,185 | 0,242 |
| 20. April | 17,7° | | | | 17,7° | | | |
| | 5294 MV | 0,090 | 1,009 | 1,099 | 5307 MV | 0,094 | 1,004 | 1,098 |
| | 6550 | −0,028 | 0,241 | 0,213 | 6552 | −0,034 | 0,240 | 0,206 |
| | 9210 | −0,039 | 0,732 | 0,693 | 9219 | −0,046 | 0,734 | 0,688 |
| 22. April | 17,0° | | | | 17,0° | | | |
| | 5253 MV | −0,081 | 1,155 | 1,074 | 5254 MV | −0,073 | 1,152 | 1,079 |
| | 6549 | −0,006 | 0,211 | 0,205 | 6554 | −0,006 | 0,216 | 0,210 |
| | 7972 | −0,003 | 0,346 | 0,343 | 7978 | −0,003 | 0,350 | 0,347 |
| 23. April | 17,8° | | | | 17,8° | | | |
| | 9231 MV | −0,051 | 2,024 | 1,973 | 9228 MV | −0,052 | 2,025 | 1,973 |
| | 6512 | 0,018 | −0,709 | −0,691 | 6487 | 0,024 | −0,718 | −0,694 |
| | 4054 | 0,152 | −0,643 | −0,491 | 4050 | 0,151 | −0,640 | −0,489 |
| 17. Mai | 18,9° | | | | 18,9° | | | |
| | 5431 MV | 0,106 | 1,001 | 1,107 | 5425 MV | 0,112 | 0,995 | 1,107 |
| 18. Mai | 19,0° | | | | 19,0° | | | |
| | 5437 MV | −0,075 | 1,198 | 1,123 | 5445 MV | −0,068 | 1,188 | 1,120 |
| | 6088 | +0,003 | 0,113 | 0,116 | 6094 | −0,002 | 0,115 | 0,113 |
| | 6747 | −0,007 | 0,125 | 0,118 | 6747 | −0,008 | 0,125 | 0,117 |
| 20. Mai | 18,1° | | | | 18,1° | | | |
| | 9565 MV | 0,029 | 2,072 | 2,101 | 9574 MV | 0,027 | 2,061 | 2,088 |

## Tabelle 2b.

Runder Porzellanstab (gepresst), 487,3 mm lang bei 0°.

| April | 18. | 19. | 20. | 22. | 23. | 24. | Mai 17. | 18. | 20. | 21. | $\lambda$, beob. (mm) | $\lambda$, ber. (mm) | $\lambda \cdot 10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | −0,014 | +0,007 | +0,038 | −0,008 | −0,024 | | −0,013 | −0,010 | +0,030 | | — | — | — |
| 0—250° | 0,397 | 0,411 | — | — | — | — | — | — | — | — | 0,404 | 0,405 | 830 |
| 250—375 | 0,231 | 0,231 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 0—375 | *0,628* | *0,642* | — | — | — | — | — | — | — | — | 0,635 | 0,634 | 1301 |
| 375—500 | 0,246 | 0,247 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 0—500 | *0,873* | *0,889* | — | — | — | — | — | — | — | — | 0,881 | 0,881 | 1808 |
| 0—625 | — | — | 1,154 | 1,141 | — | — | 1,138 | 1,149 | — | — | 1,145 | 1,146 | 2352 |
| 625—690 | — | — | — | — | — | — | — | 0,120 | — | — | — | — | — |
| 0—690 | — | — | — | — | — | — | — | *1,269* | — | — | 1,269 | (1,291) | 2604 |
| 625—750 | — | — | 0,227 | 0,215 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 690—750 | — | — | — | — | — | — | — | 0,114 | — | — | — | — | — |
| 0—750 | — | — | *1,381* | *1,356* | — | — | — | *1,383* | — | — | 1,373 | (1,429) | 2818 |
| 750—875 | — | — | — | 0,339 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 0—875 | — | — | — | *1,713* | — | — | — | — | — | — | 1,713 | (1,730) | 3515 |
| 750—1000 | — | — | 0,728 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 0—1000 | — | — | *2,109* | — | 2,080 | — | — | — | 2,129 | — | 2,103 | (2,049) | 4315 |

Tabelle 3a.

Viereckiger Porzellanstab (geschnitten).

| 1901 | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4. Mai | 18,4° | | | | 18,4° | | | |
| | 4106 MV | −0,045 | 0,900 | 0,855 | 4116 MV | −0,041 | 0,898 | 0,857 |
| | 6586 | 0,041 | 0,436 | 0,477 | 6601 | 0,037 | 0,437 | 0,474 |
| | 9298 | −0,012 | 0,716 | 0,704 | 9309 | −0,016 | 0,720 | 0,704 |
| 7. Mai | 17,3° | | | | 17,3° | | | |
| | 1842 MV | −0,016 | 0,407 | 0,391 | 1853 MV | −0,015 | 0,408 | 0,393 |
| | 4177 | −0,049 | 0,525 | 0,476 | 4186 | −0,048 | 0,519 | 0,471 |
| | 6703 | −0,008 | 0,467 | 0,459 | 6703 | −0,007 | 0,469 | 0,462 |
| | 9556 | −0,004 | 0,729 | 0,725 | 9564 | −0,005 | 0,720 | 0,715 |
| 8. Mai | 17,7° | | | | 17,7° | | | |
| | 2972 MV | −0,118 | 0,742 | 0,624 | 2976 MV | −0,126 | 0,743 | 0,617 |
| | 4166 | 0,060 | 0,181 | 0,241 | 4172 | 0,062 | 0,181 | 0,243 |
| | 5425 | 0,002 | 0,243 | 0,245 | 5436 | 0,003 | 0,247 | 0,250 |
| | 6753 | −0,044 | 0,260 | 0,216 | 6760 | −0,040 | 0,256 | 0,216 |
| 10. Mai | 18,4° | | | | 18,4° | | | |
| | 1827 MV | −0,026 | 0,413 | 0,387 | 1835 MV | −0,029 | 0,422 | 0,393 |
| | 2975 | −0,078 | 0,319 | 0,241 | 2978 | −0,082 | 0,317 | 0,235 |
| | 5428 | 0,084 | 0,460 | 0,494 | 5432 | 0,040 | 0,455 | 0,495 |
| | 8115 | 0,018 | 0,573 | 0,591 | 8123 | 0,021 | 0,573 | 0,594 |

Tabelle 3b.

Viereckiger Porzellanstab (geschnitten), 487,3 mm lang bei 0°.

| Mai | 4. | 7. | 8. | 10. | 11. | $\lambda$, beob. (mm) | $\lambda$, ber. (mm) | $\lambda \cdot 10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | +0,048 | −0,013 | −0,043 | +0,041 | | — | — | — |
| 0—250° | — | 0,414 | — | 0,416 | — | 0,415 | 0,417 | 856 |
| 250—375 | — | — | — | 0,238 | — | — | — | — |
| 0—375 | — | — | 0,647 | *0,654* | — | 0,651 | 0,647 | 1327 |
| 250—500 | — | 0,477 | — | — | — | — | — | — |
| 375—500 | — | — | 0,245 | — | — | — | — | — |
| 0—500 | 0,897 | *0,891* | *0,892* | — | — | 0,893 | 0,891 | 1828 |
| 375—625 | — | — | — | 0,497 | — | — | — | — |
| 500—625 | — | — | 0,247 | — | — | — | — | — |
| 0—625 | — | — | *1,139* | *1,151* | — | 1,145 | 1,149 | 2358 |
| 500—750 | 0,498 | 0,472 | — | — | — | — | — | — |
| 625—750 | — | — | 0,213 | — | — | — | — | — |
| 0—750 | *1,395* | *1,363* | *1,353* | — | — | 1,370 | (1,422) | 2812 |
| 625—875 | — | — | — | 0,592 | — | — | — | — |
| 0—875 | — | — | — | *1,743* | — | 1,737 | (1,709) | 3565 |
| 750—1000 | 0,730 | 0,708 | — | — | — | — | — | — |
| 0—1000 | *2,125* | *2,072* | — | — | — | 2,098 | (2,010) | 4306 |

*Dauernde Aenderungen.* — Die dauernden Aenderungen, welche die Stäbe nach den verschiedenen Heizungen erfuhren, zeigen einen systematischen Unterschied. Nach einer Erhitzung auf 1000°, nach welcher der Heizstrom unterbrochen wurde, sodass sich der Ofen verhältnismässig schnell abkühlte, tritt eine Verlängerung des Stabes bis zu 0,05 mm ein, während sich nach einer schnellen Abkühlung von 750° abwärts eine etwa ebenso grosse Verkürzung zeigt. Wird der Stab öfter hintereinander auf eine der beiden Temperaturen 1000° oder 750° gebracht, so wiederholt sich die Längenänderung nicht, ebenso scheint eine Temperatur von 500° keine Wirkung auszuüben. Die Art der Abkühlung ist ebenfalls nicht ohne Einfluss, da eine Verkürzung eintritt, wenn die Temperatur nach einer Erwärmung auf 1000° erst langsam auf 750° sinkt und dann schneller abfällt.

Die Beobachtungen sind alle bei steigender Temperatur des Ofens angestellt. Es wurde dabei immer so lange gewartet, dass sich dieselbe Temperaturverteilung längs des Stabes herstellen konnte. Versuche, auch bei fallender Temperatur zu beobachten, führten nicht zum Ziel, weil alsdann der Eintritt des stationären Zustandes so viel Zeit beanspruchte, dass thermische Nachwirkungen nicht mehr hervortraten. Zu diesem Zwecke müsste man die Wärmeisolation des Ofens auf Kosten der Stromzufuhr verringern, was die Rücksicht auf die vorhandene Stromquelle verbot.

Für eine luftthermometrische Messung von Temperaturen bis 600° ist neuerdings von Chappuis und Harker[1]) ein Gefäss aus Berliner Porzellan benutzt worden. Die kubische Ausdehnung dieses Materials wurde auf Grund von Beobachtungen unter 100° nach der Formel

$$V_t = V_0\ (1 + 0{,}000\,008\,070\ t + 0{,}000\,000\,008\,98\ t^2)$$

bis 600° extrapolirt. Benutzt man statt dessen unsere Beobachtungen, so fällt der Siedepunkt des Schwefels, der zu 445,2° beobachtet wurde, um 0,5° tiefer. Bei 600° würde die Correction 1,1° betragen.

1) J. Chappuis u. J. A. Harker, Trav. et Mém. du Bureau international 12. p. 1. 1900; Phil. Trans. 194 A. p. 37. 1900.

### 2. Jenaer Borosilikatglas 59$^{III}$.

Von dem Jenaer Thermometerglas 59$^{III}$ wurden zuerst Stäbe im ungekühlten Zustande untersucht, die nach jeder Heizung dauernde Veränderungen zeigten. So wies ein Stab, der 5 Stunden lang auf 550° gehalten wurde, nach der Abkühlung eine Verkürzung von 0,79 mm auf. Darauf folgende Heizungen auf 500°, bei denen die höchste Temperatur nur etwa $^1/_2$ Stunde einwirkte, riefen Verkürzungen um 0,084, 0,036 und 0,018 mm hervor. Der grösste Teil dieser Aenderungen trat in der höchsten Temperatur ein, wie sich leicht durch die Mikrometerablesung bei constant gehaltener Temperatur beobachten liess. In einem Fall z. B. wurden bei 500° in Pausen von je einer halben Stunde Verkürzungen von 0,024 und 0,038 mm gemessen.

Darauf wurden zwei Stäbe aus verschiedenen Schmelzen im gekühlten Zustande untersucht, bei denen die dauernden Aenderungen 0,01 mm nicht überschritten. Die erste Probe war eine Thermometercapillare (5,2 mm äusserer Durchmesser) von demselben Vorrat, dessen Ausdehnung früher von Thiesen und Scheel[1]) von 0 bis 100° im ungekühlten Zustande untersucht worden ist. Die Röhre war an ihren Enden zugeschmolzen und trug auf einer bis auf die Capillare angeschliffenen Ebene die eingeätzten Teilstriche. Der Kühlprocess war an dem fertig geteilten Rohr in dem Glaswerk von Schott & Genossen bei einer so hohen Temperatur vorgenommen, dass das Glas von dem benutzten Sandbade schon merkliche Eindrücke aufwies.

Die zweite Probe war ein massiver Stab von 5,7 mm Durchmesser, der aus einer neuern Schmelze stammte. Er war sogleich nach dem Ziehen einem Kühlprocess unterworfen, der keine Spuren hinterlassen, also wohl bei tieferer Temperatur stattgefunden hatte. Die Teilung war nach dem Kühlen angebracht.

Die folgenden Tabellen enthalten die Ergebnisse für die beiden Glasstäbe, deren Ausdehnung bei 250, 375 und 500° gemessen wurde.

---

1) M. Thiesen u. K. Scheel, Wissensch. Abhandl. der Phys.-Techn. Reichsanstalt 2. p. 73. 1895.

Tabelle 4a.
Glascapillare.

| 1901 | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13. April | 18,4° | | | | 18,4° | | | |
| | 1796 MV | 0,084 | 0,581 | 0,665 | 1806 MV | 0,084 | 0,587 | 0,671 |
| | 4082 | 0,232 | 0,530 | 0,762 | 4092 | 0,238 | 0,518 | 0,756 |
| $1^1/_4{}^h$ später | 4117 | 0,010 | −0,012 | −0,002 | 4119 | +0,010 | −0,006 | +0,004 |
| 15. April | 17,4° | | | | 17,4° | | | |
| | 1781 MV | 0,138 | 0,525 | 0,663 | 1791 MV | 0,128 | 0,529 | 0,657 |
| | 2860 | −0,008 | 0,373 | 0,365 | 2867 | −0,001 | 0,369 | 0,368 |
| | 4064 | 0,086 | 0,304 | 0,390 | 4073 | 0,090 | 0,300 | 0,390 |

Tabelle 4b.
Glascapillare, 483,6 mm lang bei 0°.

| April | 13. | 15. | 16. | $\lambda$, beob. (mm) | $\lambda$, ber. (mm) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | + 0,008 | − 0,001 | | | |
| 0—250° | 0,728 | 0,723 | — | 0,725 | 0,727 |
| 250—375 | — | 0,388 | — | — | — |
| 0—375 | — | *1,111* | — | 1,111 | 1,109 |
| 250—500 | 0,779 *)<br>0,771 | *0,777* | — | — | — |
| 375—500 | — | 0,389 | — | — | — |
| 0—500 | *1,507*<br>*1,499* | *1,500* | — | 1,502 | 1,503 |

*) Zwischen den beiden Beobachtungen wurde der Stab $^5/_4{}^h$ auf 500° gehalten.

Tabelle 5a.
Glasstab.

| 1901 | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) | $t$ | $M$ (mm) | $M'$ (mm) | $\Sigma$ (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. April | 17,5° | | | | 17,5° | | | |
| | 1798 MV | 0,282 | 0,395 | 0,677 | 1822 MV | 0,285 | 0,396 | 0,681 |
| | 2892 | 0,132 | 0,235 | 0,367 | 2901 | 0,141 | 0,233 | 0,374 |
| | 4094 | 0,228 | 0,181 | 0,409 | 4126 | 0,228 | 0,180 | 0,408 |
| 3. April | 18,1° | | | | 18,1° | | | |
| | 1834 MV | 0,346 | 0,343 | 0,689 | 1845 MV | 0,352 | 0,354 | 0,706 |
| | 2888 | 0,020 | 0,350 | 0,370 | 2903 | 0,019 | 0,342 | 0,361 |
| | 4078 | 0,220 | 0,187 | 0,407 | 4096 | 0,218 | 0,184 | 0,402 |
| | 2891 | −0,177 | −0,248 | −0,425 | 2877 | −0,202 | −0,214 | −0,416 |

Tabelle 5b.

Glasstab, 485,8 mm lang bei 0°.

| April | 2. | 3. | 4. | $\lambda_t$ beob. (mm) | $\lambda_t$ ber. (mm) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-0{,}012$ | $-0{,}006$ | | | |
| 0—250° | 0,735 | 0,744 | — | 0,739 | 0,740 |
| 250—375 | 0,391 | 0,395 | — | — | — |
| 0—375 | *1,126* | *1,139* | — | 1,132 | 1,132 |
| 375—500 | 0,404 | 0,407 | — | — | — |
| 0—500 | *1,530* | *1,546* | — | 1,538 | 1,538 |

Die Ausdehnung lässt sich bei dem Glas hinreichend genau durch eine Parabel darstellen. Die Gleichungen lauten für die Capillare:

$$\lambda_t = 2{,}811\,t + 0{,}000\,389\,t^2,$$
$$\lambda = \{5814\,t + 0{,}804\,t^2\}\,10^{-9};$$

für den Stab:

$$\lambda_t = 2{,}843\,t + 0{,}000\,466\,t^2,$$
$$\lambda = \{5852\,t + 0{,}959\,t^2\}\,10^{-9}.$$

(Eingegangen 28. Juni 1901.)

## 11. *Ueber das thermomagnetische und thermoelektrische Verhalten des krystallinischen Wismuts; von Louis Lownds.*

§ 1. Zur Begründung oder Prüfung einer Theorie der von v. Ettingshausen und Nernst[1]) entdeckten thermomagnetischen Phänomene scheint es erforderlich, die sämtlichen hier in Betracht kommenden Grössen an einer und derselben Metallplatte zu messen. Diese Aufgabe hat van Everdingen[2]) für eine Platte aus elektrolytischem Wismut gelöst, doch sind die Beobachtungen in ziemlich engen Grenzen der Temperatur gemacht und besonders fehlen Bestimmungen bei sehr tiefen Temperaturen, bei welchen die Effecte stark anwachsen.

Hr. Prof. Groth hatte die grosse Freundlichkeit mir eine Platte aus einem grossen Wismutkrystall zur Verfügung zu stellen, wobei die krystallographische Hauptaxe in der Ebene der Platte lag. Ich beabsichtigte die fraglichen Messungen sämtlich, so weit es möglich ist, innerhalb möglichst weiter Grenzen der Temperatur und der Feldstärke an dieser Platte anzustellen. Die vorliegende Arbeit enthält die Bestimmungen des transversalen und longitudinalen thermomagnetischen Effectes sowie der thermoelektrischen Kraft.

§ 2. Nach Entfernung der Unregelmässigkeiten durch Abschleifen mit feinem Schmirgelpapier war die Platte 16 mm lang, 13,5 mm breit und 4 mm dick. Sie enthielt als einzigen Fehler einen kleinen Riss in der einen Ecke. Die krystallographische Hauptaxe lag in der Richtung der Länge. Eine chemische Analyse wurde noch nicht gemacht.

§ 3. Seien Figg. 1 und 2 $OX$, $OY$, $OZ$ rechtwinklige Coordinatenaxen, $OABC$ der Krystall, $OA$ die Richtung der

1) A. von Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **29.** p. 343. 1886.

2) E. van Everdingen, Comm. Phys. Lab. Leyden Nr. 42. 1898; Nr. 48. 1899.

krystallographischen Hauptaxe. Wir halten die Bedingung fest, dass die magnetischen Kraftlinien senkrecht zur Richtung des Wärmestromes stehen und legen die Richtung der magnetischen Kraft in die $x$-Axe. Der Wärmestrom habe die Richtung der $z$-Axe. Folgende Fälle können dann untersucht werden.

I. Für den Longitudinaleffect:

1. Die krystallographische Hauptaxe $OA$ hat die Richtung des Wärmestromes (Fig. 1). Drehung der Platte um $OA$ (1a) bringt hier keinen neuen Fall hervor.

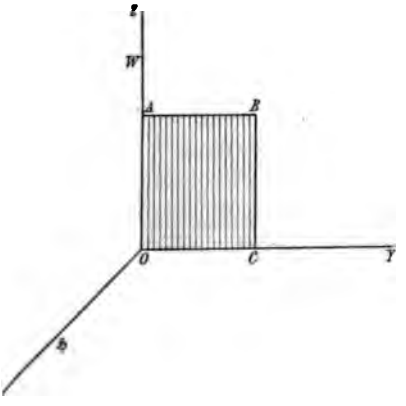



Fig. 1.

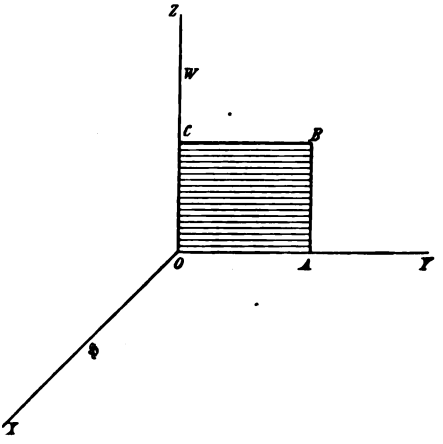



Fig. 2.

2. Die krystallographische Hauptaxe ist senkrecht zum Wärmestrom und entweder senkrecht zu den Kraftlinien (Fig. 2),

3. oder parallel zu den Kraftlinien, was durch Drehung um 90° um die Richtung des Wärmestromes erreicht wird.

II. Der transversale Effect, obgleich für ihn 1 und 1a sowie 2 und 3 verschieden sind, kann nur in den Fällen 1 und 2 untersucht werden, da die thermomagnetische Potentialdifferenz nur in der Richtung der Breite, nicht in der Richtung der Dicke gemessen werden kann.

III. Die thermoelektrische Kraft wurde in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe und senkrecht zu dieser Richtung bestimmt.

§ 4. Die Einrichtung des Apparates wurde hauptsächlich durch die Forderung bestimmt, dass Lötungen an der Platte

grundsätzlich vermieden werden sollten. Fig. 3 zeigt schematisch einen verticalen Schnitt durch die Mitte der Platte und senkrecht zu ihrer Ebene. *A* ist ein cylindrisches Metallgefäss, 10 cm hoch und 3,7 cm im Durchmesser, aussen mit Filz bedeckt, zur Aufnahme der Kältemischung. An den Boden von *A* ist ein rechteckiges Stück Kupfer *B*, 1,5 cm lang,

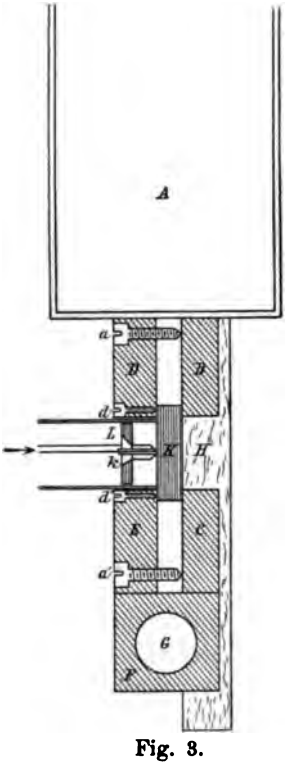



Fig. 3.

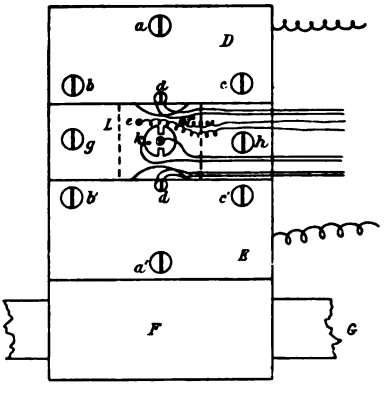



Fig. 4.

3,5 cm breit, 0,6 cm dick, gelötet. *C*, *D*, *E* sind Kupferstücke von denselben Dimensionen. Das Kupferstück *F* ist 3,5 cm breit und von 1,6 qcm Querschnitt. Es enthält einen Canal *G* von 0,5 cm Radius zum Durchleiten von Wasser von Zimmertemperatur. *C* ist an *F* angelötet. *C* und *F* werden in der gezeichneten Lage durch Schrauben gehalten, welche durch das Holzstück *H* in das Kupfer gehen. *H* ist an *B* durch zwei Schrauben befestigt. *D* und *E* sind jedes mit 3 Schrauben *a*, *b*, *c*; *a'*, *b'*, *c'* versehen, *b*, *c*, *b'*, *c'* sind in entsprechende

Löcher in den Kupferstücken *B* und *C* eingeschrankt (vgl. Fig. 4, eine Ansicht in der Richtung des Pfeiles Fig. 3). So konnte die Krystallplatte *K* zwischen *D* und *B* und zwischen *E* und *C* eingeklemmt werden, wobei die Schrauben *a* und *a'* guten Contact zwischen *D* und *A* sowie zwischen *E* und *F* herzustellen erlaubten. Um endlich den Contact der Backen mit der Krystallplatte zu verbessern und ein Brechen des Krystalles zu verhüten, waren Stanniolstreifen zwischen der Platte und den Backen eingelegt. Die Kupferstücke *D* und *E* dienten als Elektroden zur Messung des Longitudinaleffectes und der thermoelektrischen Kraft. Das Temperaturgefälle in der Platte wurde erzielt, indem in *A* flüssige Luft, Kohlensäureschnee mit Aether, Eis oder siedendes Wasser gebracht wurde, während durch *G* Wasser von Zimmertemperatur floss.

Die Temperaturen des oberen und unteren Plattenrandes wurden durch Eisenconstantanelemente gemessen. Die Lötstellen dieser Elemente wurden durch kleine Schrauben *d* und *d'*, welche durch *D* und *E* hindurchgingen, fest auf die Oberfläche der Platte gedrückt. Die von den Thermoelementen angegebenen Temperaturen wurden als die Temperaturen der Contactstellen der Kupferstücke mit dem Krystall angenommen. Die Elektroden zur Messung des Transversaleffectes waren zwei Kupferschrauben *e* und *f* (Fig. 4), 6 mm voneinander entfernt, welche durch eine genau zwischen die Kupferstücke *D* und *E* passende Ebonitplatte hindurchgingen. Durch zwei Messingschrauben *g* und *h* (Fig. 4), welche durch das Ebonit in das Holzstück gingen, wurden sie fest auf die Platte gedrückt. Das genannte Ebonitstück hielt noch ein drittes Eisenconstantanelement *k*, nämlich eine kleine Eisenschraube, durch deren Mitte ein Loch gebohrt war, durch dieses ging ein kautschukisolirter, an das Ende der Schraube gelöteter Constantandraht hindurch. Die Lötstellen der drei Thermoelemente *d*, *k*, *d'* lagen in derselben geraden verticalen Linie, wobei die Entfernung zwischen *d* und *k* sowie zwischen *k* und *d'* 6,5 mm betrug. Die horizontale Linie, welche die Elektroden *e* und *f* verband, ging mitten zwischen *d* und *k* senkrecht zu *dk* hindurch.

Das Ganze befand sich, sorgfältig in Baumwolle verpackt, zwischen den Polen des Elektromagneten, sodass die Kraftlinien die Platte senkrecht kreuzten.

Die elektromotorischen Kräfte wurden nach der Compensationsmethode gemessen.

§ 5. *Der Longitudinaleffect.* Derselbe wurde wie in meiner früheren Arbeit[1]) nach der Formel

$$p = (t_2 - t_1)n$$

berechnet, wo $p$ die elektromotorische Kraft ist, welche durch das Feld zwischen zwei Punkten erregt wird, deren Temperaturen $t_1$ und $t_2$ sind, negativ oder positiv gerechnet, je nachdem die durch das Feld erregte elektromotorische Kraft die Richtung des Wärmestromes oder die entgegengesetzte hatte. Die elektromotorische Kraft zwischen den beiden Punkten wurde gemessen: 1. ohne Feld $e_1$, 2. mit Feld in der einen Richtung $e_2$, 3. mit Feld in der entgegengesetzten Richtung $e_3$, 4. ohne Feld $e_4$. Der absolute Wert von $n$ ist dann

$$\frac{(e_2 + e_3) - (e_1 + e_4)}{2(t_2 - t_1)}$$

wo die elektromotorische Kraft in Mikrovolts, die Temperaturen in Centigraden ausgedrückt sind.

*Fall 1* (§ 3). Der Wärmestrom ist parallel der krystallographischen Hauptaxe, die magnetischen Kraftlinien senkrecht zur Plattenebene. Tab. I enthält die Ergebnisse für die Mitteltemperaturen 53,3°, 4,8°, −36,5°, −94°. Fig. 5 enthält die graphische Darstellung in den ausgezogenen Linien, $n$ ist als Ordinate, $\mathfrak{H}$ als Abscisse aufgetragen.

*Fall 2.* Der Wärmestrom und die Kraftlinien sind senkrecht zur Hauptaxe. Tab. II giebt die Resultate, die punktirten Linien, Fig. 5, die graphische Darstellung.

Man bemerkt in allen Tabellen, dass bei Umkehrung der Feldrichtung eine kleine Veränderung der Wirkung eintritt, welche im Fall 2 ausgeprägter ist als in Fall 1. Der Grund liegt wahrscheinlich darin, dass der Wärmestrom in Wahrheit nicht in der bezeichneten Richtung fliesst. Eine Abweichung von dieser Richtung würde eine transversale Componente hervorbringen, welche mit der Feldrichtung das Zeichen wechselt

1) L. Lownds, Ann. d. Phys. 4. p. 776. 1901.

## Tabelle I.

### Longitudinaleffect.

Hauptaxe ⊥ Kraftlinien
Hauptaxe ∥ Wärmestrom } Fall 1. § 3.

| Mittel-temperatur | 53,3° C. | | | 4,8° C. | | | −36,5° C. | | | −94° C. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $d$ | $d'$ | | $d$ | $d'$ | | $d$ | $d'$ | | $d$ | $d'$ | |
| Temperaturen der Thermoelemente | (1) 91,5° | (2) 16,8° | | (1) 1,4° | (2) 8,5° | | (1) −68,5° | (2) −5° | | (1) −170,5° | (2) −14,5° | |
| | (8) 88,6 | (9) 16,4 | | (8) 1,2 | (9) 8,3 | | (8) −68 | (9) −4,5 | | (7) −174 | (8) −18,5 | |
| $t_2 - t_1$ | 56,5° | | | 5,5° | | | 63,5° | | | 156° | | |
| $\mathfrak{H}$ | $n$ | | Mittel-wert | $n$ | | Mittel-wert | $n$ | | Mittel-wert | $n$ | | Mittel-wert |
| | → | ← | | → | ← | | → | ← | | → | ← | |
| 6100 | 10,0 | 9,6 | (3) 9,8 | 9,4 | 8,5 | (3) 8,95 | −12,4 | −13,3 | (3) −12,8 | −39,1 | −41,1 | (3) −40,1 |
| 4940 | 8,0 | 7,6 | (4) 7,8 | 8,7 | 8,0 | (4) 8,35 | − 7,3 | − 8,1 | (4) − 7,7 | −33,6 | −32,8 | (4) −33,2 |
| 3550 | 5,7 | 4,9 | (5) 5,3 | 7,1 | 6,5 | (5) 6,80 | − 2,5 | − 3,2 | (5) − 2,85 | −24,9 | −26,9 | (5) −25,9 |
| 2375 | 3,1 | 2,7 | (6) 2,9 | 4,8 | 4,2 | (6) 4,50 | + 0,14 | − 0,30 | (6) − 0,08 | −16,5 | −18,5 | (6) −17,5 |
| 1225 | 1,2 | 1,2 | (7) 1,2 | 1,97 | 1,20 | (7) 1,58 | + 0,74 | + 0,68 | (7) + 0,71 | — | — | — |

(1) (2) (3) . . . bezeichnen die Reihenfolge der Beobachtungen.

Longitudinaleffect.

Hauptaxe ⊥ Kraftlinien
Hauptaxe ⊥ Wärmestrom } Fall 2. § 3.

| Mittel-temperatur | 58,7° C. | | | 4,4° C. | | | −41,9° C. | | | −94,7° C. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $d$ | $d'$ | | $d$ | $d'$ | | $d$ | $d'$ | | $d$ | $d'$ | |
| Temperaturen der Thermoelemente | (1) 91,8° | (2) 15,6° | | (1) 1,4° | (2) 7,1° | | (1) −74° | (2) −8,5° | | (1) −163,5° | (2) −19,5° | |
| | | | | | | | | | | (4) −162,5 | (5) −19,5 | |
| | (8) 91,8 | (9) 15,6 | | (8) 2 | (9) 7,2 | | (8) −76 | (9) −9 | | (8) −169 | (9) −20,5 | |
| | | | | | | | | | | (12) −171 | (13) −21 | |
| | | | | | | | | | | (15) −170,5 | (16) −21 | |
| $t_2 - t_1$ | 76,2° | | | 5,45° | | | 66,2° | | | (1)—(5) 143,5° | | |
| | | | | | | | | | | (4)—(9) 145,7 | | |
| | | | | | | | | | | (8)—(13) 149,2 | | |
| | | | | | | | | | | (12)—(16) 149,7 | | |
| $\vartheta$ | $n$ → | $n$ ← | Mittel-wert | $n$ → | $n$ ← | Mittel-wert | $n$ → | $n$ ← | Mittel-wert | $n$ → | $n$ ← | Mittel-wert |
| 6100 | − 1,57 | −2,55 | (3) −2,06 | −16,5 | −9,0 | (3) −12,7 | −28,3 | −16,3 | (3) −22,3 | −28,1 | −22,3 | (11) −25,2 |
| 4940 | −0,85 | −1,67 | (4) −1,26 | −13,1 | −6,7 | (4) − 9,9 | −23,2 | −12,6 | (4) −17,9 | −24,6 | −18,6 | (10) −21,6 |
| | | | | | | | | | | −24,6 | −18,5 | (14) −21,6 |
| 3550 | −0,03 | −0,82 | (5) −0,42 | − 7,4 | −3,4 | (5) − 5,4 | −16,4 | − 7,8 | (5) −12,1 | −19,4 | −13,6 | (7) −16,5 |
| 2375 | 0,25 | −0,33 | (9) −0,04 | − 3,4 | −1,2 | (6) − 2,3 | −10,3 | − 3,8 | (6) − 7,0 | −14,1 | −10,1 | (6) −12,1 |
| 1225 | 0,38 | 0,00 | (7) +0,19 | − 1,56 | −0,28 | (7) − 0,92 | − 4,1 | − 0,62 | (7) − 2,36 | − 6,7 | − 3,5 | (3) −5,1 |

und je nach dem Zeichen als eine Vermehrung oder Verminderung des Longitudinaleffectes erscheint.

An die in Fig. 5 niedergelegten Ergebnisse kann man folgende Bemerkungen knüpfen:

1. Die Curven, welche die Feldstärke $\mathfrak{H}$ und den Longitudinaleffect $n$ verbinden, sind für krystallinisches Wismut von ähnlicher Form wie für elektrolytisches, doch werden die negativen Werte bei viel höheren Temperaturen erhalten.

2. In dem Fall, für welchen sowohl der Wärmestrom wie die Kraftlinien senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe

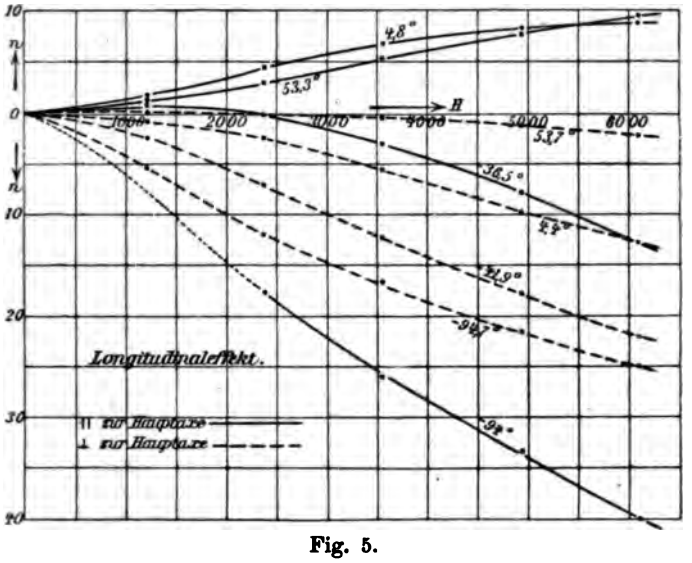



Fig. 5.

stehen, werden positive Werte des Longitudinaleffectes nur bei der höchsten Temperatur und sehr kleinen Feldstärken erhalten.

Obgleich der Fall 1a (§ 3) hier nichts Neues bringt, so schien es doch nicht überflüssig, ihn zu realisiren. Da aber die Platte hierbei mit ihrer Ebene parallel zu den Kraftlinien zu stehen kam, so mussten die Pole der Elektromagneten auf eine Entfernung von $3^3/_4$ cm gebracht werden, dadurch sank das höchste erreichbare Feld auf 4400 C.G.S. Tab. III zeigt die Ergebnisse für diesen Fall zusammen mit den aus Fig. 5 entnommenen entsprechenden Ergebnissen für Fall 1. Die beiden Ergebnisse stimmen, wie es sein soll, gut überein.

Tabelle III.

| $\mathfrak{H}$ | Fall 1a | | Fall 1 | |
|---|---|---|---|---|
| | Temperatur | $n$ | Temperatur | $n$ |
| 4400 | 51° C. | +6,80 | 53° C. | +6,70 |
| 2540 | | +3,36 | | +3,30 |
| 4400 | −31° C. | −4,85 | −36,5° C. | −5,70 |
| 2540 | | −0,40 | | −0,40 |

Endlich wurden Beobachtungen für den Fall 3 gemacht, wobei aus demselben Grunde wie beim Fall 1a nur Feldstärken bis 4400 C.G.S. erreicht wurden. Tab. IV giebt die Resultate zusammen mit den entsprechenden für Fall 2. Die beiden Ergebnisse sind, wie man sieht und wie nicht gegen die Erwartung ist, in beiden Fällen sehr verschieden.

Tabelle IV.

| $\mathfrak{H}$ | Fall 3 | | Fall 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | Temperatur | $n$ | Temperatur | $n$ |
| 4400 | 51° C. | +0,60 | 53,7° C. | − 0,75 |
| 2540 | | +0,43 | | − 0,05 |
| 4400 | −38° C. | −5,9 | −42° C. | −15,7 |
| 2540 | | −2,7 | | − 7,8 |

Defregger[1]) hat bereits einige Beobachtungen über den Longitudinaleffect an Krystallstäbchen gemacht, welche aus demselben Krystall wie meine Platte stammen. Die mittlere Temperatur ist nicht angegeben, lag aber wahrscheinlich bei ungefähr 50° C., da der Temperaturfall in den Stäbchen durch die Anwendung von Dampf und Wasser von Zimmertemperatur hervorgebracht wurde. Er beschreibt die Erscheinung als eine Veränderung der thermoelektrischen Kraft durch das Magnetfeld und verzeichnet die procentische Aenderung.

Zum Zweck der Vergleichung habe ich meine Ergebnisse für 2 Feldstärken nach dieser Form reducirt. Die folgende Tabelle enthält die Daten:

1) R. Defregger, Inaug.-Dissert. München 1897.

Hauptaxe ⊥ Kraftlinien
Hauptaxe ∥ Wärmestrom } Fall 1. § 3.

| $\mathfrak{H}$ | Procentische Aenderung der thermoelektrischen Kraft | |
|---|---|---|
| | Defregger | Lownds |
| 2375 | 2,26 | 2,55 |
| 6100 | 6,95 | 8,54 |

Hauptaxe ⊥ Kraftlinien
Hauptaxe ⊥ Wärmestrom } Fall 2. § 3.

| $\mathfrak{H}$ | Procentische Aenderung der thermoelektrischen Kraft | | |
|---|---|---|---|
| | Defregger | | Lownds |
| 2375 | 1,00 | 0,5 | −0,07 |
| 6100 | 0,69 | −0,06 | −3,5 |

In diesem Fall wurden zwei verschiedene Stäbchen von Defregger benutzt. Die gegebenen Zahlen sind die Mittelwerte aus den weit voneinander abweichenden Ergebnissen für die beiden entgegengesetzten Feldrichtungen.

Hauptaxe ∥ Kraftlinien
Hauptaxe ⊥ Wärmestrom } Fall 3. § 3.

| $\mathfrak{H}$ | Procentische Aenderung der thermoelektrischen Kraft | | |
|---|---|---|---|
| | Defregger | | Lownds |
| 2540 | 0,58 | 0,35 | 0,62 |
| 4400 | 0,85 | 0,60 | 0,97 |

§ 6. *Der Transversaleffect.* Zur Berechnung der Beobachtungen setze ich mit Yamaguchi[1])

$$q = -\beta \frac{dt}{dx} \cdot m,$$

wo die positive $x$-Axe in die Richtung des Wärmestromes fällt, $q$ die elektromotorische Kraft zwischen zwei um $\beta$ voneinander entfernten, auf einer Linie senkrecht zum Wärmestrom gelegenen Punkten, und $m$ eine Grösse ist, welche von der Feldstärke und der Temperatur abhängt, aber von dem Temperaturgefälle in erster Annäherung unabhängig ist.

1) E. Yamaguchi, Ann. d. Phys. 1. p. 214. 1900.

Die Richtung von $q$, wie sie von v. Ettingshausen und Nernst[1]) gefunden wurde, kann folgendermaassen bestimmt werden. Man stelle sich in die Richtung der magnetischen Kraft, sodass dieselbe vom Fuss nach dem Kopfe geht und blicke in der Richtung des Wärmestromes, dann ist die elektromotorische Kraft von links nach rechts gerichtet. Im Folgenden ist eine elektromotorische Kraft von dieser Richtung

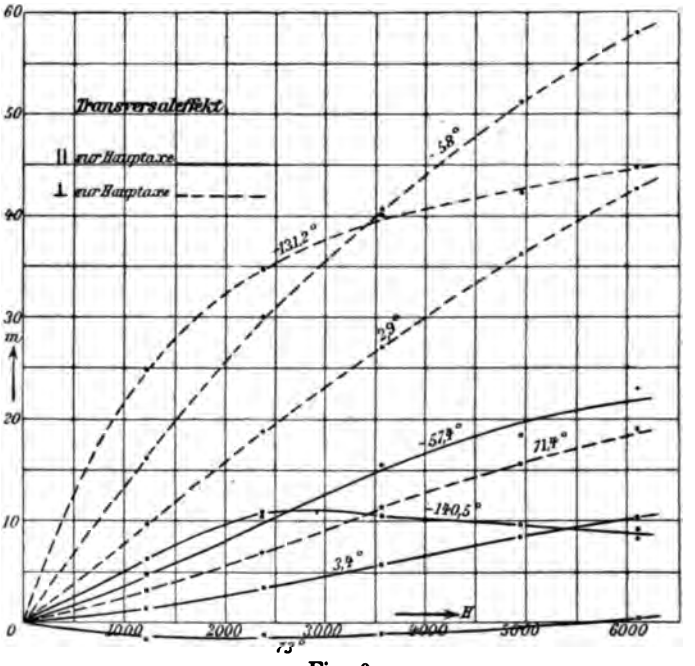



Fig. 6.

positiv gerechnet, indem van Everdingen und Yamaguchi auch Kräfte von der entgegengesetzten Richtung beobachtet haben. Die Elimination der Thermokräfte geschah ebenso wie bei Yamaguchi.[2])

Die Ergebnisse, welche in den beiden Fällen 1 und 2 (§ 3) gewonnen wurden, sind in den Tab. V und VI niederlegt und in Fig. 6 graphisch dargestellt, wo die Abscissen den Feldstärken, die Ordinaten den $m$-Werten proportional gemacht

1) A. v. Ettingshausen u. Nernst, l. c.
2) E. Yamaguchi, l. c.

## Tabelle V.

### Transversaleffect.

Hauptaxe ⊥ Kraftlinien
Hauptaxe ∥ Wärmestrom
} Fall 1. § 3.

| Temp. | 73° C. | | | 3,4° C. | | | −57,4° C. | | | −140,5° C. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $d$ | $k$ | $d'$ | $d$ | $k$ | $d'$ | $d$ | $k$ | $d'$ | $d$ | $k$ | $d'$ |
| Temp. der Thermoelemente | (1) 93,5° | (2) 51,9° | (3) 17,5° | (1) 1,2° | (2) 5,2° | (3) 8,3° | (1) −76,5° | (2) −38° | (3) −10° | (1) −180° | (2) −103,5° | (3) −31,5° |
| | | | | | | | | | | (6) −179,5° | (7) −102 | (8) −29,5 |
| | (9) 94,2 | (10) 53,1 | (11) 18,8 | (9) 1,8 | (10) 5,3 | (11) 8,3 | (9) −76,5 | (10) −38,5° | (11) −10 | (11) −177,5 | (12) −101,5 | (13) −30,5 |
| | | | | | | | | | | (16) −177 | (17) −102 | (18) −31 |
| $\frac{dt}{dx}$ | 63,6 | | | 5,8 | | | 58,5 | | | 117,5 | | |

| $\mathfrak{H}$ | E.M.K. | | $m$ | E.M.K. | | $m$ | E.M.K. | | $m$ | E.M.K. | | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | → | ← | | → | ← | | → | ← | | → | ← | |
| 1225 | −121 | 13 | (4) −1,5 | 5 | 5 | (4) 1,4 | 180 | 175 | (4) 5,0 | 476 | 434 | (5) 6,4 |
| 2375 | − 48 | −37 | (5) −1,1 | 12 | 13 | (5) 3,6 | 391 | 359 | (5) 10,7 | 887 | 659 | (9) 10,9 |
| 3550 | − 45 | −24 | (6) −0,9 | 18 | 21 | (6) 5,6 | 559 | 521 | (6) 15,4 | 926 | 557 | (10) 10,5 |
| 4940 | − 30 | 3 | (7) −0,35 | 28 | 31 | (7) 8,4 | 690 | 593 | (7) 18,4 | 865 | 486 | (14) 9,7 |
| 6100 | − 14 | 30 | (8) +0,2 | 36 | 38 5 | (8) 10,7 | 981 | 648 | (8) 23,2 | 947<br>963 | 579<br>578 | (4) 8,1<br>(15) 9,4 |

Tabelle VI.

**Transversaleffect.**

Hauptaxe ⊥ Kraftlinien
Hauptaxe ⊥ Wärmestrom } Fall 2. § 3.

| Temp. | 71,4° C. | | | 2,9° C. | | | −58° C. | | | −131,2° C. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $d$ | $k$ | $d'$ | $d$ | $k$ | $d'$ | $d$ | $k$ | $d'$ | $d$ | $k$ | $d'$ |
| Temp. der Thermoelemente | (1) 92,2° | (2) 50,6° | (3) 15,6° | (1) 1,2° | (2) 4,6° | (3) 7,2° | (1) −78° | (2) −38,5° | (3) −10° | (1) −170,5° | (2) −93° | (3) −21° |
| | (9) 91,8 | (10) 50,9 | (11) 16,4 | (9) 1,1 | (10) 4,6 | (11) 7,1 | (7) −78 | (8) −39,5 | (9) −10 | (6) −171,5 | (7) −85 | (8) −21,5° |
| | | | | | | | (10) −76 | (11) −38 | (12) − 9 | (12) −172,5 | (13) −95 | (14) −21,5 |
| | | | | | | | (15) −77,5° | (16) −39 | (17) − 9 | | | |
| $\frac{dt}{dx}$ | 63,4 | | | 5,4 | | | 59,35 | | | 124 | | |
| $\mathfrak{H}$ | E.M.K. | | $m$ | E.M.K. | | $m$ | E.M.K. | | $m$ | E.M.K. | | $m$ |
| | → | ← | | → | ← | | → | ← | | → | ← | |
| 1225 | 147 | 128 | (4) 8,6 | 34 | 29 | (4) 9,7 | 610 | 595 | (4) 16,7 | 1893 | 1791 | (4) 24,8 |
| 2375 | 295 | 254 | (5) 7,2 | 67 | 57 | (5) 19,1 | 1136 | 1031 | (5) 30,1 | 2580 | 2565 | (10) 34,6 |
| 3550 | 459 | 399 | (6) 11,3 | 97,5 | 79,5 | (6) 27,2 | 1509 | 1410 | (6) 40,5 | 2950 | 3004 | (5) 40,0 |
| 4940 | 637 | 551 | (7) 15,6 | 127,5 | 110,5 | (7) 36,6 | 1865 | 1749 | (13) 51,2 | 3034 | 3270 | (9) 42,4 |
| 6100 | 794 | 673 | (8) 19,3 | 145,5 | 132,8 | (8) 42,8 | 2100 | 1999 | (14) 58,1 | 3257 | 3426 | (11) 44,9 |

wurden. Die ausgezogenen Linien beziehen sich auf den Fall, dass der Wärmestrom der Hauptaxe parallel läuft, die punktirten Linien auf den Fall, dass der Wärmestrom senkrecht zur Hauptaxe gerichtet ist. An diese Curven lassen sich folgende Bemerkungen knüpfen.

1. Der Transversaleffect ist kleiner, wenn der Wärmestrom der Hauptaxe parallel läuft, als wenn er senkrecht zu ihr gerichtet ist.

2. Im ersten Falle ist $m$ negativ für eine Mitteltemperatur von 73°, wie es v. Everdingen und Yamaguchi für elektrolytisches Wismut fanden, aber

3. während Yamaguchi bei elektrolytischem Wismut den Transversaleffect mit abnehmender Temperatur stets wachsend fand, nimmt bei krystallinischem Wismut bei grossen Feldstärken und sehr tiefen Temperaturen der Effect mit sinkender Temperatur ab.

§ 7. *Die thermoelektrische Kraft.* Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kupferstücken $D$ und $E$ (Fig. 3) giebt die thermoelektrische Kraft für Kupfer-Wismut für die von den Eisen-Constantanelementen $d$ und $d'$ angezeigte Temperaturdifferenz. Diese Temperaturen wurden vor und nach der Messung der elektromotorischen Kraft bestimmt, wobei die Temperaturdifferenzen, so wie es in § 4 beschrieben ist, hervorgebracht wurden.

Tab. VII und VIII enthalten die Ergebnisse zwischen 0° und −70° parallel und senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe. Die thermoelektrische Kraft ist positiv gerechnet, wenn der Strom vom Wismut zum Kupfer durch die wärmere Lötstelle fliesst.

Tabelle VII.

Parallel zur krystallographischen Hauptaxe.

$\alpha = 130{,}2$. $\beta = 0{,}3504$. $t_n = -\frac{\alpha}{2\beta} = -185{,}8°$.

| $t_1$ | $t_2$ | $e$ (beobachtet) | $e$ (berechnet) |
|---|---|---|---|
| − 2,3° | − 57,8° | 5988 MV | 6057 MV |
| − 3,8 | − 66,8 | 6737 | 6644 |
| −24,7 | − 67,8 | 4183 | 4207 |
| −32,2 | − 69,8 | 3523 | 3551 |

## Tabelle VIII.

**Senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe.**

$\alpha = 48{,}32.\quad \beta = 0{,}2988.\quad t_n = -\frac{\alpha}{2\beta} = -80{,}9°.$

| $t_1$ | $t_2$ | $e$ (beobachtet) | $e$ (berechnet) |
|---|---|---|---|
| − 4,1° | − 63° | 1663 MV | 1665 MV |
| − 37,5 | − 66,7° | 506 | 503 |
| − 37,9 | − 66,6 | 496 | 491 |
| − 42,3 | − 72,2 | 417 | 422 |

Die Ergebnisse werden durch die Formel

$$e = \alpha(t_1 - t_2) + \beta(t_1^2 - t_2^2)$$

dargestellt, wo $t_1$ und $t_2$ die Temperaturen der beiden Lötstellen in Centigraden, $e$ die thermoelektrische Kraft in Mikrovolts bedeutet. Die Constanten $\alpha$ und $\beta$ wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Nach den Werten dieser Constanten ergeben sich die neutralen Temperaturen $t_n$ für die beiden Fälle bez. zu $-185{,}8°$ und $-80{,}9°$. Doch stellt die obige Formel die Ergebnisse nicht mehr für so tiefe Temperaturen dar, wie sie durch Anwendung flüssiger Luft erzielt werden können. Das geht aus der folgenden Tabelle hervor.

**Parallel zur krystallographischen Hauptaxe.**

| $t_1$ | $t_2$ | $e$ (beobachtet) | $e$ (berechnet) $\alpha = 130{,}2,\ \beta = 0{,}3504$ |
|---|---|---|---|
| −13,8° | −160,2° | 7851 MV | 10135 MV |
| −13,3 | −157,2 | 8012 | 10139 |

**Senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe.**

| $t_1$ | $t_2$ | $e$ (beobachtet) | $e$ (berechnet) $\alpha = 48{,}32,\ \beta = 0{,}2988$ |
|---|---|---|---|
| −15,7° | −145,9° | 397 MV | 0 |
| −15,4 | −146,1 | 432 | 0 |

Data für Temperaturen zwischen $-80°$ und $-160°$ wurden gewonnen, indem man den Wasserstrom durch $q$ aufhielt und Beobachtungen bei fallender Temperatur von $d'$

machte. Doch änderte sich die Temperatur zuweilen um 3° während der Beobachtung, was bei kleiner Temperaturdifferenz der Lötstellen beträchtliche Fehler verursachen konnte. Die gewonnenen Ergebnisse folgen hierunter und scheinen zum mindesten zu zeigen, dass die neutrale Temperatur im ersten Fall höher als $-185{,}8°$ liegt.

**Parallel zur krystallographischen Hauptaxe.**

| $t_1$ | $t_2$ | $e$ | $t_1$ | $t_2$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| − 80° | −164° | 966 | −115° | −170° | −754 |
| − 90 | −166 | 372 | −117 | −169 | −745 |
| −100 | −167 | −205 | −121 | −170 | −922 |
| −111 | −175 | −747 | −123 | −171 | −951 |

**Senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe.**

| $t_1$ | $t_2$ | $e$ |
|---|---|---|
| − 65° | −155° | −1166 |
| −108 | −163 | −1507 |
| −123 | −167 | −1383 |
| −132 | −168 | −1243 |
| −136 | −170 | −1166 |

Fleming und Dewar[1]) fanden eine Discontinuität im Verhalten der thermoelektrischen Kraft bei tiefen Temperaturen für reines und käufliches Wismut. Doch war ihr „reines" Wismut nicht elektrolytisch gewonnen und Angaben für solches sind mir nicht bekannt. Die Frage, ob die Discontinuität von Verunreinigungen herrührt, ist daher noch offen.

Perrot[2]) hat bereits Beobachtungen der thermoelektrischen Kraft von Wismut parallel und senkrecht zur Hauptaxe zwischen $+10°$ und $+100°$ gemacht. Zum Vergleich machte ich Bestimmungen zwischen denselben Temperaturgrenzen an meinem Krystall.

Es ergab sich:

1. Parallel zur krystallographischen Hauptaxe

$$t_1 = 12{,}7°, \quad t_2 = 91°, \quad e = 9267 \text{ MV}$$

oder

$$118{,}35 \text{ MV pro } 1°.$$

1) J. A. Fleming u. J. Dewar, Phil. Mag. **40.** p. 95. 1895.

2) F. L. Perrot, Arch. des sciences Phys. et Nat., August 1898.

2. Senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe

$$t_1 = 15{,}3^0, \quad t_2 = 85{,}9^0, \quad e = 4377 \text{ MV}$$

oder

$$61{,}94 \text{ MV pro } 1^0.$$

$$\text{Verhältnis } \frac{\parallel}{\perp} = 1{,}91.$$

Perrot fand dieses Verhältnis zwischen 1,85 und 2,10 für die verschiedenen von ihm gebrauchten Prismen. Die von ihm als die besten bezeichneten Exemplare lieferten das Verhältnis 2,00.

Ich möchte zum Schluss Hrn. Prof. Warburg für seine vielfache Unterstützung meinen wärmsten Dank ausdrücken.

Berlin, Physik. Institut d. Univ.

(Eingegangen 25. Juni 1901.)

## 12. *Ueber die Abhängigkeit der Absorption der Gase, besonders der Kohlensäure, von der Dichte;* von *Knut Ångström.*

1. Bei Untersuchungen über die Absorption der Strahlung durch die Gase wird gewöhnlich angenommen, dass diese von dem Drucke unabhängig ist, dass also die Absorption die gleiche ist, sofern nur das Product $p\,l$ ($p$ gleich Druck, $l$ gleich Länge der durchstrahlten Schicht), constant ist. Dass diese Annahme bei kleineren Druckänderungen annähernd richtig ist, könnte wohl als wahrscheinlich angenommen werden, wie auch, dass sie bei grösseren Druckänderungen nicht gültig sein kann.

Schon in einer meiner ersten Arbeiten über die spectrale Verteilung der Absorption in dem ultraroten Spectrum[1]) habe ich auch die Frage zu beantworten gesucht, ob die Absorption eines Gases eine Function seiner Spannung sei. Es hatte sich bei dieser Untersuchung gezeigt, dass die Absorption eines Körpers in flüssigem und gasförmigem Zustande nicht identisch ist, ein Resultat, das durch die späteren Untersuchungen von Paschen[2]) völlig bestätigt wurde, und schon dadurch könnte man wohl berechtigt sein, an die Richtigkeit des oben erwähnten Satzes zu zweifeln. Um die Verhältnisse bei den Gasen näher zu untersuchen, wurden zwei Röhre von 6 cm und 12 cm Länge benutzt und die Absorption verglichen, als die Röhren mit demselben Gase bei 1 bez. $^1/_2$ Atm. gefüllt waren. Obschon im allgemeinen eine stärkere Absorption für das kürzere Rohr, d. h. für das dichtere Gas sich ergeben hat, war die Verschiedenheit doch nicht gross genug, um bestimmte Schlüsse über diese Frage zu erlauben. Es erschien mir deswegen wünschenswert, die Untersuchung wieder und zwar mit Röhren, die grössere Druckänderungen erlauben könnten, aufzunehmen, ein Wunsch, den ich doch erst in der letzten Zeit Gelegenheit hatte erfüllt zu sehen.

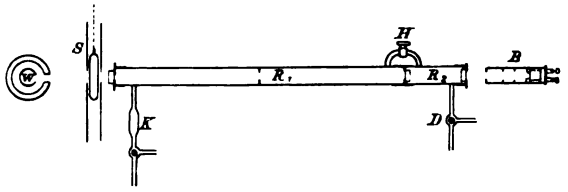
1) K. Ångström, Öfversigt af k. Vetensk. Akad. Förhandl. 47. p. 331. 1890; Physikalische Revue 1. p. 325. 1892.

2) F. Paschen, Wied. Ann. 51. p. 23. 1894; 52. p. 221. 1894.

Die zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungen sind, wie leicht einzusehen ist, mit ziemlich grossen Schwierigkeiten verbunden. Wenn z. B. die Absorption 10 Proc. der Strahlung beträgt und die Veränderung dieser Absorption 20 Proc. ist, gilt es also eine Veränderung in der Gesamtstrahlung zu bestimmen, die nur 2 Proc. derselben beträgt. Die Fehler bei der Bestimmung dieser Veränderung müssen deswegen ziemlich gross sein. Nur durch eine grosse Anzahl von Beobachtungen und die peinlichste Sorgfalt bei der Ausführung können diese Fehler vermindert werden. Die unten in den Tabellen angeführten Werte sind denn auch Mittel von 5 bis 10, oftmals noch mehr Einzelbeobachtungen.

Bei den meisten unten angeführten Versuche war mir Hr. Koch behülflich und sage ich ihm deswegen hier meinen besten Dank.

2. Die Versuchsanordnung ist durch die nachstehende Figur veranschaulicht.




Das Versuchsrohr von 4 cm innerem Durchmesser besteht aus zwei durch Steinsalzplatten geschlossenen Abteilungen, von denen $R_1$ eine Länge von 80,3 cm, $R_2$ eine solche von 18,4 cm hat. Durch die Röhre $H$ mit Hahn können die beiden Abteilungen miteinander in Verbindung gesetzt oder voneinander getrennt werden. Das Rohr $R_2$ kann übrigens durch einen Dreiweghahn $D$ mit einem Kohlensäurebehälter oder mit der äusseren Luft in Verbindung gesetzt werden und $R_1$ ebenso mit einem Quecksilbermanometer und der Wasserstrahlluftpumpe. Als Wärmequellen wurden benutzt: 1. eine Argand'sche Lampe mit Thoncylinder, 2. ein grosser Bunsenbrenner und 3. eine geschwärzte Platinspirale, die elektrisch auf 300° C. erhitzt wurde. Die beiden ersten Wärmequellen waren von einem cylindrischen Wasserschirm umgeben. In diesem Schirm war eine Oeffnung von 1,5 cm Diameter für die Strahlung

angebracht. Die Wärmequelle stand ca. 20 cm von dem Doppelschirm $S$ entfernt. Dieser war mit Löchern von 2 cm Diameter versehen, welche durch einen beweglichen Wasserschirm geöffnet und geschlossen werden konnten. Zahlreiche Diaphragmen schützten den Bolometer $B$ vor Reflexion von den inneren Rohrwänden, die übrigens sehr rauh waren.

Die Versuche wurden in folgender Weise angestellt. Von dem Kohlensäurebehälter wurde das Gas durch ein Rohr mit Phosphorsäureanhydrid (von ca. 50 cm Länge) durch die Röhren $R_1$ und $R_2$ geleitet, danach wurde der Hahn $H$ geschlossen, $R_1$ mit der Luftpumpe in Verbindung gesetzt und das Gas stark verdünnt, dasselbe in $R_2$ dagegen zu gewünschtem Drucke comprimirt. Nachdem die durch das Rohr gegangene Strahlung bestimmt war, wurde der Hahn $H$ geöffnet und die Strahlung wieder bestimmt. Sie durchdringt also in beiden Fällen dieselbe Gasmasse und zwar bei verschiedenen Drucken, indem diese ungefähr im Verhältnis 5 : 1 variirten.

Die Vorteile bei dieser Beobachtungsmethode sind offenbar: es werden bei den beiden Versuchen immer dieselbe Gasmasse und dasselbe Rohr unter unveränderten Versuchsbedingungen benutzt. Nur die Druckverteilung des Gases in den Rohren hat variirt. Wenn die Drucke bei dem ersten Versuche in

$$R_1 = h,$$
$$R_2 = H,$$

sind und die respectiven Längen mit $L$ und $l$ bezeichnet werden, erhält man, wenn die Volumina $W$ und $w$ von $R_1$ und $R_2$ den Längen genau proportional sind, den gemeinsamen Druck $x$, nachdem $H$ geöffnet ist:

$$x = \frac{Hl + hL}{l + L}.$$

Durch Anbringung eines kleinen Compensationsrohres $K$ (vgl. die Figur) wurden die Bedingungen $W/w = L/l$ ziemlich genau erfüllt.[1])

Bei den Bestimmungen der Absorption der Kohlensäure wurde entweder die Strahlung durch das Rohr (mit trockener Luft oder $CO_2$ gefüllt), mit der Strahlung, wenn das Rohr aus seiner Lage zwischen Bolometer und Wärmequelle ent-

1) Der in den Tabellen eingeführte beobachtete Druck $x$ ist ein wenig *grösser* als der berechnete.

fernt war, verglichen (Wechselbestimmungen), oder es wurde das Rohr in seiner Lage fest behalten und die Strahlung unter verschiedenen Umständen bestimmt (Bestimmungen mit festem Rohr). Wenn die Argand'sche Lampe benutzt wurde, konnte nur, den Schwankungen der Lampenstrahlung zufolge, die erste Methode benutzt werden, mit dem Bunsen'schen Brenner wurden alle beide versucht, mit der Platinspirale nur die letzterwähnte.

3. Folgende Tabelle giebt eine Uebersicht der Beobachtungsresultate, die wir mit der Argand'schen Lampe erhalten haben. Die zweite und dritte Columne enthalten die Drucke der Kohlensäure in den beiden Röhren, die vierte und fünfte die Ablenkungen des Galvanometers mit und ohne Rohr vor dem Bolometer, die sechste das Verhältnis dieser Ablenkungen in Procenten, die siebente die Differenz zwischen zwei zu derselben Beobachtungsreihe gehörenden Bestimmungen bei verschiedener Gasdichte. Schliesslich enthält die achte Columne die entsprechende Aenderung der Absorption in Procenten bei *Verminderung* der Gasdichte.

Tabelle 1.

| Reihe | Druck mm | | Ablenkung | | $p$ | Diff. | Aenderung der Abs. Proc. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R_1$ | $R_2$ | mit Rohr | ohne Rohr | | | |
| 1 | 22,0 | 741,0 | 207,2 | 244,6 | 84,6 | 2,2 | −37 |
| | 158,8 | | 210,5 | 242,8 | 86,8 | | |
| 2 | 13,1 | 740,5 | 202,6 | 235,7 | 86,1 | 0,8 | −13 |
| | 150,5 | | 202,1 | 232,6 | 86,9 | | |
| 3 | 18,3 | 740,5 | 191,8 | 221,8 | 86,5 | 0,9 | −15 |
| | 153,8 | | 195,4 | 223,7 | 87,4 | | |
| 4 | 19,2 | 743,5 | 204,9 | 243,2 | 84,3 | 0,3 | − 5 |
| | 156,5 | | 205,8 | 243,0 | 84,6 | | |
| 5 | 17,7 | 743,5 | 208,3 | 248,2 | 84,2 | 0,8 | −13 |
| | 154,1 | | 208,1 | 245,4 | 85,0 | | |
| 6 | 29,9 | 2484 | 197,2 | 244,7 | 80,7 | 1,7 | −21 |
| | 463,5 | | 202,2 | 245,8 | 82,4 | | |

Mittel der Differenzen der fünf ersten Reihen ist 1,0 Proc. Weil die Absorption in diesem Fall nur 6 Proc. beträgt, ist die Aenderung der Absorption $^1/_6$ oder gleich 17 Proc. bei einer Aenderung des Druckes von 1 auf $^1/_6$ Atm. Die sechste Beobachtungsreihe giebt für eine Aenderung des Druckes von ca. 3 auf $^3/_5$ Atm. eine Aenderung in der Absorption gleich 21 Proc.

Mit der Platinspirale als Wärmequelle wurden folgende Resultate erhalten.

Tabelle 2.

| Reihe | Druck mm $R_1$ | Druck mm $R_2$ | Ablenkung | Diff. | Aenderung der Abs. Proc. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,6 | 769,0 | 204,5 | 2,0 | −12 |
| | 151,2 | | 206,5 | | |
| 2 | 10,2 | 768,4 | 201,8 | 1,5 | − 9 |
| | 153,2 | | 203,3 | | |
| 3 | 14,0 | 768,3 | 195,9 | 2,5 | −16 |
| | 155,7 | | 198,4 | | |
| 4 | 8,6 | 2049 | 198,1 | 2,1 | −12 |
| | 389,1 | | 200,2 | | |
| 5 | 11,5 | 1506 | 196,5 | 1,7 | − 9 |
| | 290,2 | | 198,2 | | |

Die Aenderung der Absorption bei einer Druckänderung von 1 auf $^1/_6$ Atm. ist hier ca. 12 Proc., bei einer Druckänderung von 2,4 auf 2,5 . $^1/_6$ Atm. 10,5 Proc. Der Unterschied dieser Zahlen fällt in den Bereich der Beobachtungsfehler.

Mit dem Bunsen'schen Brenner wurden teils Wechselbestimmungen, teils Bestimmungen mit festem Rohr ausgeführt. Diese sind in Tab. 4, jene in Tab. 3 zusammengestellt.

Tabelle 3.

| Reihe | Druck mm $R_1$ | Druck mm $R_2$ | Ablenkung mit Rohr | Ablenkung ohne Rohr | $p$ | Diff. | Aenderung der Abs. in Proc. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17,1 | 2805 | 84,1 | 138,6 | 60,7 | 1,6 | − 4,7 |
| | 509 | | 86,7 | 139,2 | 62,8 | | |
| 2 | 10,0 | 1600 | 86,6 | 138,0 | 62,8 | 2,5 | − 7,8 |
| | 290 | | 90,5 | 138,8 | 65,3 | | |
| 3 | 18,0 | 746,0 | 91,3 | 131,3 | 69,5 | 3,3 | −13,0 |
| | 155,6 | | 96,6 | 133,0 | 72,8 | | |
| 4 | 13,0 | 750,5 | 92,3 | 140,2 | 65,8 | 5,5 | −19,0 |
| | 154,0 | | 100,4 | 141,0 | 71,3 | | |
| 5 | 11,7 | 750,0 | 91,8 | 138,0 | 66,5 | 4,8 | −17,0 |
| | 151,5 | | 98,9 | 138,7 | 71,3 | | |
| 6 | 12,4 | 749,7 | 94,8 | 143,4 | 66,1 | 5,0 | −17,4 |
| | 151,0 | | 100,8 | 141,7 | 71,1 | | |
| 7 | 18,0 | 399,0 | 98,6 | 131,2 | 75,1 | 4,9 | −24,9 |
| | 91,0 | | 105,2 | 131,8 | 80,0 | | |

Tabelle 4.

| Reihe | Druck mm $R_1$ | Druck mm $R_2$ | Ablenkung | Diff. | Aenderung der Abs. in Proc. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14,4 | 2332 | 379,7 | 14,2 | − 7,5 |
| | 423,1 | | 393,9 | | |
| 2 | 32,8 | 769,8 | 395,9 | 22,4 | −13,0 |
| | 173,2 | | 418,3 | | |
| 3 | 40,2 | 770,8 | 396,5 | 20,5 | −12,0 |
| | 178,6 | | 417,0 | | |
| 4 | 16,1 | 423,1 | 429,7 | 39,9 | −27,5 |
| | 93,4 | | 469,6 | | |
| 5 | 13,6 | 93,4 | 500,5 | 24,0 | −35,0 |
| | 30,4 | | 524,5 | | |

Hier ist die Absorption sehr bedeutend und die Aenderung mit der Gasdichte tritt deswegen sehr deutlich hervor. Es zeigt sich aber hier, dass die Aenderung mit zunehmendem Druck in dem Rohre $R_2$, also mit zunehmendem Gasquantum oder zunehmender Gasabsorption, kleiner wird. Dies konnte bei den anderen Wärmequellen nicht constatirt werden.

4. Um diese Resultate noch auf einem anderen Wege zu prüfen, wurden folgende Versuche angestellt. Das Rohr $R_1$ (Länge 80,3 cm) wurde mit Kohlensäure von Atmosphärendruck gefüllt. Wenn jetzt das Rohr $R_2$ (Länge 18,4 cm) auch mit $CO_2$ von demselben Druck gefüllt wird, so bewirkt diese neue Gasschicht eine wenn auch unbedeutende Zunahme der Absorption. Wird das Gas in $R_2$ bis auf 2, 3 etc. Atmosphären comprimirt, so wird die Zunahme der Absorption, falls diese von der Gasdichte unabhängig ist, für jede neue Gasschicht kleiner oder höchstens gleich der ersten Zunahme sein, kann bekanntlich aber nie grösser werden. Verhält es sich aber so, dass in der That diese letzterwähnte Zunahme der Absorption grösser wird als die erste, so beweist das unzweideutig, dass sich das Absorptionsvermögen des Gases mit der Dichte verändert hat, und dass die comprimirte Gasschicht sich im Verhältnis zu der uncomprimirten gewissermaassen wie ein Körper von anderer Beschaffenheit verhält.

Folgende kleine Tabelle giebt die Resultate von neun in dieser Weise angestellten Beobachtungsreihen. Die Wärmequelle war die Platinspirale von 300°. Die Ablenkung des Galvanometers war ca. 198 Sct. Die Zunahme der Absorption ist in Scalenteilen gegeben.

Tabelle 5.

| Zunahme der Absorption | |
|---|---|
| für 1 Atm. | für 4 Atm. |
| 0,9 | 5,4 |
| 1,1 | 5,3 |
| 1,3 | 5,2 |
| 1,1 | 5,0 |
| | 5,6 |
| Mittel 1,1 | Mittel 5,3 |

Statt 4,4 (gleich 4 mal die Zunahme für 1 Atm.), die höchste mögliche Zunahme, wenn die Absorption von der

Gasdichte unabhängig wäre, erhalten wir 5,3 als die Zunahme für 4 Atm.

Schliesslich habe ich teils die Absorption durch ein Rohr von 4 m Länge, das mit $CO_2$ von atmosphärischem Drucke gefüllt war, teils diese Absorption durch ein Rohr von 1 m Länge mit $CO_2$ von 4 Atm. bestimmt. Die Wärmequelle war wieder die Platinspirale von 300°. Die Resultate waren:

| | Rohr von 1 m Länge Druck 4 Atm. (3 Reihen) | Rohr von 4 m Länge Druck 1 Atm. (10 Reihen) |
|---|---|---|
| Absorption: | 16,2 Proc. (± 0,4) | 13,2 Proc. (± 0,2) |

Wir finden also auch hier eine ganz beträchtliche Aenderung der Absorption von 19 Proc.

Diese sämtlichen Beobachtungsreihen geben also ohne Ausnahme dasselbe Resultat, nämlich dass die Absorption von der Gasdichte abhängig ist. Dass die beobachteten Aenderungen von einer Aenderung des Reflexionsvermögens (Steinsalz-$CO_2$) nicht herrühren, davon habe ich mich durch eine besondere Untersuchung überzeugt.

5. Es fragt sich jetzt, welcher Art diese Veränderung der Absorption ist. Besteht dieselbe nur in einer Vermehrung der Stärke der einzelnen Absorptionsbanden oder verbreitern sich dieselben? Die Beobachtungen beantworten auch diese Frage. Wenn nämlich nur die Intensität vermehrt würde, ohne dass sich die einzelnen Banden verbreiterten, so würde daraus folgen, dass mit zunehmender Schichtdicke der Unterschied der Absorption bei Veränderung der Gasdichte allmählich verschwinden würde. Das ist aber nicht der Fall. Sogar bei einer Schichtdicke von 4 m (Druck 1 Atm.) besteht noch der Unterschied des Absorptionsvermögens bei Veränderung der Gasdichte. Es kommt also bei Vermehrung der Gasdichte eine Absorption hinzu, die nicht vorher da war. Dies erklärt auch das Verhältnis, das wir bei Anwendung des Bunsen'schen Brenners gefunden haben, dessen Strahlung zum grössten Teil gerade von der Kohlensäure hervorgebracht wird. Diese Kohlensäure in dem Bunsen'schen Brenner hat nämlich einen Partialdruck von ca. $^1/_{23}$ Atm.[1]) und die Emissions-

1) F. Paschen, Wied. Ann. 52. p. 236. 1894.

wie auch die Absorptionsbanden sind bei dieser Verdünnung ziemlich schmal. Eine genügend grosse Kohlensäureschicht von grösserem Druck absorbirt vollständig diese Emissionsbanden; wird die Dichte der absorbirenden Schicht vermehrt, so nimmt wohl die Breite der Absorptionsbande zu, weil es aber keine Strahlung giebt, die hierdurch absorbirt werden könnte, kann die Veränderung der Absorption hier nicht bemerkt werden.

Durch diese Untersuchung haben wir also gezeigt, dass die Absorption der Kohlensäure durch Vermehrung der Gasdichte verändert wird, dass diese Veränderung bei den Schichtendicken, die hier angewendet sind und schon bei einer Aenderung des Druckes im Verhältnis 1 : 5 ziemlich gross ist und dass dieselbe durch eine Verbreiterung der Absorptionsstreifen zweifellos bewirkt wird.[1])

Diese Resultate stehen übrigens in schönster Uebereinstimmung sowohl mit den Ansichten von Kayser[2]), wie auch mit den Beobachtungen von Paschen.[3]) Aus diesen geht klar hervor, dass die Breite der grossen Absorptionsbanden der Kohlensäure mit zunehmender Schichtdicke sich nicht merklich verbreitern, nur dunkler werden. Paschen betont aber ausdrücklich, dass „was er über die Schichtdicke gesagt, nicht ohne weiteres für die Gasdichte gilt“[4]), und in einer Note an derselben Stelle fügt er hinzu: „Die $CO_2$ der Zimmerluft steht unter einem Partialdruck von ca. $^1/_{1000}$ Atm. Es mag dies der Grund sein, weshalb die Breite des Absorptionsstreifens für sie ein wenig schmäler war.“

6. Die von Wüllner und Zöllner u. a. vertretene Ansicht, dass die Absorption der Gase nur von der Zahl der getroffenen Molecüle abhängig ist, und dass es gleichgültig sei, ob wir die Dicke der Schicht oder ihre Dichte vermehren, ist auf Grund der jetzt gefundenen Thatsachen unhaltbar.

Die Discrepanzen, die zwischen den Beobachtungen der Absorption der Kohlensäure seitens verschiedener Forscher

---

1) Ausgeschlossen ist ja hierbei nicht, dass die Linien gleichzeitig ein wenig dunkler werden können. Dies kann aber aus vorliegenden Beobachtungen kaum beurteilt werden.

2) H. Kayser, Wied. Ann. 42. p. 310. 1894.

3) F. Paschen, Wied. Ann. 51. p. 34. 1894.

4) l. c.

vorkommen, lassen sich auch völlig erklären durch diese Aenderung des Absorptionsvermögens der Gase mit der Gasdichte. So hat z. B. Arrhenius neulich solche Untersuchungen ausgeführt[1]) indem er ein Rohr von 50 cm Länge mit Kohlensäure von 1 bis sogar 7 Atm. Druck füllte und also die Absorption als Function der *Schichtdicke* und der *Gasdichte* bestimmte. Weil die so erhaltenen Resultate mit den Schlüssen, die ich in einer kleinen Arbeit[2]) betreffs der Bedeutung der Kohlensäure für die Absorption der Erdatmosphäre zog, nicht stimmen, glaubte sich Arrhenius genötigt zu erklären, „dass diese Schlüsse auf theoretischen Betrachtungen beruhen, die durch seine Versuche als unhaltbar erwiesen wurden" auf „unrichtigen Principien" etc. Dass die Discrepanzen wirklich auf unrichtigen Principien beruhen, ist jetzt offenbar und zwar 1. weil die Resultate, die Arrhenius erhalten hat, nach dem, was oben gezeigt ist, nicht ohne weiteres für die Absorption der atmosphärischen Kohlensäure (die unter einem Partialdruck von weniger als $^1/_{1000}$ Atm. steht) gelten und 2. weil die Veränderungen in der Absorption, die er mit zunehmender *Dichte* gefunden hat, für Kohlensäure von *verschiedenen Schichtdicken* und *constantem Druck* nicht gelten. Wenn man die Aenderung der Absorption mit der Gasdichte berücksichtigt — eine Aenderung, die unter den Versuchsbedingungen von Arrhenius auf 3,5 Proc. pro Atmosphäre geschätzt werden kann — stimmen die Resultate, die er erhalten hat, völlig mit denjenigen die von Hrn. Koch erhalten wurden[3]) und mit denjenigen, welche hier oben veröffentlicht sind. Die Absorption, die Arrhenius bei Anwendung einer Wärmequelle von 100° C., einer Schichtdicke gleich 50 cm und einem Drucke gleich 8 Atm. gefunden hat, ist 20 Proc. (für die Einwirkung der Steinsalzplatten nicht corrigirter Wert). Berechnen wir dadurch die Absorption bei 400 cm Schichtdicke und 1 Atm. Druck, so finden wir $20 - 20 \cdot 8 \cdot 0{,}035 = 14{,}1$ Proc., was mit den von Hrn. Koch gefundenen 14,3 Proc. völlig übereinstimmt.

1) Sv. Arrhenius, Ann. d. Phys. 4. p. 690. 1901; Öfversigt af k. Vetensk. Akad. Förhandl. 58. p. 25. 1901.

2) K. Ångström, Ann. d. Phys. 3. p. 720. 1900.

3) J. Koch, Öfversigt af k. Sv. Vetensk. Akad. Förhandl. 58. p. 391. 1901.

Arrhenius findet weiter, dass von der Strahlung einer Wärmequelle von $-80°$, 50 cm Kohlensäure von 7 Atm. Druck 21 Proc. (für die Einwirkung der Steinsalzplatten corrigirter Wert) absorbirt werden, was den Verhältnissen in der Atmosphäre nach Arrhenius nahezu gleichkommen würde. Eine Schicht von 355 cm Länge und 1 Atm. würde aber nach dem oben Gesagten 15,7 Proc. absorbiren. Wie gross diese Absorption bei einem Partialdruck von nur $^1/_{1000}$ Atm. ist, können wir bei unserer gegenwärtigen unvollständigen Kenntnis der Sache nicht exact sagen — 16 Proc. beträgt dieselbe offenbar nicht.

Was die Aenderung der Absorption ($da$ Procent) mit der Schichtdicke ($dl$ Centimeter) betrifft, so wird diese aus demselben Grunde von Arrhenius zu gross angegeben, weil er die Aenderung nicht nur mit der *Schichtdicke*, sondern auch mit der *Gasdichte* bestimmt hat. Diese Aenderung $da/dl$ würde nach Arrhenius zwischen einer Schichtdicke von 2 bis 4 m 0,020 betragen, nach den Bestimmungen von Hrn. Koch und mir ist dieselbe nur 0,005.

Die Schlüsse, die ich bereits betreffs der atmosphärischen Kohlensäure gezogen habe — dass diese 16 Proc. der Erdstrahlung nicht übersteigen dürfte und dass die Veränderungen der Absorption mit Veränderung des atmosphärischen Kohlensäuregehaltes sehr klein sind[1]) — scheint mir deswegen trotz allem in guter Uebereinstimmung mit den Thatsachen zu sein.[2])

Upsala, Physik. Inst. d. Univ.

1) l. c. p. 732.

2) Ausführlicher habe ich die Einwendungen von Arrhenius in einer besonderen Abhandlung behandelt (Öfversigt af k. Sv. Vetensk. Förhandl. 58. p. 381. 1901.

(Eingegangen 3. Juli 1901.)

## 13. *Ueber die Aufbewahrung von Normalmagneten in Eisenbüchsen;* *von Ignaz Klemenčič.*

Aus den neueren Magnetstahlsorten kann man Magnete herstellen, welche bei entsprechender Sorgfalt in der Aufbewahrung ihr Moment während eines Jahres bis auf 0,1 Proc. constant erhalten und daher besonders zu Normalmagneten geeignet sind.[1]) Als solche können sie bei verschiedenen physikalischen und elektrotechnischen Messapparaten und Messmethoden Verwendung finden. Für die Behandlung von Normalmagneten ist die Frage von Wichtigkeit, in welcher Weise sie am besten aufbewahrt werden, damit sie vor jenen Umständen, die das Moment beeinflussen, in erster Linie also vor mechanischen Erschütterungen und der Einwirkung eines äusseren Magnetfeldes geschützt sind.

Es liegt nahe, die Magnete zu diesem Zwecke in weichgepolsterten Eisenbüchsen aufzubewahren und man kann erwarten, dass sie hierdurch sowohl gegen Stoss als auch gegen äussere magnetische Kräfte möglichst gut geschützt sind; zugleich wären sie bei dieser Art der Aufbewahrung leicht transportfähig. Man muss jedoch noch besonders untersuchen, ob nicht das Moment eines derart in Eisen eingeschlossenen Magnetes sich fortwährend von selbst ändert; auch dies wäre von Nachteil, denn die äusserste Constanz des Momentes ist jene Eigenschaft, welche man in erster Linie von einem Normalmagnet verlangt. Ein Anwachsen des Momentes ist ebenso wenig wünschenswert wie eine Abnahme desselben.

Um in dieser Richtung einigen Aufschluss zu erhalten, habe ich Versuche mit mehreren in Eisenbüchsen aufbewahrten Magneten gemacht. Die Eisenbüchsen waren aus Gasleitungsröhren hergestellt und an beiden Enden mit eingeschraubten Eisendeckeln versehen. Das Innere der Büchse war zunächst

1) Sehr gute Magnetstahlsorten liefert die Firma „Böhler & Cie.", Gussstahlfabrik in Kapfenberg in Steiermark. Vgl. des Verfassers Untersuchungen in Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **108.** p. 491 u. 989. 1899; **109.** p. 242. 1900.

an den Wänden mit einer dicken Schicht von Fliesspapier belegt. Am Boden befand sich ein etwa 1 cm dicker Baumwollpfropf. Der Magnet selbst ist in ein mit Kork verschlossenes Glasrohr gelegt, dieses sodann in der Eisenbüchse untergebracht und der Deckel aufgeschraubt. Zu jeder Beobachtung wurde das Glasrohr *m m* samt dem Magnet herausgenommen und nach derselben gleich wieder hineingelegt. Es waren im ganzen drei solche Büchsen vorhanden. Für gewöhnlich lagerten dieselben ohne Rücksicht auf irgend eine Orientirung hinsichtlich des magnetischen Meridians nebeneinander; es wurde auch keine Rücksicht darauf genommen, ob sie im Verlaufe der Manipulationen mit Eisenmassen in Berührung kamen oder nicht. Sie hatten die folgenden Dimensionen:

Büchse Nr. I: Länge 14,5 cm, äusserer Durchmesser 2,6 cm und eine Wandstärke von ca. 3 mm.

Büchse Nr. II: Länge 10,5 cm, sonst wie Nr. 1.

Büchse Nr. III: Länge 9,5 cm, äusserer Durchmesser 2 cm, Wandstärke ca. 2 mm.

Es wurde aufbewahrt:

In Nr. I ein Magnet „00,10" von quadratischem Querschnitt, Länge $l = 10$ cm und Seite $s = 4$ mm.

In Nr. II ein Magnet „45,6", quadratisch $l = 6$ cm, $s = 6$ mm.

In Nr. III ein Magnet „Alpha", quadratisch $l = 6$ cm, $s = 4$ mm.

Sämtliche Magnete stammen aus der Fabrik von „Böhler & Cie."; sie wurden (in der Fabrik gehärtet und sodann hier im Institut) nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt und erst mehrere Wochen danach in Beobachtung genommen.

Die Frage, ob die Einschliessung in eine Eisenbüchse das Moment verändere und ob diese Aenderungen längere Zeit bestehen, wurde durch wiederholte Beobachtungen des Momentes entschieden. Zu diesem Zwecke wurde der Magnet jedesmal aus der Büchse genommen und sein Moment an einem Magnetometer aus der ersten Hauptlage bestimmt, wobei die Variationen der Horizontalcomponente mit Hülfe einer am Magnetometer angebrachten Galvanometerspule, eines alten in Paraffin ausgekochten Manganinwiderstandes (20000 $\Omega$) und eines Westonnormalelementes controlirt wurden.

In den nachfolgenden Tabellen sind nicht die absoluten

Werte des Momentes, sondern nur die Magnetometerausschläge eingetragen und zwar bedeutet:

Nr. und Dat. die Nummer und das Datum der fortlaufenden Beobachtung, $\alpha$ den Magnetometerausschlag, hervorgebracht durch die Schliessung des das Westonelement enthaltenden Stromkreises, $\beta$ den Magnetometerausschlag, bewirkt durch die Ablenkung des Magnetes, $\beta_0$ diesen Ausschlag, reducirt auf $\alpha = 500$, $T$ die Temperatur, welche an einem in der Nähe des Ablenkungsstatives aufgehängten Thermometer abgelesen wurde.

Tabelle I.

Magnet 00,10.

| Nr. | Dat. | $T$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\beta_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3. II. | 15,8 | 500,4 | 798,5 | 797,9 |
| 2 | 4. II. | 17,8 | 500,3 | 796,8 | 796,3 |
| 3 | 6. II. | 17,0 | 500,6 | 796,9 | 795,9 |
| 4 | 10. II. | 16,0 | 500,0 | 796,4 | 796,4 |
| 5 | 17. II. | 16,0 | 500,1 | 796,2 | 796,0 |
| 6 | 3. III. | 15,8 | 499,9 | 795,6 | 795,7 |
| 7 | 17. III. | 17,2 | 499,8 | 794,9 | 795,2 |
| 8 | 31. III. | 16,0 | 500,8 | 798,2 | 796,9 |
| 9 | 5. IV. | 15,8 | 502,2 | 798,4 | 794,9 |
| 10 | 22. IV. | 16,0 | 500,9 | 796,8 | 795,4 |
| 11 | 11. V. | 15,4 | 500,9 | 796,7 | 795,3 |
| 12 | 24. V. | 16,2 | 503,6 | 801,0 | 795,2 |
| 13 | 22. VI. | 19,0 | 504,4 | 801,8 | 794,7 |

Tabelle II.

Magnet 45,6.

| Nr. | Dat. | $T$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\beta_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7. II. | 17,4 | 500,9 | 345,0 | 344,4 |
| 2 | 8. II. | 17,0 | 500,6 | 347,6 | 347,2 |
| 3 | 9. II. | 17,4 | 500,0 | 347,4 | 347,4 |
| 4 | 10. II. | 17,2 | 500,0 | 347,5 | 347,5 |
| 5 | 17. II. | 16,0 | 500,1 | 348,1 | 348,0 |
| 6 | 3. III. | 15,0 | 500,0 | 348,4 | 348,4 |
| 7 | 31. III. | 16,0 | 500,8 | 349,6 | 349,0 |
| 8 | 5. IV. | 15,8 | 502,2 | 350,0 | 348,5 |
| 9 | 22. IV. | 16,0 | 500,9 | 349,0 | 348,4 |
| 10 | 11. V. | 15,4 | 500,9 | 349,1 | 348,5 |
| 11 | 24. V. | 16,2 | 503,6 | 350,9 | 348,4 |
| 12 | 22. VI. | 19,0 | 504,4 | 351,1 | 348,0 |

Tabelle III.

Magnet Alpha.

| Nr. | Dat. | $T$ | $\alpha$ | $\beta'$ | $\beta_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8. II. | 18,4 | 500,6 | 340,7 | 340,3 |
| 2 | 9. II. | 17,4 | 500,1 | 341,3 | 341,2 |
| 3 | 10. II. | 17,2 | 500,0 | 341,1 | 341,1 |
| 4 | 17. II. | 16,0 | 500,1 | 341,5 | 341,4 |
| 5 | 3. III. | 15,8 | 500,0 | 341,5 | 341,5 |
| 6 | 17. III. | 17,2 | 499,8 | 341,3 | 341,4 |
| 7 | 31. III. | 16,0 | 500,8 | 342,8 | 342,2 |
| 8 | 5. IV. | 15,8 | 502,2 | 343,1 | 341,5 |
| 9 | 22. IV. | 16,0 | 500,9 | 342,0 | 341,4 |
| 10 | 11. V. | 15,4 | 500,9 | 342,0 | 341,4 |
| 11 | 24. V. | 16,2 | 503,6 | 344,0 | 341,4 |
| 12 | 22. VI. | 19,0 | 504,4 | 344,2 | 341,2 |

Wie man aus den Tabellen ersieht, ist eine verändernde Wirkung der Büchse auf das Moment im Anfang der Beobachtungen ganz deutlich zu constatiren; bei „00,10“ hat es im Verlaufe der ersten Tage ganz deutlich abgenommen, während bei „45,6“ und „Alpha“ eine kleine Zunahme zu verzeichnen ist. Ob diese Zunahme bez. Abnahme in einer Polarität der Büchse und entsprechender Orientirung der Magnetpole gegen dieselbe ihren Grund hat, kann man nicht entscheiden, da im ganzen Verlaufe der Beobachtung auf eine besondere Orientirung in dieser Richtung nicht geachtet wurde.

Nach einigen Tagen kommt die Aenderung des Momentes zur Ruhe und der Scalenausschlag $\beta_0$ bleibt innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler constant, sodass man im Verlaufe von Monaten kaum eine merkliche Aenderung mit Sicherheit verzeichnen kann.

Um den Schutz gegen Erschütterungen zu erproben, habe ich in eine Büchse Nr. IV von gleicher Grösse wie Nr. I einen runden Magnet von 10 cm Länge und 6 mm Dicke gelegt und dann die Büchse samt dem Magnet aus 1 m Höhe auf eine Marmorplatte fallen lassen. Der Magnet gab vor dem Fallen einen Magnetometerausschlag von 923,7 Scalenteilen; nach einmaligem Fallen 924,0 und nach zehnmaligem Fallen 923,5 Scalenteile. Man kann danach sagen, dass ihn die weiche Lagerung in der Büchse vor Erschütterungen sehr gut schützt.

Aus diesen Versuchen ergiebt sich, dass Eisenbüchsen im Rahmen der praktisch vorkommenden Verhältnisse sich sehr gut zur Aufbewahrung von Normalmagneten eignen. Da es aber an und für sich interessant ist, die Schutzwirkung einer solchen Büchse gegen ein äusseres Feld überhaupt kennen zu lernen, habe ich mit der soeben erwähnten Büchse noch einige weitere Versuche in folgender Art gemacht.

Auf ein Glasrohr wurde eine kleine Inductionsspule von 9 cm Länge, 0,9 cm äusserem Durchmesser und ca. 300 Windungen gewickelt und die Induction in derselben bestimmt einmal wenn sie frei, und dann wenn sie in der Büchse befindlich der Wirkung eines bestimmten magnetischen Feldes ausgesetzt wurde. Im zweiten Falle wurden die Zuleitungsdrähte zur Inductionsspule durch eine kleine Oeffnung in der Mantelfläche der Büchse geführt. Das benutzte Feld wurde mittels einer stromdurchflossenen grossen Spule von 19 cm Länge, 9 cm äusserem, 5 cm innerem Durchmesser und 22,1 Windungen pro Längeneinheit hergestellt.

Als die Inductionsspule ungeschützt in der Feldspule lag, gab das Galvanometer beim Oeffnen oder Schliessen des Feldstromes einen Inductionsausschlag $\alpha$ von 87,7 Sct. bei der Feldstärke $H = 285$ abs. Einh. und $\alpha = 22{,}2$ bei $H = 72{,}3$. Der Ausschlag ist in diesem Falle proportional der Feldstärke, wie er auch sein soll.

Unter dem Schutze der Büchse wurden jedoch folgende Galvanometerausschläge erhalten:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bei | $H =$ | 16 | abs. Einh. | $\alpha =$ 0,3 |
| „ | $H =$ | 44 | „ „ | $\alpha =$ 0,4 |
| „ | $H =$ | 88 | „ „ | $\alpha =$ 0,5 |
| „ | $H =$ | 139 | „ „ | $\alpha =$ 1,1 |
| „ | $H =$ | 206 | „ „ | $\alpha =$ 17,0 |
| „ | $H =$ | 356 | „ „ | $\alpha =$ 46,4 |

Die Ausschläge bei den niederen Feldstärken sind etwa 20—40 mal kleiner als die der ungeschützten Spule. Uebrigens sind die kleinen bei den vier ersten Feldstärken erhaltenen Ausschläge wahrscheinlich einer anderen Ursache als der Induction in der Spule zuzuschreiben; insbesondere dürfte hier der Einfluss der Einführungsstelle bemerkbar sein. Von $H = 139$ an beginnt der Schutz der Büchse rasch nach-

zulassen; bei dieser Feldstärke aber ist die Magnetisirungsintensität der Büchse schon nahe am Maximum, wie aus dem folgenden Versuche hervorgeht. Um die Büchse wurden einige Drahtwindungen gelegt und aus dem Vergleiche mit einer Aichspule und mit Hülfe des schon früher benutzten ballistischen Galvanometers die Induction $B$ im Büchseneisen bei verschiedenen Feldstärken bestimmt.[1]) Es ergaben sich die folgenden Werte:

| | |
|---|---|
| $H = 17$ abs. Einh. | $B = 1140$ |
| $H = 44$ „ „ | $B = 3150$ |
| $H = 88$ „ „ | $B = 6100$ |
| $H = 126$ „ „ | $B = 9050$ |
| $H = 217$ „ „ | $B = 14450$ |
| $H = 273$ „ „ | $B = 16300$ |
| $H = 361$ „ „ | $B = 18300$ |

Die magnetische Schutz- oder Schirmwirkung wird bekanntlich auch bei Galvanometern häufig angewendet und H. du Bois[2]) hat diesen Fall für Hohlcylinder und kleine Feldstärken theoretisch und experimentell behandelt. Er findet ein Schutzverhältnis von der Ordnung 10 bis 20, welches im Falle einer allseits geschlossenen Büchse wie der hier verwendeten und bei mittleren Feldstärken auch ungefähr vorhanden ist.

Es wäre aber doch vielleicht verfehlt, aus den Versuchen mit der Inductionsspule allein die Schutzwirkung der Büchse für einen in ihr eingeschlossenen Magnet oder Eisenstab zu beurteilen. Ich habe daher in dem Innern der kleinen Inductionsspule einen weichen Eisenstab von 11 cm Länge und 4 mm Dicke befestigt und die früheren Versuche wiederholt. Ich bekam jetzt folgende Ausschläge:

| | Inductionsspule mit Eisenstab: | |
|---|---|---|
| | frei | geschützt |
| $H = 0{,}25$ | $\alpha = 2{,}1$ | $\alpha = 0{,}7$ |
| $H = 1{,}0$ | $\alpha = 11{,}6$ | $\alpha = 2{,}4$ |
| $H = 2{,}0$ | $\alpha = 28{,}2$ | $\alpha = 4{,}4$ |
| $H = 4{,}7$ | $\alpha = 76{,}0$ | $\alpha = 7{,}1$ |
| $H = 26{,}7$ | $\alpha = 526{,}0$ | $\alpha = 18{,}5$ |
| $H = 83{,}4$ | $\alpha = 1192{,}0$ | $\alpha = 89{,}0$ |
| $H = 145{,}0$ | $\alpha = 1344{,}0$ | $\alpha = 98{,}5$ |
| $H = 278{,}0$ | | $\alpha = 1014{,}5$ |

1) Der Eisenquerschnitt der Büchse war gleich 2,16 cm².

2) H. du Bois, Wied. Ann. 65. p. 1. 1898.

Aus diesen Daten lässt sich das Schutzverhältnis mit Rücksicht auf die veränderliche Permeabilität des Eisens schwer bestimmen; man kann aber doch so viel sagen, dass es gewiss grösser als 3 ist. Danach ist die Schutzwirkung bei der hier getroffenen Anordnung der Büchsen zwar durchaus nicht so gross, als man erwarten würde, immerhin aber ist sie eine derartige, dass man auch bei Anwendung selbst einer einzigen Büchse bezüglich des Schutzes von Normalmagneten gegen äussere Felder bedeutende Vorteile erzielen kann. Die Schutzwirkung könnte bedeutend gesteigert werden, wenn man mehrere ineinander geschachtelte Eisenbüchsen anwenden würde, wie dies für Galvanometer auch schon vorgeschlagen wurde.

Jedenfalls lehrt die vorliegende Untersuchung, dass Eisenbüchsen mit grossem Vorteile zur Aufbewahrung und zum Transporte von Normalmagneten verwendet werden können.

Innsbruck, Universität, Juni 1901.

(Eingegangen 8. Juli 1901.)

## 14. *Beiträge zur Kenntnis des Magnetisirungsvorganges I. Ueber Härtungsnachwirkungen; von Ignaz Klemenčič.*

Es ist eine bekannte Thatsache, dass die festen Körper nach starken Deformationen oder nach hochgradiger Erwärmung einen Nachwirkungsprocess durchmachen, indem ihre Molecüle oder Molecülgruppen noch lange Zeit danach Umlagerungen erfahren und oft erst nach Jahren eine gewisse Ruhelage erreichen. Ich erinnere in dieser Beziehung an das Phänomen der elastischen Nachwirkung, an die zeitlichen Aenderungen der Inductionsfähigkeit des Eisens, an die Widerstandsänderungen von Drähten, an die Erscheinung der Nullpunktsdepressionen bei Thermometern etc. Solche Umlagerungen üben auf die physikalischen Eigenschaften des Körpers, nicht aber auf sein chemisches Verhalten einen grossen Einfluss aus, sodass der Physiker in vielen Fällen für die Körper unterschiedliche Merkmale finden kann, in welchen chemische Methoden absolute Gleichheit ergeben. Manchmal könnte man aus dem physikalischen Verhalten eines Körpers geradezu seine Vergangenheit offenbaren bez. das Datum irgend einer durchgemachten Katastrophe feststellen. Im allgemeinen kann man sagen, dass die Körper im festen Zustande hinsichtlich ihrer physikalischen Eigenschaften ausserordentlich unbeständig sind. In dieser Beziehung scheinen mir die im Folgenden behandelten Härtungsnachwirkungen besonders charakteristisch zu sein.

Meine früheren Beobachtungen über die Constanz permanenter Magnete[1]) haben ergeben, dass die zeitliche Abnahme

1) J. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **109.** p. 242 u. 827. 1900; Ann. d. Phys. **4.** p. 316. 1901. Auch Strouhal und Barus (Wied. Ann. **20.** p. 662. 1883) haben in ihrer bekannten,

des magnetischen Momentes auf zwei Ursachen zurückzuführen ist; erstens auf Structuränderungen oder Umlagerungen, welche sich als Nachwirkungen der vorausgegangenen Härtung ergeben und die man als Härtungsnachwirkungen bezeichnen kann, und zweitens auf die durch die Magnetisirung hervorgerufenen Deformationsnachwirkungen, die man Magnetisirungsnachwirkungen nennen kan. Diese letzteren sind nur bei einem frisch magnetisirten, aber schon lange vorher gehärteten Stabe rein zu beobachten.

Um den Einfluss der Härtungsnachwirkungen auf das Verhalten eines Magnetstabes zu untersuchen, muss man ihn möglichst bald nach der Härtung magnetisiren und dann einige Zeit hindurch sein Moment beobachten.[1])

Zu diesem Zwecke wurden Silberstahlstäbe von verschiedenen Dimensionen in einem Kohlenfeuer nahe bis zur Weissglut erhitzt und dann in Wasser abgeschreckt. Nach der Härtung wurden die Stäbe nach Ablauf einer gewissen Zeit $\vartheta$ im homogenen Felde (600 abs. Einh.) einer stromdurchflossenen Spule (Länge = 50 cm, äusserer Durchmesser = 5 cm, Zahl der Windungen pro 1 cm = 50) magnetisirt.[2]) Die erste Momentbestimmung konnte 1 Min. nach der Magnetisirung ausgeführt werden. Hierzu diente ein Magnetometer, dessen Nadel durch den Versuchsstab aus der I. Hauptlage abgelenkt wurde.

---

wertvollen Arbeit die magnetischen Verluste eines Stabes auf zwei Ursachen zurückgeführt. Die erste ist die, welche ich hier als Härtungsnachwirkung bezeichne und worüber ich im Nachfolgenden einige Beobachtungen mitteile, die insofern neu sind, als sie sich auf die Zeit unmittelbar nach der Härtung beziehen und den Ablauf dieser Ursache bei gewöhnlicher Temperatur ins Auge fassen, während Strouhal und Barus den Ablauf der Nachwirkungen bei erhöhter Temperatur studirten. Die zweite von Strouhal und Barus angenommene Art des magnetischen Verlustes deckt sich mit der von mir erkannten Ursache nicht insofern, als ich annehme und schon zum Teile bewiesen zu haben glaube, dass Verluste nach Art der magnetischen Nachwirkung selbst bei constanter Temperatur unmittelbar nach der Magnetisirung auftreten und eine gewisse, allerdings ziemlich kurze Zeit andauern können.

1) Eine vorläufige Mitteilung über diesen Gegenstand ist in den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 110. 1901 veröffentlicht worden.

2) Magnetisirungsdauer = 4 Sec.

Durch eine passende Einrichtung des Ablenkungsstativs war bewirkt, dass der Versuchsstab, selbst bei mehrmaligem Wechsel seiner Lage, immer wieder an dieselbe Stelle gegenüber der Magnetometernadel gebracht werden konnte. Bei länger währenden Beobachtungen und wenn es sich um eine weitergehende Genauigkeit handelte, musste auf die Aenderungen der Horizontalcomponente Rücksicht genommen werden, was mit Hülfe einer am Magnetometer angebrachten Galvanometerrolle, eines Westonnormalelementes und eines Manganinwiderstandes von 20000 Ω geschehen konnte.

In den folgenden Tabellen bedeutet $N$ die Nummer des Stabes, $\vartheta$ die Zeit zwischen Härtung und Magnetisirung in Minuten, $\alpha$ den Magnetometerausschlag 1 Min. nach der Magnetisirung; $\alpha$ ist also ein Maass des magnetischen Momentes, $\varphi$ den Magnetometerausschlag in Procenten von $\alpha$ zur Zeit $t$, welche am Kopfe der Columnen in Minuten verzeichnet ist und ihren Anfangspunkt im Momente der Magnetisirung hat.

Die Resultate der Tab. I beziehen sich auf Silberstahlstäbe von 6 cm Länge und 6 mm Dicke.

Tabelle I.

| $N$ | $\vartheta^m$ | $\alpha$ | $\varphi$ nach $t$ = | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $13^m$ | $24^m$ | $49^m$ | $119^m$ |
| 8 | 0,6 | 282,8 | 100 | 97,4 | 95,9 | 94,7 | 93,4 | 91,6 | 88,9 |
| 9 | 1,0 | 279,0 | 100 | 97,5 | 95,4 | 94,1 | 93,0 | 91,0 | 88,5 |
| 10 | 2,0 | 288,3 | 100 | 98,6 | 97,3 | 96,2 | 94,8 | 93,0 | 90,9 |
| 11 | 5,0 | 283,4 | 100 | 98,9 | 97,0 | 96,0 | 94,6 | 93,6 | 91,0 |
| 13 | 10,0 | 278,5 | 100 | 99,5 | 98,5 | 97,5 | 96,3 | 94,5 | 92,4 |
| 12 | 20,0 | 299,7 | 100 | 99,9 | 99,5 | 99,0 | 98,6 | 97,8 | 95,4 |
| 14 | 60,0 | 292,4 | 100 | 99,9 | 99,8 | 99,6 | 99,4 | 98,9 | 97,8 |

Tab. II bezieht sich ebenfalls auf Silberstahlstäbe von 6 cm Länge und 6 mm Dicke, wobei aber das Intervall $\vartheta$ zwischen Härtung und Magnetisirung noch grösser genommen wurde. Die Daten der beiden Tabellen sind in Fig. 1 und 2 in Curven eingetragen. Hierbei beziehen sich die ausgezogenen Curven auf eine Zeitzählung vom Momente der Magnetisirung, die gestrichelten jedoch auf eine Zeitzählung vom Momente der Härtung.

Tabelle II.

| Nr. 4. $\vartheta = 1^m$, $\alpha = 301{,}8$ | | Nr. 2. $\vartheta = 60^m$, $\alpha = 302{,}8$ | | Nr. 3. $\vartheta = 360^m$, $\alpha = 300{,}7$ | | Nr. 1. $\vartheta = 1440^m$, $\alpha = 305{,}9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t^m$ | $\varphi$ | $t^m$ | $\varphi$ | $t^m$ | $\varphi$ | $t^m$ | $\varphi$ |
| 1 | 100 | 1 | 100 | 1 | 100 | 1 | 100 |
| 3 | 97,5 | 3 | 100 | 3 | 100 | 3 | 100 |
| 7 | 95,3 | 7 | 99,7 | 7 | 99,9 | 7 | 100 |
| 13 | 94,2 | 13 | 99,5 | 13 | 99,9 | 13 | 100 |
| 24 | 92,5 | 24 | 99,2 | 24 | 99,8 | 24 | 99,9 |
| 49 | 91,0 | 49 | 98,5 | 49 | 99,7 | 49 | 99,8 |
| 119 | 88,2 | 119 | 97,3 | 119 | 99,3 | — | — |
| 360 | 84,8 | 360 | 95,3 | 260 | 98,9 | — | — |
| 1380 | 81,1 | 1320 | 92,0 | 1020 | 97,2 | 1440 | 99,0 |
| 4260 | 78,2 | 4200 | 89,2 | 3900 | 95,1 | 2820 | 98,6 |
| 8580 | 76,6 | 8520 | 87,4 | 8220 | 93,1 | 7140 | 97,2 |

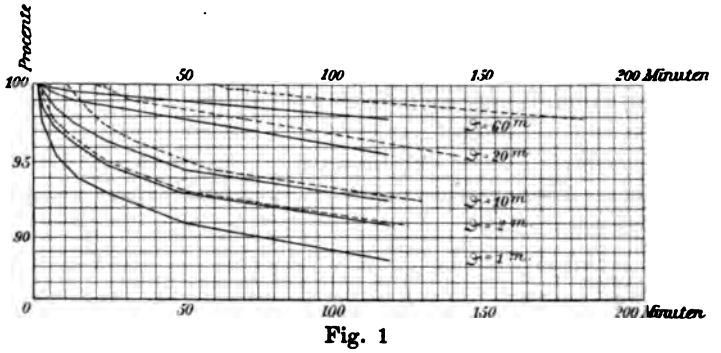



Fig. 1

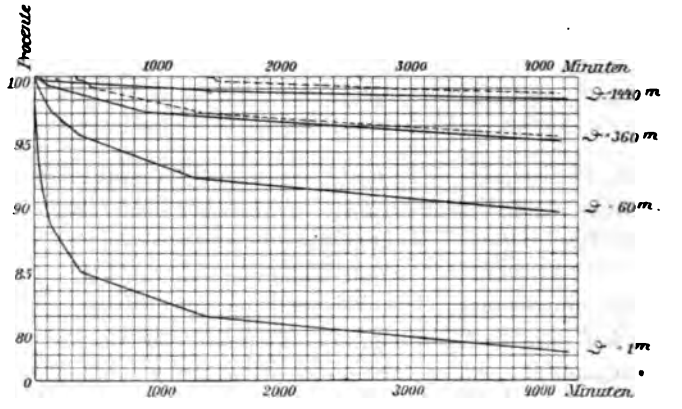



Fig. 2.

Wie man sieht, ist die procentische Abnahme gerechnet vom Momente der Magnetisirung um so geringer, je länger die Zeit $\vartheta$ ist, die zwischen Härtung und Magnetisirung verflossen ist. Aus dem Verlaufe geht aber noch weiter hervor, dass die procentische Abnahme in einem gewissen Zeitintervalle in erster Annäherung in allen Fällen gleich gross ausfällt, wenn man dieses Zeitintervall vom Momente der Härtung und nicht vom Momente der Magnetisirung zählt. Während also z. B. die procentische Abnahme des Momentes zwischen der 120. und 140. Min. nach dem Augenblicke der Magnetisirung sehr verschieden ist, je nach der Zeitdifferenz zwischen Härtung und Magnetisirung, ist im Gegensatze hierzu die procentische Momentabnahme zwischen der 120. und 140. Min., gezählt vom Augenblicke der Härtung, von der Zeitdifferenz zwischen Härtung und Magnetisirung in erster Annäherung unabhängig. Danach scheint es also, dass der Ablauf der Härtungsnachwirkungen durch die Magnetisirung nur sehr wenig beeinflusst wird. Bei genauerer Betrachtung der Curven lässt sich jedoch constatiren, dass zu irgend einer Zeit nach der Härtung die Abnahme des Momentes bei der grösseren Zeitdifferenz $\vartheta$ etwas langsamer vor sich geht als bei der kleineren. Zudem muss man noch berücksichtigen, dass ein Teil der Momentabnahme auf die später zu behandelnden Magnetisirungsnachwirkungen entfällt, welche im allgemeinen zwar ziemlich klein sind und rasch verlaufen, aber doch immerhin wenigstens in den ersten Tagen nach der Magnetisirung eine raschere Momentabnahme bewirken.[1])

Die Härtungsnachwirkungen scheinen darin zu bestehen, dass nach dem Härten eine fortdauernde, zuerst rasch, dann immer langsamer verlaufende moleculare Umlagerung vor sich geht, infolge welcher die durch die Magnetisirung gerichteten Molecularmagnetgruppen desorientirt werden. Es folgt nun aus diesen Beobachtungen, dass die durch die Härtung eingeleiteten molecularen Umlagerungen bei nicht magnetisirten Stäben schneller verlaufen als bei magnetisirten. Infolge dessen wird ein Magnet zu einer bestimmten Zeit nach der Härtung

1) Aehnliche Beobachtungen sind von Fromme für mechanische Erschütterungen gemacht worden (Wied. Ann. **61.** p. 55. 1897).

eine um so kleinere Momentabnahme zeigen, je später nach der Härtung er magnetisirt wurde. Der Einfluss der Magnetisirung auf den Ablauf der Härtungsnachwirkungen scheint zwar nicht gross zu sein; er ist aber jedenfalls vorhanden. Nach der Ewing'schen Hypothese über die Magnetisirung, nach welcher die molecularen Magnetgruppen infolge der Magnetisirung in gewissen Lagen gegenseitig festgehalten werden, ist diese Thatsache verständlich und erklärbar; ja sie kann geradezu als eine Stütze dieser Hypothese angesehen werden.

Die bisher angeführten Resultate beziehen sich alle auf 6 cm lange und 6 mm dicke Silberstahlstäbe, also auf das Dimensionsverhältnis 10. Es entsteht die Frage, wie der Verlauf der Härtungsnachwirkungen bei irgend einem anderen Dimensionsverhältnisse ausfällt.

Zu diesem Zwecke habe ich zunächst noch zwei dünnere Stäbe vom Dimensionsverhältnisse 10 untersucht; sie ergaben genau dasselbe Resultat, wie die früheren untersuchten Stäbe (Nr. 9 u. 14, Tab. I) vom gleichen Dimensionsverhältnisse; sodann nahm ich Stäbe vom Dimensionsverhältnisse 25 und 50 bei 4 mm Stabdicke. Der Vorgang der Härtung, Magnetisirung etc. war genau wie früher. Tab. III enthält die Resultate.

Tabelle III.

| Stab-Dimension | $N$ | $\vartheta^m$ | $\alpha$ | $\varphi$ nach $t =$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $13^m$ | $24^m$ | $49^m$ | $119^m$ |
| Länge = 4 cm | 1 | 1 | 92,1 | 100 | 98,7 | 97,4 | 96,3 | 94,5 | 92,1 | 88,8 |
| Dicke = 4 mm | 2 | 60 | 90,4 | 100 | 100,0 | 100,0 | 99,9 | 99,6 | 98,8 | 97,7 |
| Länge = 10 cm | 1 | 1 | 590,7 | 100 | 99,0 | 98,1 | 97,6 | 96,7 | 95,6 | 93,9 |
| Dicke = 4 mm | 2 | 60 | 591,0 | 100 | 100,0 | 100,0 | 99,9 | 99,8 | 99,3 | 98,4 |
| Länge = 20 cm<br>Dicke = 4 mm | 1 | 1 | 1507,0 | 100 | 99,4 | 98,7 | 98,3 | 97,8 | 97,2 | 96,5 |

Aus den Daten der Tab. III geht entschieden eine Abhängigkeit vom Dimensionsverhältnisse hervor und zwar in dem Sinne, dass die procentische Abnahme bei den kleineren Dimensionsverhältnissen bedeutender ausfällt als bei den grossen.

Es ist nicht wahrscheinlich, dass die Härtungsnachwirkungen vom Dimensionsverhältnisse unmittelbar beeinflusst werden; verständlicher scheint die Annahme zu sein, dass die vom Dimensionsverhältnisse abhängigen entmagnetisirenden Kräfte bei der beobachteten Erscheinung eine Rolle spielen; ein Einfluss, der nach den vorangehenden Beobachtungen nicht überraschend ist.

Es entsteht nun die weitere Frage, ist der Verlauf der Härtungsnachwirkungen unter sonst gleichen Umständen von der Stahlsorte abhängig?

Wie meine früheren Untersuchungen gelehrt haben, beruht die im Verlaufe einer längeren Zeit auftretende Abnahme des Momentes permanenter Magnete hauptsächlich auf Härtungsnachwirkungen; denn die Magnetisirungsnachwirkungen sind nie besonders gross und laufen sehr bald ab. Bei Magneten, die nahezu zu gleicher Zeit magnetisirt und deren Moment mehrere Monate hindurch beobachtet wurde, hat sich ergeben, dass die Abnahme bei verschiedenen Stahlsorten verschieden ausfällt. Um jedoch in dieser Richtung auch hinsichtlich der unmittelbar nach der Härtung auftretenden Veränderungen einen Aufschluss zu erhalten, habe ich noch drei Magnete „$Bx_1$“, „$Bx_2$“ und „$B\,43$“ aus drei verschiedenen Böhler'schen Wolframstahlsorten untersucht. $Bx_1$ und $Bx_2$ waren rund, 6 cm lang, 6 mm dick, $B\,43$ quadratisch, 6 cm lang, 6 mm Breite. Die Behandlung war wie bei den Stücken der Tab. I und II; $\vartheta = 1$ Min. bei allen drei Probestücken. Tab. IV enthält die Resultate.

Tabelle IV.

| $N$ | $\alpha$ | $\varphi$ nach $t =$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $13^m$ | $24^m$ | $49^m$ | $119^m$ | $900^m$ | $960^m$ | $990^m$ |
| $Bx_1$ | 536,8 | 100 | 99,0 | 97,7 | 96,3 | 94,3 | 91,3 | 86,6 | 75,3 | — | — |
| $Bx_2$ | 486,7 | 100 | 98,7 | 97,4 | 96,1 | 94,5 | 91,7 | 87,2 | — | — | 74,7 |
| $B\,43$ | 389,8 | 100 | 97,4 | 95,6 | 94,3 | 93,0 | 91,2 | 88,8 | — | 82,5 | — |

Wenn auch die Härtungstemperatur einen nicht unbeträchtlichen Einfluss auf den Verlauf der Härtungsnachwirkungen haben dürfte, so glaube ich doch in dieser Tabelle die schon früher beobachtete Thatsache bestätigt zu finden, dass der Verlauf der Härtungsnachwirkungen und infolge

dessen der Verlauf der Momentabnahme von der Stahlsorte abhängt. Der Versuch ist noch insofern interessant, als er zeigt, dass $B\,43$ anfangs rascher abnimmt als die anderen beiden Stäbe; erst nach Verlauf der 120. Minute wird die Abnahme bei $B\,43$ grösser als bei $Bx_1$ und $Bx_2$. Nach 2400 Min. war das Moment von $Bx_1$ und $Bx_2$ auf 70 bez. 69,5 Proc. gesunken, während es bei $B\,43$ in 8 Tagen (11520$^m$) nur auf 75,8 herabging. Verschiedene Stahlsorten scheinen danach bei gleicher Behandlung einen für jede Stahlsorte charakteristischen Verlauf der Härtungsnachwirkungen bez. eine infolge derselben auftretende charakteristische Momentabnahme zu haben. Es wäre danach die Beobachtung des magnetischen Verhaltens sofort nach der Härtung die beste und rascheste Prüfungsweise für die magnetische Qualität einer Stahlsorte. Zu diesem Zwecke wäre es freilich notwendig, die zu härtenden Proben immer auf die gleiche jeweilig gewünschte Temperatur bringen zu können; ein Umstand, dessen Berücksichtigung auch bei der weiteren Erforschung der Härtungsnachwirkungen sehr zu empfehlen wäre. Leider ist die Erfüllung dieser Bedingung in einem kleinen physikalischen Institute nicht leicht möglich.

Der grosse Einfluss der Härtungstemperatur auf das magnetische Verhalten des Stahles ist bekannt. Ich habe nun versucht, auch in dieser Richtung einige orientirende Beobachtungen zu machen. Die Beurteilung der Härtungstemperatur konnte nur mit dem Auge geschehen; sie erscheint daher nur beiläufig durch die Bestimmung der Farbe des geglühten Stabes angegeben.

Zuerst wurde ein Silberstahl von 6 cm Länge und 6 mm Dicke in ungehärtetem Zustande untersucht und folgende Werte des Magnetometerausschlages $\alpha$ gefunden:

| $t =$ | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $13^m$ | $28^m$ | $48^m$ | $111^m$ | $308^m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha =$ | 45,8 | 45,9 | 45,8 | 45,8 | 45,6 | 45,8 | 45,5 | 45,5 |

Hier ist vielleicht eine kleine Magnetisirungsnachwirkung zu beobachten, sonst nichts.

Ein gleicher Stab wurde hierauf bis zu schwacher Rotglut erhitzt, in Wasser abgeschreckt, eine Minute nach der Härtung magnetisirt und darauf folgendes gemessen:

| $t =$ | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $13^m$ | $24^m$ | $49^m$ | $119^m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha =$ | 56,6 | 56,3 | 56,5 | 56,5 | 56,4 | 56,5 | 56,9 |

Es ist interessant, dass nach der Härtung bei dieser Temperatur gar keine Nachwirkung zu constatiren ist. Das geringe permanente Moment überrascht nicht, da es ja bekannt ist, dass für die Herstellung permanenter Magnete eine gewisse Härtungstemperatur überschritten werden muss.

Derselbe Stab wurde sodann zu etwas stärkerer Rotglut erhitzt und behandelt wie vorher; er gab sodann:

| $t =$ | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $24^m$ | $49^m$ | $119^m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha =$ | 79,8 | 79,2 | 78,4 | 77,6 | 76,5 | 75,1 |

Das Moment hat nur wenig zugenommen, aber die Härtungsnachwirkungen stellen sich schon ganz deutlich ein. Die hier angewendete Härtungstemperatur scheint sich gerade an der kritischen Grenze bewegt zu haben.

Ein weiterer Silberstahlstab von den gleichen Dimensionen wie die vorhergehenden beiden gab nach der Härtung bei schwacher Rotglut wieder für $t = 1^m$ $\alpha = 55{,}0$ und für $t = 49^m$ $\alpha = 54{,}9$, also keine Abnahme und ein permanentes Moment beinahe wie der ungeglühte Stab; als er sodann bei einer zwischen Rot- und Weissglut liegenden Hitze gehärtet wurde, lieferte er folgendes Resultat:

| $t =$ | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $13^m$ | $24^m$ | $49^m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha =$ | 304,4 | 297,3 | 291,6 | 287,6 | 283,7 | 278,4 |
| $\varphi =$ | 100 | 97,7 | 95,8 | 94,5 | 93,2 | 91,5 Proc. |

Moment und Abnahme sind jetzt schon auf der Höhe, wie bei den früher bis zur Weissglut erhitzten Stäben (z. B. Nr. 9 der Tab. I).

Aus diesen Daten geht hervor, dass die für das Auftreten der Härtungsnachwirkungen maassgebende Temperatur mit der für die Herstellung permanenter Magnete erforderlichen Härtungstemperaturgrenze zusammenfällt.

Der Ablauf der Härtungsnachwirkungen kann durch längeres Kochen bei 100° beschleunigt werden.

Es wurden z. B. zwei Silberstahlstäbe von je 10 cm Länge und 6 mm Dicke gleichmässig gehärtet und der eine vor dem Kochen sofort nach der Härtung und der andere erst nach dem Kochen magnetisirt. Die Beobachtung der Momente ergab folgende Magnetometerablenkungen $\alpha$:

Stab Nr. 1.

Zeit der Härtung: 11. IV. $9^h 57^m$ Vorm.
„ „ Magnetisirung: 11. IV. 9 58 „
11. IV. $9^h 59^m$ Vorm. $\alpha = 937{,}5$.

8 Stunden gekocht.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11. IV. $7^h 30^m$ Nachm. | $\alpha = 538{,}5$ | Temp. | $= 17{,}0$ |
| 12. IV. 8 30 Vorm. | $\alpha = 539{,}0$ | „ | $= 16{,}0$ |
| 12. IV. 6 10 Nachm. | $\alpha = 538{,}6$ | „ | $= 17{,}4$ |
| 13. IV. 7 45 Vorm. | $\alpha = 539{,}0$ | „ | $= 16{,}0$ |

Stab Nr. 2.

Zeit der Härtung: 11. IV. $10^h 5^m$ Vorm.
8 Stunden gekocht, hierauf magnetisirt: 11. IV. $7^h 26$ Nachm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11. IV. $7^h 27^m$ Nachm. | $\alpha = 907{,}5$ | Temp. | $= 17{,}0$ |
| 12. IV. 8 30 Vorm. | $\alpha = 905{,}5$ | „ | $= 16{,}0$ |
| 12. IV. 6 10 Nachm. | $\alpha = 904{,}7$ | „ | $= 17{,}4$ |
| 13. IV. 7 45 „ | $\alpha = 905{,}4$ | „ | $= 16{,}0$ [1]) |

Wie man sieht, ist durch die Beschleunigung der Härtungsnachwirkungen das Moment des Stabes Nr. 1 von 937,5 auf 538,3 gesunken. Andere Magnete zeigten nach dem Auskochen sogar Abnahmen bis auf ein Drittel des ursprünglichen Wertes. Aus den weiteren Daten für Stab Nr. 1 und 2 geht hervor, dass das Moment nach dem Kochen während der Dauer der weiteren Beobachtung constant geblieben ist; nur bei Nr. 2 ist ein kleines Sinken nach der ersten Beobachtung wahrzunehmen und hier scheint eine Magnetisirungsnachwirkung vorzuliegen.

Die Momentänderungen, die man insbesondere bei älteren Stahlsorten in beträchtlicher Grösse oft Jahre hindurch beobachtet, sind hauptsächlich Härtungs- und nicht Magnetisirungsnachwirkungen, und das Verfahren von Strouhal und Barus dient in erster Linie zur Beschleunigung des Ablaufes der Härtungsnachwirkungen.

Sind nun die Umlagerungen bez. Aenderungen der Molecularstructur nach der Härtung dieselben, ob sie bei gewöhnlicher Temperatur oder ob sie bei 100° verlaufen?

Versuche, welche vorläufig in dieser Richtung angestellt wurden, konnten mit Sicherheit keinen Unterschied im Ver-

1) Es muss erwähnt werden, dass die Schwankungen der Horizontalcomponente hierbei berücksichtigt wurden.

laufe der Nachwirkungen in den beiden Fällen erkennen lassen. Der Unterschied würde danach nur in der Raschheit des Ablaufes liegen, doch ist nicht ausgeschlossen, dass eingehendere Versuche, die sich etwa auf die Beobachtung des elektrischen Widerstandes beziehen, doch einen Unterschied ergeben würden.

Bei allen diesen Beobachtungen ist auf die der Magnetisirung folgenden Nachwirkungen, welche eigentlich auch als magnetische Nachwirkung bezeichnet werden können, keine Rücksicht genommen worden. Solche sind, wie diesbezügliche Messungen ergeben haben, jedenfalls vorhanden; allein sie sind ziemlich klein und laufen sehr bald ab. Genauere Resultate über dieselben sollen durch eine weitere Untersuchung festgestellt werden.

Wie man aus dem Vorstehenden ersieht, befindet sich ein Stahlstab nach seiner Härtung in keiner molecularen Ruhelage. Es treten in ihm Umlagerungen auf, welche anfangs schnell, dann immer langsamer verlaufen und infolge welcher die durch ein Magnetfeld gerichteten Molecularmagnete oder Molecularmagnetgruppen eine Desorientirung, welche eine Abnahme des magnetischen Momentes zur Folge hat, zeigen. Diese Umlagerungen, die wir als Härtungsnachwirkungen bezeichnet haben, sind die hauptsächlichste oft jahrelang dauernde Ursache für die zeitliche Abnahme des Momentes permanenter Magnete.

Man kann sich mit Recht die Frage vorlegen, inwiefern durch diese Umlagerungen oder durch den Ablauf der Härtungsnachwirkungen andere physikalische Eigenschaften verändert werden. In erster Linie kann man hierbei an eine Aenderung des specifischen Leitungswiderstandes denken, sodann wäre auch eine Aenderung der specifischen Wärme nicht unmöglich. Die Untersuchung des Einflusses auf die specifische Wärme wäre insbesondere mit Rücksicht auf die Aenderungen der physikalischen Eigenschaften, welche der Stahl beim Durchgang durch die kritische Temperatur erfährt und mit Rücksicht auf die neueren Ansichten über die Bedeutung dieser Thatsache für die Magnetisirung äusserst interessant.

Innsbruck, Universität, Juni 1901.

(Eingegangen 3. Juli 1901.)

## 15. *Kritisches zur schwarzen Strahlung;* *von O. Lummer und E. Pringsheim.*

I. Schon in unseren ersten spectrobolometrischen Arbeiten[1]) haben wir systematische Abweichungen zwischen den für die schwarze Strahlung beobachteten Energiecurven und der Wien'schen Spectralgleichung gefunden, ohne jedoch die Frage zu entscheiden, ob die Gleichung auf Grund dieser Abweichungen zu verwerfen sei.

Erst in der Arbeit über die Strahlung des schwarzen Körpers für *lange* Wellen[2]) konnten wir mit Sicherheit aussagen, dass die Wien'sche Spectralgleichung *kein allgemein gültiges* Naturgesetz darstellt. Dieses experimentelle Resultat stand im Widerspruch mit den Versuchen von F. Paschen[3]) und den Theorien von W. Wien[4]) und M. Planck[5]), welche auf ganz verschiedenem Wege die Wien'sche Spectralgleichung hergeleitet hatten.

a) Was die Wien'sche Herleitung betrifft, so kann sie, abgesehen von den Einwänden, die gegen sie erhoben worden sind[6]), schon deshalb keine Widerlegung *experimenteller* Re-

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1.** p. 23—41 und p. 215—235. 1899.

2) l. c. **2.** p. 163—180. 1900.

3) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 405—420 und p. 959—976. 1899.

4) W. Wien, Wied. Ann. **58.** p. 662—669. 1896.

5) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 440—480. 1899; Ann d. Phys. **1.** p. 69—122 und p. 719—737. 1900.

6) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1.** p. 29 ff. 1899; O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. **3.** p. 283—297. 1900; O. Lummer, Rapports présentés au Congrès Intern. de phys. **2.** p. 41—99. Paris, Gauthier-Villars, 1900; E. Jahnke, O. Lummer u. E. Pringsheim, Ann. d. Phys. **4.** p. 225—230. 1901.

Ueber diese ausführliche Kritik geht Hr. Wien (Ann. d. Phys. **4.** p. 424. 1901) mit folgenden Worten hinweg: „Von den Herren Jahnke, Lummer und Pringsheim ist soeben eine Entgegnung auf meine letzten Ausführungen erschienen, in der im wesentlichen die früheren

sultate bilden, weil sie auf kinetischen Hypothesen beruht, welche anderweitig nicht gestützt werden.

b) Die Planck'sche Theorie leitete die Wien'sche Spectralgleichung auf elektromagnetischer und thermodynamischer Grundlage ab. Nach ihr hatte es den Anschein, als ob unsere Versuche gegen die Consequenzen der elektromagnetischen Lichttheorie, ja sogar gegen den zweiten Hauptsatz verstiessen. Auch diese Schwierigkeit ist beseitigt, da Hr. Planck[1]) selbst die Wien'sche Gleichung

$$E = C\lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} \tag{1}$$

auf Grund unserer Versuche durch die folgende ersetzte:

$$E = C\lambda^{-5}\left[e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right]^{-1}. \tag{2}$$

Im Gegensatz zur ersteren Gleichung führt die Planck'sche zu dem Grenzfall:

$$[\lim E = \text{const. } T]_{T=\infty}. \tag{3}$$

Zu der gleichen Folgerung wird man bei Extrapolation der Gleichung:

$$\begin{cases} E = C\lambda^{-4} T e^{-\frac{c}{(\lambda T)^{\nu}}} \\ 1{,}3 > \nu > 1{,}2, \end{cases} \tag{4}$$

geführt, welche von allen speciellen Formen der allgemeinen, von Hrn. Jahnke[2]) mit einem von uns aufgestellten Gleichung

---

Behauptungen wiederholt werden. Ich halte es daher für unnötig, noch einmal darauf einzugehen."

Hierdurch wird der Anschein erweckt, als ob die erwähnten letzten Ausführungen Wien's (Ann d. Phys. **3.** p. 530—539. 1900), die von uns gegen seine Herleitung erhobenen Einwendungen entkräftet und wir uns in unserer Kritik auf eine blosse Wiederholung unserer Einwände beschränkt hätten.

Der Sachverhalt ist ein anderer.

Unsere Kritik enthält nicht nur eine Wiederholung unserer früheren Behauptungen, um sie in vollem Umfange aufrecht zu erhalten, sondern sie wiederlegt, und das ist ihr wesentlicher Zweck, auch die von Wien gegen unsere Einwände gerichteten Ausführungen.

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **2.** p. 202 bis 204. 1900.

2) O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. **3.** p. 283—297. 1900.

unsere Versuche zwischen 2 $\mu$ und 18 $\mu$ am besten darstellt. Die Folgerung (3) wurde ausserordentlich wahrscheinlich gemacht durch die Form der Isochromaten, welche Rubens und Kurlbaum[1]) für einige lange Wellen (Reststrahlen von Steinsalz, Sylvin und Quarz) beobachtet haben. Diese Versuche sind unvereinbar mit der Wien'schen Gleichung (1), werden durch die Planck'sche Gleichung (2) gut dargestellt, eher noch besser durch unsere empirische Gleichung (4).

c) Diese Harmonie wurde allein noch gestört durch die Resultate Paschen's[2]), nach denen die schwarze Strahlung auf dem ganzen untersuchten Gebiet und bis zu den höchsten Temperaturen durch die Wien'sche Gleichung gut dargestellt wird, auch da, wo nach unseren Versuchen Abweichungen von 20 und mehr Procent zu erwarten gewesen wären. Solange sich unsere Versuche auf ein kleineres Wellenlängengebiet erstreckten als die von Paschen, konnte man im Zweifel sein, auf welcher Seite die Wahrheit liege, zumal seine Resultate sich im Einklang mit der Theorie befanden.

Nachdem wir aber durch Ausdehnung unserer Versuche auf das Wellenlängengebiet von 12 $\mu$ bis 18 $\mu$ Abweichungen von der Wien'schen Gleichung bis 50 Proc. erhalten hatten, war erwiesen, dass die Paschen'schen Versuche fehlerhaft seien.

Dieser schwer wiegende Widerspruch ist jetzt ebenfalls beseitigt durch die neueste Publication von Paschen[3]), in der gleichfalls starke Abweichungen von der Gleichung (1) mitgeteilt werden. Dadurch nimmt Paschen das wesentliche Resultat seiner Publication „Ueber die Verteilung der Energie im Spectrum des schwarzen Körpers bei höheren Temperaturen" zurück, welche sich durch die genaue Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie auszeichnete.

Obwohl somit der Widerspruch gegen unsere Resultate beseitigt ist, sehen wir uns aus verschiedenen Gründen veranlasst, näher auf die Paschen'schen Arbeiten einzugehen.

1) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 929—941. 1900; Ann. d. Phys. 4. p. 649—666. 1901.
2) F. Paschen, l. c.
3) F. Paschen, Ann. d. Phys. 4. p. 277—298. 1901.

Erstens glaubt Paschen, wie früher die allgemeine Gültigkeit der Wien'schen Spectralgleichung, so jetzt diejenige der Planck'schen Gleichung erwiesen zu haben, während wir der Meinung sind, dass seine neuesten Versuche nichts Neues zur Kenntnis der schwarzen Strahlung beitragen.

Zweitens übt Paschen an unserer Arbeit eine Kritik, die uns unberechtigt erscheint und schiebt uns Schlüsse unter, die wir nicht gezogen haben.

Drittens scheint uns die Darstellung geeignet, dem Leser eine falsche Vorstellung über die historische Entwickelung unserer heutigen Kenntnis von der schwarzen Strahlung zu geben.

II. *Historisches.* Wir wenden uns zunächst kurz gegen die Einleitung Paschen's; in ihr wird der Eindruck erweckt, als ob unsere Versuche am schwarzen Körper erst eingegriffen hätten, nachdem Paschen das gleiche Gebiet seit langem bearbeitet und im wesentlichen erschöpft hatte. So wird der Beginn der Paschen'schen Versuche über die schwarze Strahlung bis in das Jahr 1892 zurückdatirt, die Besprechung unserer Arbeiten dagegen eingeleitet durch die Worte: „In letzter Zeit haben die Herren Lummer und Pringsheim denselben Gegenstand bearbeitet."

Jene Versuche Paschens beziehen sich aber unserer Meinung nach gar nicht auf denselben Gegenstand, da sie aus Strahlungsmessungen an *nichtschwarzen* Körpern auf indirectem Wege die Gesetze der schwarzen Strahlung erschliessen wollen, während wir direct die schwarze Strahlung experimentell untersucht haben. Uebrigens sind die Resultate dieser Versuche im Auszug erst 1895, ausführlich aber sogar erst im Jahre 1896 und 1897 publicirt worden, also nachdem die schwarze Strahlung durch W. Wien und O. Lummer[1]) 1895 dem Experiment zugänglich gemacht worden war.

---

1) W. Wien u. O. Lummer, Wied. Ann. **56**. p. 451—456. 1895. In dieser Arbeit „Methode zur Prüfung der Strahlungsgesetze absolut schwarzer Körper" ist die Methode zur Verwirklichung der schwarzen Strahlung gemäss der Kirchhoff'schen Definition ausführlich beschrieben. Gleichzeitig ist auch das umgekehrte Princip zur Verwirklichung eines absolut schwarzen Strahlungsmessers angegeben. Ferner enthält die Arbeit ein vollständiges Programm der mit dem schwaren Körper beab-

Von dieser Zeit datiren unsere Versuche, die als eine Ausführung des in jener Arbeit mitgeteilten Programms zu betrachten sind. Demgemäss begannen wir mit der Untersuchung des Fundamentalgesetzes der schwarzen Strahlung und konnten im Jahre 1897 das Resultat mitteilen, dass die von gleichtemperirten Hohlräumen ausgesandte Strahlung dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetze gehorcht.

Unsere ersten Resultate über die schwarze Strahlung, welche von Paschen nicht erwähnt werden, fallen also in das gleiche Jahr, in welchem Paschen sich noch bemühte, aus Versuchen an *nichtschwarzen* Körpern indirecte Schlüsse auf die Gesetze der *schwarzen* Strahlung zu ziehen.

Abgesehen von der Unsicherheit, welche derartigen Schlüssen anhaftet, ist auch die experimentelle Grundlage nicht geeignet, die für die schwarze Strahlung gezogenen Folgerungen zu stützen. Denn die Versuche sind mit so grossen Unvollkommenheiten behaftet, dass die für die einzelnen *nicht*schwarzen Körper daraus hergeleiteten Resultate nicht als deren wahre Gesetze gelten können. Auch die vollkommene Bestätigung, welche Paschen für einige seiner spectrobolometrischen Resultate durch directe Messung der Gesamtstrahlung erhält, kann nicht als Beweis für deren Richtigkeit angesehen werden. So findet Paschen aus den spectrobolometrischen Versuchen, dass die Gesamtstrahlung des blanken Platins mit der $5{,}432^{ten}$ Potenz der absoluten Temperatur fortschreitet, während die directe Messung die Potenz 5,425 ergeben hatte. In Wirklichkeit dagegen wächst in dem untersuchten Temperaturintervall die Gesamtstrahlung mit der $5{,}0^{ten}$ Potenz. Ferner hatte Paschen für Lampenruss gefunden, dass die Gesamtstrahlung zur $4{,}532^{ten}$ Potenz fortschreitet, während in Wahrheit Russ, wenigstens in genügend dicken Schichten, dem Stefan'schen Gesetze fast vollkommen folgt. Auch hier findet Paschen wieder fast genau dieselbe Potenz (4,528) durch die indirecte, spectrobolometrische Methode und sagt: „Die Uebereinstim-

---

sichtigten Untersuchungen: 1. Messung der Gesamtstrahlung (Prüfung des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes), 2. Messung der Lichtstrahlung in den verschiedenen Spectralregionen mittels des Spectralphotometers, 3. Messung der Energieverteilung als Function der Temperatur und Prüfung des von Wien theoretisch hergeleiteten Verschiebungsgesetzes.

mung dieser zwei Werte kann kaum einem Zufall zugeschrieben werden."

Bei beiden Methoden müssen daher Fehler von 40 bis 50 Proc. vorgekommen sein, welche wahrscheinlich der Temperaturbestimmung zuzuschreiben sind.

Selbst wenn aber diese spectrobolometrischen Versuche fehlerfrei wären und im Jahre 1892 nicht nur begonnen, sondern mit allen ihren Resultaten auch schon *veröffentlicht* worden wären, würden sie vom Tage der Verwirklichung der schwarzen Strahlung an für diese nur noch historisches Interesse beanspruchen können. Denn während derartige Versuche bestenfalls hypothetische Schlüsse auf das Verhalten der schwarzen Strahlung erlauben, war durch die Herstellung des schwarzen Körpers die Grundlage für sichere systematische Forschungen geschaffen, durch welche der Wunsch Kirchhoff's, dass die $e$-Function des schwarzen Körpers auf experimentellem Wege bestimmt werde, sich verwirklichen liess. Ein wesentlicher Fortschritt ist zugleich der durch das Princip gebotene Vorteil, dass die Temperatur der zu messenden Strahlung mit der eines gleich temperirten Hohlraumes identisch und daher sehr genau messbar ist. Dadurch war auch die Hauptfehlerquelle der Paschen'schen Versuche beseitigt. Diese rein experimentelle Verbesserung der Strahlungsmessung ist freilich nicht erreicht bei dem „Paschen'schen" schwarzen Körper, bei dem das strahlende Platinblech von einer spiegelnden Hülle umgeben ist.

Aber auch die principielle Bedeutung des schwarzen Körpers scheint Hr. Paschen zu unterschätzen. Wenigstens ruft die Einleitung seiner neuesten Arbeit den Eindruck hervor, als ob die Einführung des schwarzen Körpers nichts weiter bedeute, als eine Verbesserung der experimentellen Hülfsmittel. Wir sind anderer Meinung und schätzen die Verwirklichung der schwarzen Strahlung höher ein; wenigstens glauben wir, dass auch mit den sonst besten Hülfsmitteln die schwarze Strahlung nicht gemessen werden kann, wenn sie nicht vorhanden ist.

Rechnet man demnach zu den Versuchen über die schwarze Strahlung nur diejenigen, welche wirklich mit dem schwarzen Körper angestellt sind, so sind unsere Arbeiten nicht nur über die Gesamtstrahlung, sondern auch über die Energieverteilung

im Spectrum des schwarzen Körpers die älteren. Wir können demnach nicht der Ansicht Paschen's beipflichten, dass wir erst in letzter Zeit denselben Gegenstand behandelt haben, mit dem er schon seit 1892 beschäftigt ist, obschon sie die Anerkennung enthält, dass wir trotz der Kürze der Zeit richtige Resultate für die $e$-Function des Kirchhoff'schen Satzes gefunden haben.

III. *Antikritisches.* Wir wenden uns jetzt gegen die Kritik, welche Paschen an unseren Versuchen geübt hat.

a) Er sagt in seiner neuesten Arbeit[1]): „Die Versuche der Herren Lummer und Pringsheim ergaben für keinen Bereich der Temperaturen und Wellenlängen einen völligen Anschluss an Wien's Gesetz, sondern liessen sich durch eine von Hrn. Thiesen angegebene Formel darstellen, welche für kleine Werte von $\lambda T$ einen so erheblich anderen Verlauf hat als Wien's Formel, dass ich infolge dieses Widerspruches mit meinen Beobachtungen auch die Ueberzeugung von der Richtigkeit ihrer Resultate bei grossen Werten von $\lambda T$ nicht gewann etc."

Schon die graphische Darstellung (vgl. Fig. 1) der Resultate unserer ersten Arbeit zeigt auf dem ganzen Gebiete unserer damaligen Beobachtungen eine gute Uebereinstimmung der beobachteten Curven mit den nach Wien's Spectralgleichung berechneten. In dem Gebiete, in welchem $\lambda T$ kleiner als 3000 ist, erkennt man grössere Abweichungen nur am äussersten Ende des aufsteigenden Astes. Hier aber sind wegen des starken Abfalles der Energiecurve die Beobachtungen sehr schwierig und werden infolge diffuser Strahlung notwendig zu gross ausfallen. Wer wie Paschen die Schwierigkeiten kennt, welche den Messungen gerade an dieser Stelle entgegenstehen, kann billigerweise aus diesen Abweichungen einen Widerspruch zwischen unseren Beobachtungen und der Wien'schen Spectralgleichung nicht construiren; um so weniger als bei der Curvenschaar (Fig. 2) unserer zweiten Serie infolge besserer Versuchsanordnung (u. a. Verminderung der Absorptionen) die Fehler am aufsteigenden Ast verringert sind, während die Abweichungen am absteigenden Ast noch regelmässiger hervortreten.

1) F. Paschen, l. c. p. 278, Anm. 3.

Es muss dem Urteil des Lesers überlassen bleiben, ob man bei der Schwierigkeit solcher Versuche den von uns erreichten Anschluss an die Wien'sche Spectralgleichung auf dem Gebiet ($\lambda T < 3000$), auf welchem diese Gleichung die schwarze Strahlung bis auf 1 Proc. genau wiedergiebt, als einen „völligen" betrachten will oder nicht. Uns genügte diese Uebereinstimmung, um gerade den entgegengesetzten

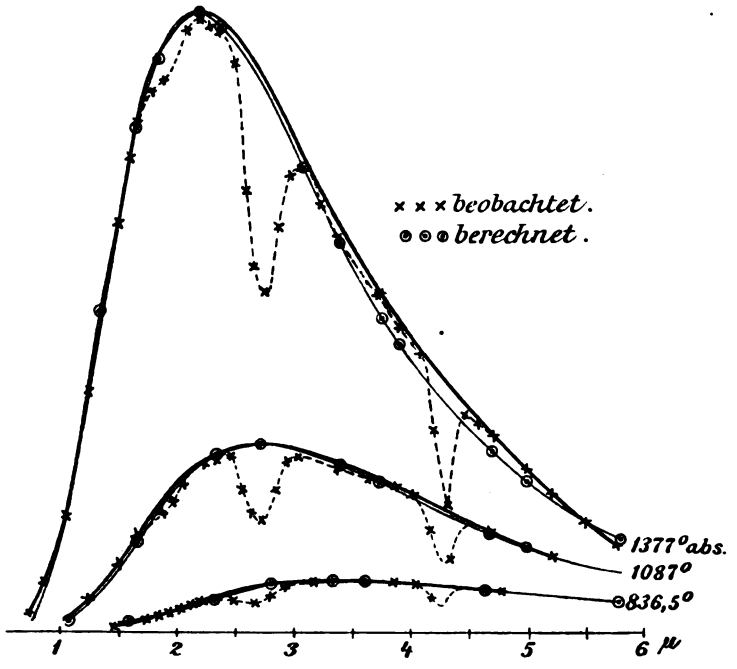



Fig. 1.

Schluss wie Paschen zu ziehen, indem wir in unserer zweiten Arbeit geschrieben haben: „Für *niedere* Temperaturen hat Hr. F. Paschen die Energieverteilung im Spectrum des schwarzen Körpers gemessen und innerhalb 2—9 $\mu$ in vollkommener Uebereinstimmung mit der Wien-Planck'schen Gleichung gefunden . . . Auch unsere Versuche lassen erkennen, dass die Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung um so kleiner wird, je tiefer die Temperatur des strahlenden Körpers ist." Wenn Hr. Paschen einen völligeren Anschluss

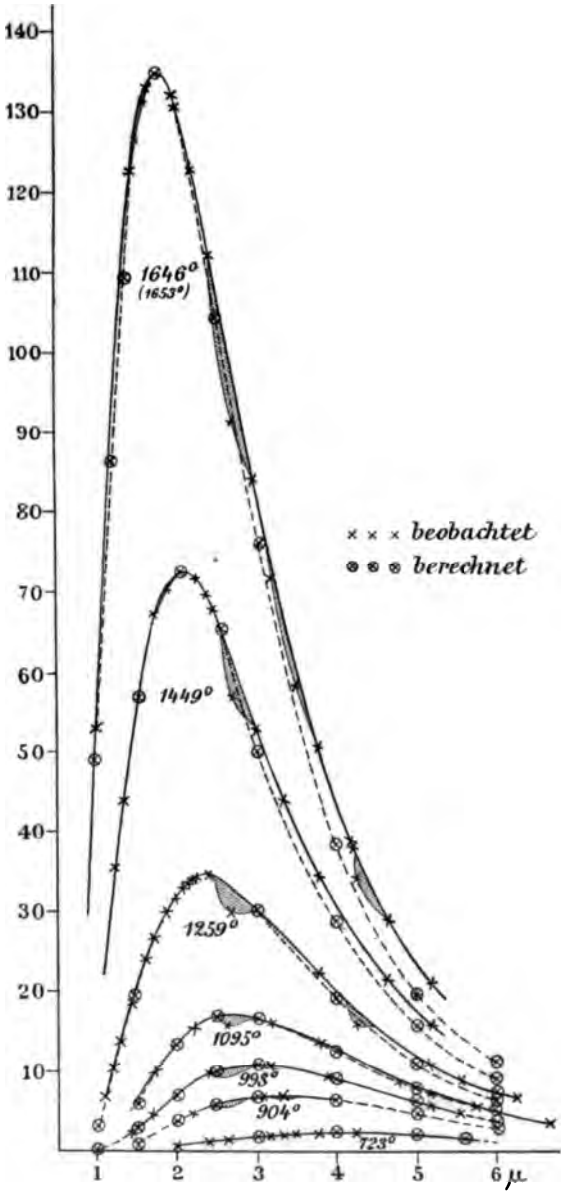

140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1646°
(1653°)
1449°
1259°
1095°
998°
904°
723°
× × × beobachtet
⊗ ⊗ ⊗ berechnet
1
2
3
4
5
6 μ

Fig. 2.

erreicht hat, so wird der Wert dieser Uebereinstimmung dadurch herabgedrückt, dass Paschen auch da die Wien'sche Gleichung bestätigt hat, wo thatsächlich Abweichungen von nahe 30 Proc. vorhanden sind.

b) Was die Abweichungen auf dem absteigenden Ast anbetrifft, wo $\lambda . T$ den Wert 3000 überschreitet, so hätten wir vielleicht auch ihnen anfangs keine Bedeutung beigemessen und sie ohne weiteres als Versuchsfehler angesprochen, wenn es uns nicht gelungen wäre, sie als *systematisch* zu erkennen. Nach der Wien'schen Gleichung müssen die Isochromaten in der Form

$$\log E = f\left(\frac{1}{T}\right)$$

vollkommene Gerade sein und aus jeder von ihnen muss sich für die „Constanten" $C$ und $c$ der gleiche Wert ergeben. In dem untersuchten Gebiet waren diese Isochromaten thatsächlich nahe gerade Linien, während die aus ihnen berechneten Werte von $C$ und $c$ einen deutlichen Gang zeigten. Dieses systematische Wandern von $C$ und $c$ veranlasste uns, den Abweichungen näher nachzugehen, die Versuche mit dem Flussspatprisma unter verbesserten Bedingungen zu wiederholen und mit Hülfe eines Sylvinprismas die Untersuchungen auf das Wellenlängengebiet von 12—18 $\mu$ auszudehnen. Beide Untersuchungen bestätigten die Richtigkeit der von uns hervorgehobenen Abweichungen. Diese wachsen ganz systematisch mit steigender Temperatur und Wellenlänge an und erreichen Werte von 50 Proc. und darüber.

c) Aus den citirten Worten Paschen's scheint uns ferner hervorzugehen, dass er die Bedeutung der Thiesen'schen Gleichung als einer rein empirischen verkennt, indem er sie durch Extrapolation sogar auf einem Gebiet in Anspruch nimmt, auf welchem sie durch unsere Versuche gar nicht geprüft werden kann.

Obwohl die Thiesen'sche Formel unsere Flussspatversuche im grossen ganzen besser darstellt, als es die Wien'sche vermag, besonders dort, wo diese die systematischen Abweichungen zeigt und obgleich sie auch noch unsere Versuche mit langen Wellen annähernd richtig wiedergiebt, so waren wir uns doch dessen bewusst, dass sie nur den charakteristi-

schen Verlauf unserer Energiecurven zum Ausdruck brachte, im einzelnen aber ebenfalls Abweichungen zeigte. Dies haben wir deutlich ausgesprochen mit den Worten: „Für die niederen Temperaturen, für welche die Wien'sche Formel noch als Ausdruck unserer Beobachtungen gelten kann, *zeigt nämlich die Thiesen'sche merkliche Abweichungen*, während sie bei den höheren Temperaturen unsere Versuche thatsächlich vollkommen darstellt."

Wie dem aber auch sei, die Thiesen'sche Gleichung kann überhaupt von Paschen nicht herangezogen werden, um die in seinen Arbeiten niedergelegten Schlüsse zu entschuldigen. Denn diese Gleichung ist erst erschienen, nachdem Paschen die Arbeiten publicirt hatte, in denen er über unsere Resultate einfach hinweggeht[1]) und im Gegensatz zu ihnen die vollkommene Gültigkeit der Wien'schen Gleichung ausspricht.

d) Paschen hätte die Beweiskraft schon unserer ersten Resultate anerkannt, wenn wir gezeigt hätten, dass die von uns gefundenen Abweichungen dem Wien'schen Verschiebungsgesetze nicht widersprechen.[2]) Gewiss hätten wir dies thun können. Uns lag aber vor allem daran, den systematischen Gang der Abweichungen und die Richtigkeit derselben festzustellen. Dies konnte allein durch Experimente, nicht aber durch Heranziehung irgendwelcher Theorie entschieden werden. Die Uebereinstimmung spectrobolometrischer Versuche mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz ist kein Beweis für deren Richtigkeit, denn es giebt unendlich viele Formeln, welche dem Stefan-Boltzmann'schen Gesamtstrahlungsgesetz und dem Wien'schen Verschiebungsgesetz genügen, ohne zugleich die richtige Energieverteilung zu enthalten. So stehen ja auch die fehlerhaften Resultate Paschen's im völligen Einklang mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz.

1) Dies geschieht mit folgender Motivirung: „Eine Vergleichung meiner Resultate mit den von den Herren O. Lummer u. E. Pringsheim veröffentlichten Messungen unterlasse ich, da aus einem Vortrage des Hrn. E. Pringsheim auf der diesjährigen Naturforscherversammlung hervorgeht, dass die Messungen noch fortgesetzt worden sind". (Vgl. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 18. 1899.)

2) F. Paschen, l. c. p. 287.

Wenn Paschen aber durchaus diesen Nachweis für allein entscheidend hielt, so hätte er sich leicht davon überzeugen können, dass unsere publicirten Resultate dem Verschiebungsgesetz thatsächlich genügen. Denn bei der Darstellung unserer Versuche durch seine Gleichung geht Thiesen gerade davon aus, dass unsere Resultate der Gleichung

$$E = T^5 \psi(\lambda . T)$$

genügen, welche aussagt, dass das Stefan-Boltzmann'sche und das Wien'sche Verschiebungsgesetz erfüllt ist.[1])

e) Ein dritter Grund, welcher Paschen veranlasst hat, unsere auch von ihm anfangs gefundenen Abweichungen nicht für voll anzusehen, beruht auf einer Selbsttäuschung. Aus der speciellen von ihm gewählten graphischen Darstellung wird auf die absolute Grösse des untersuchten Gebietes geschlossen.[2]) Paschen stellt nämlich die Energie $E$ nicht als Function der Wellenlänge $\lambda$ und der Temperatur $T$ dar, welche Darstellung physikalisch übersichtlicher ist, sondern giebt den Curven den Vorzug, bei denen $\log E$ als Function von $1/T$ oder wie in seiner neuesten Arbeit als Function von $1/\lambda T$ auftritt. Auf dieser Scala erscheint das Gebiet, auf welchem Wien's Gleichung bis auf etwa 1 Proc. richtige Werte liefert ($\lambda . T$ von Null bis etwa 3000), sehr viel grösser als dasjenige, auf welchem diese Gleichung nicht gilt ($\lambda . T$ von 3000 bis Unendlich).

Hierdurch hat sich Paschen nach seiner eigenen Angabe veranlasst gesehen, die Abweichungen deshalb für fehlerhaft zu halten, weil sie sich nur in dem Gebiete bemerkbar machen, welches bei dieser willkürlich gewählten Darstellung als sehr klein erscheint. Auf diese Weise könnte man das Bereich

---

1) Gegenüber der Darstellung des Hrn. Planck (Ann. d. Phys. 4. p. 559. 1901), „dass das Wien'sche Verschiebungsgesetz das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz als specielle Anwendung mit umfasst", sei bemerkt, dass man zu dem Wien'schen Verschiebungsgesetz sowohl in der von Wien angegebenen (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 55—62. 1898 und Wied. Ann. 52. p. 157. 1894) wie in der obigen, von Thiesen herrührenden Form erst gelangt, wenn man das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz voraussetzt.

2) F. Paschen, l. c. p. 278, Anm. 3.

der Ungültigkeit sogar ganz zum Verschwinden bringen, wenigstens auf dem Papier, wenn man die Energie als Function einer genügend hohen Potenz von $1/\lambda T$ darstellte.

f) Ein weiterer Vorwurf gegen unsere Schlüsse könnte noch aus folgenden Worten Paschen's herausgelesen werden: „Daraus, dass in einem gewissen Gebiete grösserer Werte von $\lambda T$ Wien's Gesetz ungültig gefunden wird, kann nicht mit Sicherheit geschlossen werden, dass es dann auch in einem ganz anderen Gebiete dieser Variabelen ungültig sein müsse. Dieser Schluss leidet an demselben Fehler, wie derjenige, dass Wien's Gesetz auch für grosse Werte gelten müsse, wenn es für kleine genau gültig gefunden wird, welchen ich zu ziehen geneigt war."

Nun ist weder von uns (wie p. 198 ff. erörtert worden ist) noch sonst von Jemand aus den gefundenen Abweichungen von der Wien'schen Spectralgleichung der unerlaubte Schluss gezogen worden, gegen den sich Paschen wendet.

Wir beschränken uns daher auf die Beweisführung, dass Paschen nicht bloss „geneigt" war, den anderen Trugschluss zu ziehen, dass nämlich die Wien'sche Gleichung auch für grosse Werte von $\lambda T$ gelten müsse, sondern dass er ihn wirklich gezogen hat. Ja, er war von der allgemeinen Gültigkeit der Wien'schen Gleichung so fest überzeugt, dass er weder die von uns gefundenen Abweichungen noch auch die von ihm in demselben Sinne beobachteten Differenzen beachtete, sondern sie Fehlern der Beobachtung zuschrieb und seine Versuchsanordnungen so lange „verbesserte", bis sie ihm auch bei den hohen Temperaturen und bis zu Wellenlängen von $9\mu$ die Wien'sche Gleichung lieferten. Jetzt sieht Paschen selbst ein, dass die von ihm angebrachten „Verbesserungen" ihn vom richtigen Wege noch weiter weggeführt haben. Damals aber schrieb er, „ich habe nun nach beiden Methoden (spiegelnder und gleichtemperirter Hohlraum) die Versuchsanordnung allmählich immer mehr verbessert und dabei gefunden, dass jede Verbesserung im Sinne der theoretischen Forderung gewisse Abweichungen der Beobachtungsresultate vom Gesetze herabmindert, sodass schliesslich bei beiden Anordnungen Resultate erhalten wurden, welche untereinander völlig übereinstimmen und welche auch mit den bei niederen

Temperaturen gefundenen Ergebnissen genügend im Einklange scheinen. Wenn in den mitzuteilenden Resultaten noch vereinzelt kleine Abweichungen von dem Gesetze vorkommen, so sind dies meistens die Reste grösserer Abweichungen, welche nur beweisen können, dass gewisse Mängel in der Anordnung noch nicht genügend beseitigt sind."

Paschen fasst die Resultate seiner Untersuchungen in folgender Weise zusammen: „Hiernach dürfte das Wien'sche Gesetz innerhalb des Wellenlängenbereiches 9,2—0,7 $\mu$ (nach der gemeinsam mit Hrn. Wanner ausgeführten Untersuchung bis 0,5 $\mu$) und innerhalb des Temperaturbereiches 1300 bis 100° C. so gut erwiesen sein, wie es bei den Schwierigkeiten der Versuche möglich scheint."

Dabei erreichen die Versuche eine solche Uebereinstimmung, dass sie einen glänzenden Erfolg der Experimentirkunst darstellen würden, wenn die Richtigkeit der Resultate annähernd der Genauigkeit entspräche.

IV. *Kritisches.* Wir fragen uns jetzt, ob die neuesten Versuche Paschen's geeignet sind, die von ihm als wahrscheinlich hingestellte Folgerung zu rechtfertigen, dass die Planck'sche Gleichung das wahre Gesetz der schwarzen Strahlung sei.

a) Zunächst heben wir hervor, dass die von Paschen gezogenen Schlüsse auf Versuchen beruhen, bei denen er von vornherein darauf verzichtet und verzichten muss, die Grösse der Energie verschiedener Wellenlängen miteinander zu vergleichen.

Er beschränkt sich darauf, die Isochromaten nur ihrer *Form* nach zu bestimmen, ohne Rücksicht auf ihre quantitativen Beziehungen zu einander. Die Lösung dieser Aufgabe ist sehr viel leichter als die des vollständigen Problems, welches die Bestimmung der Energie als Function von *Wellenlänge und Temperatur* verlangt. Denn wie wir ausführlich erläutert haben[1]), sind die durch die Form der Isochromaten gegebenen Resultate (bei logarithmischer Darstellung auch die Form der Curven selbst) unabhängig von all den Fehlerquellen, welche die Energie für eine Wellenlänge bei allen Temperaturen im gleichen procentualen Verhältnis treffen (Absorption in der

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 222 ff. 1900.

Luft, selective Eigenschaften der Silberspiegel, des Prismas und des Bolometers). Gerade diese Erkenntnis veranlasste uns, dem systematischen Anwachsen des Exponenten $c$ der Wien'schen Spectralgleichung eine reale Bedeutung zuzuschreiben.

Die blosse Beobachtung der Form von Isochromaten ohne anderweitige Voraussetzungen erlaubt aber nur *negative* Schlüsse auf die Gültigkeit einer Spectralgleichung. Erst wenn man, wie Paschen in seiner neuesten Arbeit, das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz und das Wien'sche Verschiebungsgesetz als erwiesen voraussetzt, vermag diese Methode Entscheidendes über die Spectralgleichung auszusagen. Da nun die früheren unrichtigen Versuche Paschen's auch da nicht beweiskräftig sein können, wo sie zufällig zu einer richtigen Folgerung führen, so bleiben als einwandsfreie experimentelle Grundlage für diese Voraussetzung nur unsere Versuche bestehen.

b) Die neuen Isochromaten Paschen's, welche der Planck'schen Gleichung vollkommen folgen, sind mit einer Versuchsanordnung gewonnen, bei der die Strahlung eine siebenmalige Reflexion an Silberspiegeln und eine doppelte spectrale Zerlegung erfährt. Diese Versuche hält Paschen für entscheidend auch gegenüber den Resultaten von Controlversuchen mit einfacher spectraler Zerlegung, bei welchen er Energiecurven beobachtet hat, von denen er selbst sagt: „Ich habe nicht den Verlauf erhalten, welcher den Resultaten dieser Arbeit entspricht. Die langwelligen Aeste dieser Energiecurven fallen zwar nicht so steil ab, wie Wien's Curve, sie liegen aber der Wien'schen Curve näher als der Planck'schen."

Dies abweichende Verhalten der Energiecurven wird auf unbekannte Fehler geschoben: „Dagegen gehen diese Energiecurven in diejenigen des Planck'schen Gesetzes über . . . wenn ich annehme, dass aus einem mir nicht bekannten Grunde bei längeren Wellenlängen die Energie meines Spectrums geschwächt erscheint, sodass die beobachtete Energie bei folgenden Wellenlängen mit den darunter bezeichneten Factoren

| $\lambda$ | 3,91 | 4,59 | 5,12 | 6,26 | 7,74 | 8,25 | 8,81 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Factor | 1,020 | 1,038 | 1,050 | 1,068 | 1,165 | 1,195 | 1,31 |

multiplicirt werden muss."

Das heisst aber nichts anderes, als dass in den Energiecurven bei einfacher Zerlegung dieselben Isochromaten enthalten sind, die Paschen bei doppelter Zerlegung thatsächlich beobachtet hat, nämlich die der Planck'schen Gleichung.[1])

Hätte Paschen also die mit einfacher Zerlegung erhaltenen Beobachtungen nicht in Form von Energiecurven, sondern als Isochromaten discutirt, so hätte er auch hier ohne weiteres die Planck'sche Gleichung bestätigt gefunden. Damit fällt alles in sich zusammen, was Paschen veranlasst hat, den Versuchen bei doppelter Zerlegung den Vorzug vor denen bei einfacher spectraler Zerlegung zu geben. Beide Anordnungen sind in Bezug auf die Isochromaten einander ebenbürtig.

Aber wir glauben, dass die Versuche bei doppelter Zerlegung ebenfalls Energiecurven liefern würden, welche von der Planck'schen Gleichung abweichen, wenn man die mit dieser complicirten Versuchsanordnung verbundenen selectiven Absorptionen und Reflexionen der Grösse nach kennte. Denn wie sollte diese Anordnung im stande sein, die erheblichen Fehler zu eliminiren, welche den bei einfacher Zerlegung gewonnenen Paschen'schen Isothermen anhaften? Durch die doppelte spectrale Zerlegung wird nur die Verunreinigung des untersuchten Spectrums durch diffuse Strahlung vermindert. Die durch diese Verunreinigung verursachten Fehler aber sind, wie schon erwähnt, nur am äussersten Ende des aufsteigenden Astes der Energiecurven gefährlich, für grössere Werte von $\lambda T'$ (am abseigenden Aste) ist diese Fehlerquelle gering

1) Denn geht man aus von einer Schaar von Energiecurven, welche einer gewissen Spectralgleichung, z. B. der Planck'schen entspricht, so gehört zu ihnen eine ganz gewisse Schaar von Isochromaten, die zu einander in einem bestimmten Intensitätsverhältnisse stehen. Betrachtet man nur den Verlauf der Isochromaten (Gleichung zwischen Energie und Temperatur für eine Wellenlänge), so bleibt dieser ungeändert, wenn man die Schaar von Energiecurven dadurch in eine andere verwandelt, dass man die einer Wellenlänge entsprechenden Ordinaten bei allen Temperaturen mit dem gleichen Factor multiplicirt. Dabei darf dieser Factor von Wellenlänge zu Wellenlänge ganz beliebig variiren. Es tritt dieser Fall z. B. beim Vorhandensein von Absorptionen ein, die für die verschiedenen Wellenlängen verschieden, von der Temperatur aber unabhängig sind.

und ihr Einfluss lässt sich auf experimentellem Wege leicht ermitteln. Da die Hauptaufgabe Paschen's darin bestand, die für grosse Werte von $\lambda T$ von ihm früher gemachten Fehler richtig zu stellen, so ist die Einführung der doppelten Zerlegung für seinen eigentlichen Zweck als eine unnötige Complication zu bezeichnen.

In der That sieht auch Paschen bei der Discussion seiner Versuche den wesentlichen Vorzug seiner neuen Versuchsanordnung nicht in der doppelten Zerlegung, sondern in der veränderten Anordnung des schwarzen Körpers vor dem Spalt und der dadurch ermöglichten Verkleinerung der strahlenden Oeffnung des schwarzen Körpers, welche eine Verbesserung seiner Construction darstellen soll. Die gleiche Anordnung des schwarzen Körpers hätte Hr. Paschen aber auch bei einfacher spectraler Zerlegung wählen können, wenn er sich auch hier auf die blosse Bestimmung der Form der Isochromaten beschränkt hätte.

Auf die Verbesserung der Construction aber wollen wir nicht eingehen, wir meinen, Hr. Paschen hätte nachgerade selbst an der Construction seines elektrisch geglühten „schwarzen" Körpers irre werden müssen, nachdem es ihm gelungen war, demselben Körper schrittweise durch vermeintliche Verbesserungen die Wien'sche Spectralgleichung abzugewinnen, der jetzt nach Anbringung so geringfügiger Aenderungen die Planck'sche Theorie zu stützen vermag.

Wir glauben, dass auch sein mit den neuesten Verbesserungen versehener Strahlungskörper nicht die „schwarze" Strahlung liefert. Denn soviel aus der Beschreibung ersichtlich ist, sind bei ihm weder die Bedingungen erfüllt, welche notwendig sind, um die Oberfläche des strahlenden Hohlraumes auf eine gleichmässige Temperatur zu bringen, noch sind Kriterien vorhanden, welche eine genaue Beurteilung der Temperaturgleichheit gestatten.

c) Wenn der Strahlungskörper Paschen's kein „schwarzer" war, so erklären sich seine Resultate sehr einfach und zwanglos. Dass er keine richtigen Energiecurven finden konnte, bedarf dann keiner Erklärung, die Thatsache aber, dass dieser Strahlungskörper dennoch die Planck'schen Isochromaten giebt, ist leicht begreiflich. Denn wir wissen aus Erfahrung, dass

man annähernd richtige, d. h. „schwarze" Isochromaten selbst mit Strahlungskörpern erhalten kann, welche keine „schwarzen" Isothermen ergeben, ja sogar starke Abweichungen von den Fundamentalgesetzen der schwarzen Strahlung zeigen.[1]) Die mit einem solchen *nichtschwarzen* Körper gewonnenen Isochromaten aber, selbst wenn sie absolut übereinstimmten mit denen der schwarzen Strahlung, können unmöglich über die Gültigkeit einer Spectralgleichung entscheiden.

Man braucht daher zur Erklärung der Paschen'schen Resultate seine Zuflucht nicht zu so unwahrscheinlichen Hypothesen zu nehmen, wie Paschen, und auf die Beugung an den Rändern des Spaltes und an den Blenden des Strahlungskörpers Fehler zu schieben, welche den Betrag von 30 Proc. erreichen. Dadurch entfällt für Paschen der Vorwurf, bei allen seinen früheren Versuchen eine bekannte und leicht controlirbare Fehlerquelle von solcher Grösse übersehen zu haben.

d) Nach alledem erübrigt es sich wohl, auf Operationen einzugehen, welche Paschen auf Grund dieser seiner neuesten Versuche sogar an den Resultaten vornimmt, welche er früher nach unserer Meinung mit einwandsfreien schwarzen Körpern, nämlich mit Hohlkugeln in Bädern, bei niederen Temperaturen gewonnen hatte. Freilich sind die so erreichten Aenderungen geringfügiger Natur; der Wert von $\lambda_m T'$ geht von 2890 über in 2915 und nähert sich dadurch dem neuerdings von Paschen gefundenen Wert 2920 und damit auch dem unserigen 2940. Gleichzeitig ändern sich dadurch aber auch die damals erhaltenen Energiecurven, welche mit sehr grosser Genauigkeit der Wien'schen Gleichung folgten, ohne jedoch durch die an-

1) Vgl. p. 223 unserer Arbeit (Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 1. 1899), wo steht: „Selbst von der Natur des strahlenden Körpers ist der aus einer isochromatischen Geraden gefundene Wert von $c$ nur insofern abhängig, als sich das Emissionsvermögen des strahlenden Körpers für die betreffende Wellenlänge mit der Temperatur ändert . . . In Uebereinstimmung damit steht das Resultat, dass nicht nur der Gang, sondern auch der Wert von $c$ der früher mitgeteilten Serie II fast der gleiche ist, wie bei den übrigen Serien, obwohl der dabei benutzte Strahlungskörper vom schwarzen abweicht. Bei ihm schreitet die maximale Energie ja nicht zur fünften, sondern zur 5,2$^{\text{ten}}$ Potenz der absoluten Temperatur fort."

gebrachten Correctionen in die Planck'schen Isothermen überzugehen. Was also auf der einen Seite an scheinbarer Genauigkeit gewonnen wird, geht auf der anderen Seite wieder verloren.

V. *Schluss.* Wir glauben hierdurch genügend dargethan zu haben, dass die neueste Arbeit Paschen's nicht als Stütze für die Gültigkeit der Planck'schen Gleichung gelten kann.

Was nun diese Gleichung betrifft, für welche Planck[1]) neuerdings auch eine theoretische Begründung gegeben hat, so gebührt ihr der Vorrang vor den anderen bisher aufgestellten Spectralgleichungen, und sie kommt der Wahrheit jedenfalls sehr nahe. Freilich stimmt sie mit den Beobachtungen bei langen Wellen nicht so gut überein wie die rein empirische Formel (4) p. 193, dafür aber hat sie den Vorzug, die Wien'sche Gleichung für kleine Werte von $\lambda T$ als Grenzfall zu enthalten, gerade da, wo nach unseren und den Paschen-Wanner'schen *photometrischen* Versuchen[2]) die empirische Formel (4) versagt.

Es ist also wesentlich aus theoretischen Gründen von Interesse, festzustellen, ob die kleinen systematischen Abweichungen von der Planck'schen Gleichung, welche sowohl unsere Beobachtungen als die der Herren Rubens und Kurlbaum zeigen, auf Fehlern des Experimentes beruhen.

---

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **2.** p. 237 bis 245. 1900; Ann. d. Phys. **4.** p. 553—563. 1901; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 544—555. 1901.

2) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5—11. 1899; H. Wanner, Ann. d. Phys. **2.** p. 141—157. 1900; O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **3.** p. 36—46. 1901.

(Eingegangen 2. Juli 1901.)

## 16. *Ein Schwimmerdoppelventil als einfaches Hülfsmittel im Laboratorium, um Quecksilber zu heben;* von Benedict Woringer.

Mehr als je wird es heute in jedem Laboratorium notwendig, Quecksilber um eine beträchtliche Strecke zu heben. Z. B. bei den allerlei Arten von Quecksilberkolbenluftpumpen und den Sprengel'schen Luftpumpen. Viele dieser Pumpen sind in diesen Annalen sowie in den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft beschrieben worden. Fast alle aber sind derartig, dass sie nicht selbst hergestellt werden können und auch kostspielig sind. Auch bei der Reinigung von Quecksilber mittels Durchlaufenlassen durch die diversen reinigenden Säuren oder Salzlösungen muss dasselbe stets bedeutend höher als der Barometerstand gehoben werden. Dies ist sehr zeitraubend.

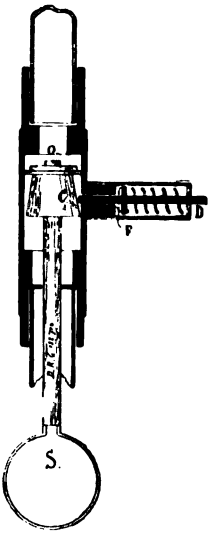


Fig. 1.

Der letzte Umstand veranlasste mich zur Construction eines automatischen Ventiles, mit Hülfe dessen und einer Wasserstrahlpumpe es ohne weiteres Zuthun gelingt, das Quecksilber beliebig hoch zu heben. Für den Hub von 130 cm ist *ein* solches Ventil erforderlich und für jede weiteren von 65—70 cm wieder je eines.

Nebenstehend giebt Fig. 1 das Ventil in natürlicher Grösse; Fig. 2 stellt den Gebrauch desselben dar, um das Quecksilber etwa 2 m zu heben, um entweder dem Reinigungsapparat oder einer Sprengel'schen Fallröhre zugeführt zu werden.

Zur Erläuterung der Figuren genügen einige Zeilen.

*S* (Fig. 1) ist ein Glaskugelschwimmer; er trägt den Conus *C* und die darüber befindliche Platte bei *O*. In jeder der Glasflaschen $G_1$ und $G_2$ (Fig. 2) befindet sich ein solcher Schwimmer. $V_1$ und $V_2$ sind die beiden Ventile. — Hebt sich der Schwimmer, so drückt der Conus *C* den Stift *CD* nach aussen, die Platte $F_1$ hebt sich ab, freie Verbindung mit der äusseren Luft herstellend. Gleich darauf wird die Oeffnung *O* geschlossen. — Der Gang ist folgender: Im Gefäss *G* sammelt sich das zu hebende Quecksilber; die Wasserstrahlpumpe ist bei *W* (Fig. 2) angeschlossen und in Thätigkeit; dann hebt sich das Quecksilber im Steigrohr $S_1$ und fliesst in das Gefäss $G_1$; bald erreicht es die Schwimmerkugel des Ventiles $V_1$ und nun öffnet sich $F_1$ und Luft dringt hier ein; der Weg *O* schliesst sich und die eindringende Luft treibt das Quecksilber aus $G_1$ durch $S_2$ nach $G_2$. Ist alles Quecksilber aus dem Gefäss $G_1$ entfernt, sodass die untere Oeffnung von $S_2$ frei ist, so gleicht sich der Druck so aus, dass in *O* nicht mehr Unterdruck herrscht, somit fällt der Schwimmer in $G_1$, $F_1$ schliesst sich. Jetzt kann die Wasserstrahlpumpe wieder wirken.

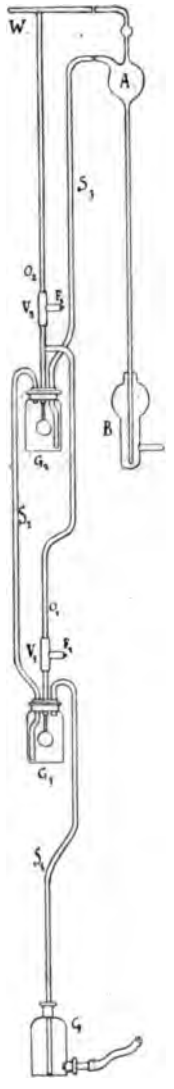


Fig. 2.

Ist genügend Quecksilber in $G_2$, so wird sich auch der hier befindliche Schwimmer des Ventiles $V_2$ heben, sodass das Quecksilber über $S_3$ nach *A* gelangt, um hier in einer geschlossenen Flasche im Vacuum sich anzusammeln, oder nach Durchlaufen des barometerlangen Rohres *AB* sich im offenen Gefäss *B* zu sammeln.

Um aus *A* das Quecksilber zu entnehmen, ist eine Thätigkeit erforderlich: Oeffnen eines Lufteinlasshahnes und eines Quecksilberauslasshahnes, auch das könnte automatisch eingerichtet werden. — Einfacher ist aber die Benutzung von *B*; allerdings verliert man dadurch an der disponiblen Höhe.

Wird unter *B* die bekannte Reinigungsröhre angebracht, in welcher das Quecksilber in feinen Tröpfchen, z. B. durch verdünnte Salpetersäure, fällt, so kann man das Quecksilber die Säure in einer Nacht bis 50 und mehrmal passiren lassen.

Da sich der Apparat ausgezeichnet bewährt hat, glaube ich manchem durch diese Veröffentlichung einen Dienst zu leisten.

Grunewald-Berlin.

(Eingegangen 26. Juni 1901.)

## 17. *Erwiderung auf die Bemerkungen*[1] *des Hrn. W. Felgentraeger zu meiner Arbeit: „Deformation durch Erwärmung als Ursache für die thermische Veränderung der Empfindlichkeit von Waagen;“*[2] *von Th. Middel.*

In meiner genannten Arbeit glaube ich einwandsfrei nachgewiesen zu haben, dass durch Verschiedenheiten der Ausdehnungscoefficienten von Ober- und Unterseite eines Waagebalkens die Empfindlichkeit einer Waage in starkem Maasse von der Temperatur abhängig werden kann. In seinen Bemerkungen spricht Hr. W. Felgentraeger die Ansicht aus, dass in dem Falle des Waagebalkens, den die Herren Richarz und Krigar-Menzel bei ihrer Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde benutzten, die ungleiche Ausdehnung der Stahlschneiden gegen den Messingbalken jene thermische Veränderung hervorrufe. Dass diese Ursache bei der beobachteten Erscheinung wesentlich mitgewirkt hat, ist von vornherein zuzugeben.

Dagegen überschätzt Hr. Felgentraeger ihre Grösse. Die Spandauer Wägungen zeigen, dass die Empfindlichkeit der Waage bei 12° um etwa 10 Proc. kleiner ist als bei 5°. Hr. Felgentraeger glaubt „fast 8 Proc.“ durch seine Annahme erklären zu können. Damit schiesst er aber trotz richtiger Daten doch über das Ziel hinaus, denn die Stahlschneiden, deren Höhe er der Tafel IV der Abhandlung[3] richtig

1) W. Felgentraeger, Ann. d. Phys. 5. p. 234. 1901.

2) Th. Middel, Ann. d. Phys. 2. p. 115. 1900.

3) F. Richarz und O. Krigar-Menzel, Anhang zu den Abhandlungen d. Berliner Akademie 1898.

entnommen, stecken bis auf etwa $^1/_3$ ihrer Höhe in der Bronzemasse festgekeilt und dehnen sich daher beim Erwärmen stärker, mehr ähnlich der Bronze. Eine im entgegengesetzten Sinne übertriebene Betrachtungsweise würde nur die frei herausragenden Stahlteile in Rechnung ziehen und dann nur $^2/_3$ der „fast 8 Proc." finden. Uebrigens sind diese 8 Proc. stark nach oben abgerundet, denn in dem Aufsatz des Hrn. Felgentraeger ist nachzulesen, dass 3,07/40 = 7,68 Proc. der gemeinte Wert ist. Davon $^2/_3$ giebt 5,12 Proc. Der wahre Einfluss dieser Störung liegt natürlich zwischen 5,12 Proc. und 7,68 Proc., doch ist wohl schwer zu entscheiden wo. Jedenfalls ist ersichtlich, dass dies zwar die grössere Hälfte der Empfindlichkeitsabnahme erklärt, dass aber daneben die von mir nachgewiesene, nach unten concav verlaufende thermische Krümmung des Balkens zur Erklärung des Phänomens herangezogen werden muss.

Hätte Hr. Felgentraeger damit seine Bemerkungen abgeschlossen, so würde man ihm nur Dank sagen für seine Erklärung. Seine weiteren Einwendungen aber beruhen auf irriger Auffassung einiger meiner Versuchsresultate. Die sechs Versuchsreihen im dritten Abschnitt meiner Abhandlung beweisen zwar selbstverständlich die thermische Krümmung in dem postulirten Sinne zunächst nur für den Temperaturbereich 12—75°. Dass aber der Sinn der Krümmung auch in dem Temperaturintervall 5—12° derselbe ist wie in dem Intervall 12—75°, zeigt Versuchsreihe I auf p. 34, welche mit einer Anfangstemperatur von $-2°$ beginnt. Die Unregelmässigkeiten, welche die genannten Versuchsreihen in den Intervallen 35—45° bez. 40—50° enthalten, beweisen nur, dass die thermische Krümmung nicht proportional der Temperatur erfolgte; die thermische Krümmung selbst aber wird durch dieselben nicht derartig berührt, dass sie einen dem postulirten entgegengesetzten Sinn angenommen hätte. In meiner Abhandlung hat gerade dieser Punkt die eingehendste Erörterung gefunden, worauf ich hiermit verweise. Ferner habe ich nicht gesagt, dass aus meinen Beobachtungen quantitativ nichts gefolgert werden könne, sondern: „dass über die wahrscheinliche Grösse der thermischen Krümmung von vornherein durch Rechnung nichts Bestimmtes auszusagen war, da die Rechnung in diesem Falle auf die un-

erwiesene Voraussetzung einer proportional der Temperatur verlaufenden Krümmung gegründet werden musste". Endlich würde Hr. Felgentraeger es wohl nicht „auffallend" gefunden haben, dass der Waagebalken durch öfteres Erwärmen auf 75° die Fähigkeit, sich thermisch zu krümmen, fast vollständig verloren hatte, wenn er gewusst hätte, dass solche Erwärmungen auf 75° monatelang täglich vorgenommen wurden und dass sich der Balken alles in allem viele Tage lang auf 75° befand.

Mayen b. Coblenz, im Juni 1901.

(Eingegangen 24. Juni 1901.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

901. INDEXED

№ 10.

# ANNALEN
## DER
# PHYSIK.

PUBLIC LIBRARY

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 6. HEFT 2.

DER GANZEN REIHE 311. BANDES 2. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

LEIPZIG, 1901.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

*Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 36 M.*

# Inhalt.


| | | Seite |
|---|---|---|
| 1. | M. Abraham. Energie elektrischer Drahtwellen | 217 |
| 2. | L. Holborn. Untersuchungen über Platinwiderstände und Petrolätherthermometer | 242 |
| 3. | F. Tamm. Ueber den Einfluss des Luftdruckes und der Luftfeuchtigkeit auf die Entladung statischer Elektricität aus Spitzen | 259 |
| 4. | M. Thiesen. Ueber die angebliche Anomalie des Sauerstoffs bei geringem Drucke | 280 |
| 5. | H. Schultze. Ueber die innere Reibung von Helium und ihre Aenderung mit der Temperatur | 302 |
| 6. | R. Gans. Ueber die Abhängigkeit der elektrolytischen Ueberführung und der elektromotorischen Kraft reversibler Elemente von physikalischen Einflüssen | 315 |
| 7. | J. Sauter. Zur Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien | 331 |
| 8. | M. Toepler. Einfluss von Diaphragmen auf elektrische Dauerentladung durch Luft von Atmosphärendruck | 339 |
| 9. | L. Matthiessen. Das astigmatische Bild des horizontalen, ebenen Grundes eines Wasserbassins | 347 |
| 10. | E. Knoblauch. Beitrag zur Kenntniss der Spitzenentladung aus einem Teslapole | 353 |
| 11. | L. Silberstein. Symbolische Integrale der elektromagnetischen Gleichungen, aus dem Anfangszustand des Feldes abgeleitet, nebst Andeutungen zu einer allgemeinen Theorie physikalischer Operatoren | 378 |
| 12. | H. Kreusler. Ueber den photoelektrischen Effect in der Nähe des Funkenpotentiales | 398 |
| 13. | H. Kreusler. Anwendung des photoelektrischen Stromes zur Photometrie der ultravioletten Strahlen | 412 |
| 14. | M. Eschenhagen. Werte der erdmagnetischen Elemente zu Potsdam für das Jahr 1900, sowie der Säcularvariationen für die Zeit von 1890 bis 1900 | 424 |
| 15. | H. Thiele und M. Eckardt. Ueber quecksilbergedichtete Hähne | 428 |
| 16. | J. Zenneck. Berichtigung | 432 |



Manuscripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Giessen**, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Citate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.



Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.

1901. № 10.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 6.

## 1. *Energie elektrischer Drahtwellen;* *von Max Abraham.*

### § 1. Theorie der Fortpflanzung.

In der Theorie der Fortpflanzung elektrischer Schwingungen längs einer Drahtleitung empfiehlt es sich, zwei Fälle zu unterscheiden, den einen, bei dem die Rückleitung des Stromes ausschliesslich durch Leitungsstrom erfolgt, und den anderen, bei dem auch Verschiebungsströme sich an der Rückleitung beteiligen. Die Draht-Telegraphie und -Telephonie hat es mit dem ersteren Falle zu thun, während es bei Schwingungen von der Frequenz der Hertz'schen wesentlich von der Entfernung parallel laufender Leiter abhängt, ob dielektrische Rückleitung in Betracht kommt. Bei senkrecht von der Erdoberfläche aus aufsteigenden Drähten, wie sie bei der Funkentelegraphie verwandt werden, hat man es ausschliesslich mit dielektrischer Rückleitung zu thun.

Es soll zunächst in diesem Paragraphen die Theorie der Fortpflanzung längs einer Drahtleitung behandelt werden, und zwar am Beispiele zweier Paralleldrähte, wobei sowohl der Fall fehlender, wie derjenige mitwirkender dielektrischer Rückleitung in Betracht gezogen werden soll. Wir schliessen uns hier, was den Fall der Rückleitung durch Leitungsstrom anbelangt, im wesentlichen an die Darstellung[1]) von Hrn. E. Cohn an, während wir uns, was die Mitwirkung dielektrischer Rückleitung anbelangt, auf die Untersuchungen der Herren A. Sommerfeld[2]) und G. Mie[3]) stützen. In den folgenden Paragraphen wird sodann die Frage beantwortet, in welchem Zusammenhange die für die Fortpflanzung maassgebenden

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 471—487. Leipzig 1900.
2) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 233. 1899.
3) G. Mie, Ann. d. Phys. 2. p. 201. 1900.

Grössen mit der elektromagnetischen Energie der Drahtwellen stehen.

Wir nehmen durchweg die Stromverteilung in den beiden Drähten als symmetrisch an; zur Drahtoberfläche schiefe Querströme, welche diese Symmetrie stören würden, schliessen wir aus. Bei einem einzelnen Draht ist diese Voraussetzung ohne weiteres erlaubt, bei zwei Paralleldrähten nur dann, wenn der Abstand der Drahtaxen nicht zu klein ist. In Bezug auf die genaue Discussion der Bedingungen für die symmetrische Stromverteilung verweisen wir auf die sehr eingehende Untersuchung des Hrn. G. Mie[1]), und entnehmen derselben das Resultat, dass es Entfernungen der Drähte giebt, die hinreichend gross sind, um jenen zur Drahtoberfläche schiefen Querstrom vernachlässigen zu dürfen, und doch hinreichend klein, um dielektrische Rückleitung auszuschliessen. Falls der Abstand der Drähte so gross wird, dass die Rückleitung durch Verschiebungsströme zu berücksichtigen ist, ist die Annahme symmetrischer Stromverteilung stets erlaubt.

Die Symmetrie der Stromverteilung bedingt es, dass man für Widerstand ($R$) und innere Selbstinduction ($L_i$) jedes der beiden Drähte die von Lord Rayleigh[2]) und J. Stefan[3]) berechneten Werte einführen kann, die definirt sind durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} E_{z1} = R_1 C + L_{i1} \dfrac{\partial C}{\partial t}, \\ E_{z2} = R_2 (-C) + L_{i1} \dfrac{\partial (-C)}{\partial t}. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten $E_{z1}$, $E_{z2}$ die longitudinalen elektrischen Kräfte, welche an den Oberflächen der Drähte parallel ihrer Axe wirken, $C$ den Gesamtstrom im ersten und dementsprechend $(-C)$ den Gesamtstrom im zweiten Draht. Alle diese Grössen denken wir uns in absolutem elektromagnetischem Maasse gemessen. Besitzen beide Drähte gleichen Radius ($b$), gleiche Leitfähigkeit ($\lambda$) und gleiche magnetische Permeabilität ($\mu_i$), so hat man

$$(1a)\quad R_1 + L_{i1} \cdot \frac{2\pi i}{\tau} = R_2 + L_{i2} \cdot \frac{2\pi i}{\tau} = \frac{4\pi i \mu_i}{\iota} \left( \frac{J(x)}{x J'(x)} \right)_{x = k_i b},$$

1) G. Mie, l. c. p. 241 ff.
2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **21.** p. 381. 1886.
3) J. Stefan, Wied. Ann. **41.** p. 400. 1890.

wenn $\tau$ die Schwingungsdauer bezeichnet, $J(x)$ die Bessel'sche Function nullter Ordnung erster Art, und endlich, zur Abkürzung, gesetzt ist

$$k_i^2 = -\frac{8\pi^2 i \cdot \lambda \mu_i}{\tau}.$$

Hat man, wie es bei Hertz'schen Schwingungen in der Regel der Fall ist, sehr starke Concentration des Stromes nach der Drahtoberfläche hin, so nehmen Widerstand und innere Selbstinduction die Werte an

$$R_1 = \frac{2\pi}{\tau} L_{i1} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\mu_i}{\lambda \tau}}. \tag{1b}$$

Auch für das elektromagnetische Feld ausserhalb der Drähte bringt die Voraussetzung symmetrischer Stromverteilung eine erhebliche Vereinfachung mit sich. Es zeigt sich nämlich, dass man bei fehlenden schiefen Querströmen nicht nur in den Drähten, sondern auch im Dielektricum die longitudinale Componente der magnetischen Kraft gleich Null setzen kann, ohne die Grundgleichungen zu verletzen. Es seien $H$, $E$ magnetische und elektrische Kraft; die $z$-Axe mag, parallel den Drahtaxen, in Richtung der Fortpflanzung gezogen sein. Mit Rücksicht auf das Verschwinden der Componente $H_z$ ergeben die Grundgleichungen:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \tag{2a}$$

Wir betrachten das elektromagnetische Feld in einer Ebene $z = \text{const.}$, und zwar ausschliesslich die Componenten parallel dieser Ebene. *Das „ebene" elektrische Feld ist nach (2) ein „potentielles"*[1], d. h. das Linienintegral der elektrischen Kraft längs einer in jener Ebene verlaufenden Curve hängt nur von den Endpunkten der Curve, und nicht vom sonstigen Verlaufe derselben ab. Als *„Spannung"* bezeichnet man den Wert, den jenes Curvenintegral annimmt, wenn man den Anfangspunkt der Curve in die Oberfläche des ersten, den End-

1) Vgl. M. Abraham, Encyklopädie d. mathem. Wissensch. 4. Art. 14. Nr. 6. 1901.

punkt in die Oberfläche des zweiten Drahtes fallen lässt, und versteht unter „*Capacität*“ ($Q$) der Leitung das Verhältnis der Ladung ($e$) der Längeneinheit des ersten Drahtes zur Spannung.

In entsprechender Weise besagt die Gleichung (2a): *Das ebene magnetische Feld ist ein solenoidales*[1]), d. h. der magnetische Inductionsfluss durch eine in der Ebene $z = \text{const.}$ verlaufende Curve hindurch, ist durch Anfangspunkt und Endpunkt der Curve bestimmt und vom sonstigen Verlaufe derselben unabhängig. Legt man die Endpunkte der Curve in die Oberflächen der beiden Drähte, so erhält man die „*magnetische Gesamtinduction pro Längeneinheit der Leitung.*“ Das Verhältnis der Gesamtinduction zur Stromstärke ($C$) im ersten Draht nennt man „*äussere Selbstinduction ($L_a$) pro Längeneinheit der Leitung.*“

Beim Einzeldraht kann man Capacität und äussere Selbstinduction analog definiren; nur hat man die Curven von der Drahtoberfläche aus bis in unendliche Entfernung zu ziehen. Stets aber ist zu beachten, dass die Curven in einer zur Drahtaxe senkrechten Ebene verlaufen müssen; nur dann ergeben jene Definitionen eine eindeutige Bestimmung von Spannung und magnetischer Gesamtinduction.

Nunmehr führt das Inductionsgesetz zu der Relation[2])

$$(3) \qquad -L_a \frac{\partial C}{\partial t} = E_{z1} - E_{z2} + \frac{1}{Q}\frac{\partial e}{\partial x}.$$

Setzt man hier für $E_{z1}$, $E_{z2}$ die durch (1) gegebenen Werte ein, und bezeichnet mit

$$(3a) \qquad R = R_1 + R_2$$

und

$$(3b) \qquad L_i = L_{i1} + L_{i2}$$

den gesamten Widerstand bez. die gesamte innere Selbstinduction der Leitung, so kann man (3) schreiben:

$$(4) \qquad \frac{\partial e}{\partial x} = -Q(L_a + L_i)\cdot\frac{\partial C}{\partial t} - QR\,.\,C.$$

---

1) M. Abraham, l. c. Nr. 7.
2) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 475.

Da ferner allgemein zeitliche Aenderung der Ladung und räumliche Aenderung des Gesamtstromes durch die Gleichung verknüpft sind

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial x}, \tag{4a}$$

so ergiebt die Elimination von $(e)$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = Q(L_a + L_i)\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + Q \cdot R \frac{\partial C}{\partial t}. \tag{4b}$$

Diese für die Fortpflanzung des Stromes maassgebende Differentialgleichung, die sogenannte *„Telegraphistengleichung"*, deren Ableitung vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie aus wir soeben skizzirt haben, ist wohl zuerst von G. Kirchhoff[1]), und zwar vom Standpunkte der Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik aus, gewonnen worden.

Will man die Fortpflanzung harmonischer Schwingungen längs der Leitung bestimmen, so hat man in der üblichen Weise Amplitude und Phase des Stromes in einen complexen Wert von $C$ zusammenzufassen, dessen Abhängigkeit von $t$ und $z$ durch den Factor

$$e^{\frac{2\pi i t}{\tau} - q i z}$$

angezeigt wird; hierbei bestimmt die complexe Constante

$$q = \frac{2\pi}{\omega \tau} - i \varkappa$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $(\omega)$ der Stromphasen und die auf die Längeneinheit bezogene räumliche Dämpfung $\varkappa$. Für $q$ ergiebt (4b) die Gleichung

$$q^2 = Q \cdot L_a \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - Q \cdot \frac{2\pi i}{\tau}\left(R + L_i \frac{2\pi i}{\tau}\right). \tag{5}$$

*Kennt man Widerstand, innere und äussere Selbstinduction und Capacität der Leitung, so kann man mit Hülfe der Gleichung (5) Fortpflanzungsgeschwindigkeit und räumliche Dämpfung berechnen.*

Einige Autoren[2]) schlagen den umgekehrten Weg ein. Nachdem sie den Wert von $q^2$ durch Integration der Grund-

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **100.** 1857; Ges. Werke p. 131.

2) G. Mie, l. c. p. 231 ff., sowie insbesondere W. B. Morton, Phil. Mag. (6) **1.** p. 563—571. 1901.

gleichungen ermittelt haben, bestimmen sie Widerstand, Capacität und Selbstinduction aus der Gleichung (5). So erhält man beispielsweise bei Ausschluss dielektrischer Rückleitung

$$(6) \qquad q^2 = \frac{4\pi^2}{c^2\tau^2}\cdot\varepsilon\mu_a\left\{1+\frac{1}{\ln\left(\frac{2d}{b}\right)}\cdot\frac{\mu_i}{\mu_a}\cdot\left(\frac{J(x)}{xJ'(x)}\right)_{x=k_i b}\right\},$$

wo $\varepsilon$, $\mu_a$ Dielektricitätsconstante und magnetische Permeabilität des Isolators, $2d$ den Abstand der Drahtaxen bezeichnen. Man bemerkt, dass (5) und (6) in Uebereinstimmung zu bringen sind, wenn gesetzt wird

$$(6a) \qquad R + L_i\cdot\frac{2\pi i}{\tau} = \frac{8\pi i\mu_i}{\tau}\left(\frac{J(x)}{xJ'(x)}\right)_{x=k_i b},$$

$$(6b) \qquad Q = \frac{\varepsilon}{4c^2\ln\left(\frac{2d}{b}\right)},$$

$$(6c) \qquad L_a = 4\mu_a\ln\left(\frac{2d}{b}\right).$$

Andererseits ist evident, dass man nicht aus der einen Gleichung, die durch Gleichsetzung der rechten Seite von (5) und (6) resultirt, die drei Gleichungen (6a), (6b), (6c) ableiten kann. Letzteres dürfte auch schwerlich die Meinung der betreffenden Autoren sein. Vielmehr scheinen dieselben stillschweigend die Gültigkeit der Gleichung (6a) für Widerstand und innere Selbstinduction der Leitung aus den Relationen (1a) und (3a), (3b) zu entnehmen, was ja erlaubt ist, wenn Symmetrie der Stromverteilung in den Drähten vorausgesetzt wird. Aber auch dann folgen die Gleichungen (6b), (6c) nicht mit Notwendigkeit, es sei denn, dass eine der beiden Hypothesen hinzutritt.

I. $Q$ und $L_a$ sind reell.

II. $Q$ und $L_a$ sind unabhängig vom Leitermaterial.

Legt man die Hypothese I zu Grunde, so erhält man durch Gleichsetzung der rechten Seiten von (5) und (6) mit Rücksicht auf (6a)

$$(7) \qquad \begin{cases} Q\cdot L_a\cdot\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - Q\cdot\frac{2\pi i}{\tau}\left(R+L_i\cdot\frac{2\pi i}{\tau}\right) = \frac{\varepsilon\mu_a}{c^2}\cdot\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \\ \qquad\qquad - \frac{\varepsilon}{4c^2\ln\left(\frac{2d}{b}\right)}\cdot\frac{2\pi i}{\tau}\cdot\left(R+L_i\cdot\frac{2\pi i}{\tau}\right). \end{cases}$$

Diese complexe Gleichung lässt in der That, falls $Q$ und $L_a$ reell sind, eine eindeutige Ableitung der reellen Gleichungen (6b), (6c) zu.

Verlangt man andererseits, dass bei Veränderung des Leitermateriales, d. h. bei stetig veränderlichen Werten von

$$\left(R + L_i \cdot \frac{2\pi i}{\tau}\right)$$

die Gleichung (7) stets erfüllt bleibe, und acceptirt die Hypothese II, so folgen wiederum die beiden Gleichungen (6b), (6c).

Die beiden Hypothesen sind indessen keineswegs a priori einleuchtend; sie sind überhaupt nur dann richtig, wenn man Rückleitung durch Verschiebungsströme ausschliesst. Nimmt man Mitwirkung dielektrischer Rückleitung an, so werden beide Annahmen hinfällig. In der That, Hr. G. Mie erhält[1]) in diesem Falle

$$(8) \qquad q^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right) \cdot \frac{\varepsilon \mu_a}{c^2} \left\{1 + \frac{\mu_i}{\mu_a \zeta} \cdot \left(\frac{J(x)}{x J'(x)}\right)_{x = k_i b}\right\}$$

und setzt demgemäss

$$(8a) \qquad Q = \frac{\varepsilon}{4 c^2 \zeta},$$

$$(8b) \qquad L_a = 4 \mu_a \zeta;$$

$\zeta$ aber bezeichnet eine complexe Grösse, die wesentlich vom Leitermaterial abhängt; hier ist keine der beiden Hypothesen erfüllt, und demnach die Ableitung der Gleichungen (8a), (8b) aus (5), (6a) und (8) nicht zulässig.

Die Absicht dieser Kritik ist indessen keineswegs die, die Gültigkeit der Gleichungen (8a), (8b) für Capacität und äussere Selbstinduction anzuzweifeln, sondern nur darauf hinzuweisen, dass man besser jedesmal auf die oben erwähnten Definitionen dieser Grösse zurückgeht. Für den Fall, dass die Rückleitung ausschliesslich durch Leitungsstrom erfolgt, leitet z. B. E. Cohn in dieser Weise die Werte (6b), (6c) ab. Ebenso habe ich mich durch besondere Rechnungen, die ich hier übergehen will, davon überzeugt, dass bei mitwirkender dielektrischer Rückleitung die Gleichungen (8a), (8b) aus der Definition von Capacität und äusserer Selbstinduction folgen.

1) G. Mie, l. c. p. 231.

Auch für den Grenzfall des Einzeldrahtes führt die Berechnung von $Q$, $L_a$ aus Spannung und Gesamtinduction zu denselben Werten, die sich auf Grund der soeben kritisirten Schlussweise ergeben.

Für Hertz'sche Schwingungen von der Frequenz

$$\frac{1}{\tau} = 3 \cdot 10^8,$$

die an zwei Platindrähten vom Radius $b = 0{,}2$ mm fortschreiten, sind die Werte von $\zeta$ aus folgender Tabelle zu entnehmen, die ich der freundlichen Mitteilung des Hrn. G. Mie verdanke.

| $2d$ | $\ln\left(\frac{2d}{b}\right)$ | $\zeta$ | $\ln\left(\frac{2d}{b}\right) : \lvert\zeta\rvert$ | $\tau\omega$ | $\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 7,6009 | $7{,}582 \cdot e^{i \cdot 6{,}3'}$ | 1,0025 | 99,82 | $1{,}12 \cdot 10^{-4}$ |
| 400 | 9,9035 | $9{,}400 \cdot e^{i \cdot 1^\circ 30{,}2'}$ | 1,0535 | 99,86 | $0{,}92 \cdot 10^{-4}$ |
| 1200 | 11,0021 | $9{,}564 \cdot e^{i \cdot 2^\circ 24{,}1'}$ | 1,1505 | 99,86 | $0{,}92 \cdot 10^{-4}$ |
| $\infty$ | — | $9{,}560 \cdot e^{i \cdot 2^\circ 26{,}6'}$ | — | 99,86 | $0{,}92 \cdot 10^{-4}$ |

Die erste Columne dieser Tabelle giebt die Entfernung der Drahtaxen an, die zweite würde zu berücksichtigen sein, wenn man mit Hülfe der Gleichungen (6b), (6c), welche dielektrische Rückleitung nicht in Betracht ziehen, Capacität und äussere Selbstinduction berechnen wollte. Die dritte Columne lehrt vermöge (8a), (8b) die Abweichung der wirklichen Werte von Capacität und äusserer Selbstinduction von den so berechneten kennen; beim Abstand 40 cm ist die Abweichung noch äusserst gering, bei 400 cm kommt sie bereits in Betracht, bei 1200 cm Abstand verhalten sich die beiden Drähte so, wie zwei Einzeldrähte, deren Felder sich einfach superponiren, sodass für jeden der beiden Drähte die Rückleitung fast ausschliesslich durch den Verschiebungsstrom erfolgt. Der Einfluss der dielektrischen Rückleitung kommt insbesondere in dem Phasenwinkel von $\zeta$ zur Geltung; dass der Phasenwinkel der complexen Grösse $\zeta$ stets positiv ist, besagt, wie man aus den Definitionen von $Q$ und $L_a$ mit Hülfe der Gleichungen (8a), (8b) ersieht: *Die Spannung ist der Ladung, die magnetische Gesamtinduction dem Strome an Phase voran, falls dielektrische Rückleitung mitwirkt.* Die vorletzte Columne giebt die Wellenlänge der Drahtwellen

an; die Wellenlänge der Luftwellen der gleichen Frequenz würde 100 cm betragen. Die letzte Columne endlich enthält die räumliche Dämpfung. Auf die Werte von $\omega$ und $\varkappa$ hat der Phasenwinkel von $\zeta$ keinen erheblichen Einfluss.

§ 2. **Problemstellung; Anwendung des Poynting'schen Satzes.**

Man pflegt die Begriffe Capacität, Selbstinduction und Widerstand mit der elektrischen und magnetischen Feldenergie bez. der Joule'schen Wärme in Verbindung zu bringen. Bei Wechselströmen geringer Frequenz ergiebt die energetische Definition dieser Grössen keinen Widerspruch mit derjenigen des vorigen Paragraphen, die das Verhältnis der Ladung zur Spannung, bez. der magnetischen Gesamtinduction und der longitudinalen elektrischen Kraft zum Strome als Definition verwendet. Aus dem im vorigen Abschnitte Gesagten ergiebt sich aber sofort, dass bei Hertz'schen Schwingungen jene Definitionen im allgemeinen nicht miteinander verträglich sind. Denn die auf Grund der Energie definirten Grössen sind stets wesentlich reell und positiv, während sich aus den Definitionen des vorigen Paragraphen für Capacität und äussere Selbstinduction complexe Werte ergaben, sobald dielektrische Rückleitung mitwirkte. Es entsteht nun die Frage, in welchem Zusammenhange die aus den verschiedenen Definitionen sich ergebenden Werte jener Grössen stehen; dieses soll im Folgenden untersucht werden.

Wir nennen weiterhin, um Missverständnisse zu vermeiden, die oben definirten Grössen $R$, $L_i$, $L_a$, $Q$ bez. *„scheinbaren Widerstand“*, *„scheinbare innere und äussere Selbstinduction“* und *„scheinbare Capacität“*, und definiren den *„effectiven Widerstand“* $R'$, die *„effective innere und äussere Selbstinduction“* $L_i'$, $L_a'$, sowie die *„effective Capacität“* $Q'$ durch die folgenden Festsetzungen:

Es mögen $\overline{e^2}$, $\overline{C^2}$ über eine ganze Schwingung erstreckte zeitliche Mittelwerte der Quadrate von Ladung der Längeneinheit eines Drahtes ($e$) und Stromstärke ($C$) bedeuten. *Dann soll der auf eine ganze Schwingung bezogene zeitliche Mittelwert der elektrischen Energie für die Längeneinheit der Leitung betragen*

$$\overline{W_e} = \frac{\overline{e^2}}{2\,Q'}.$$

*Der zeitliche Mittelwert der magnetischen Energie der Längeneinheit der Leitung soll betragen*

$$\overline{W_{ma}} = \frac{L_a'}{2} \cdot \overline{C^2}$$

*für den Isolator,*

$$\overline{W_{mi}} = \frac{L_i'}{2} \cdot \overline{C^2}$$

*für das Innere der Drähte. Der zeitliche Mittelwert der in der Längeneinheit der Drahtleitung entwickelten Joule'schen Wärme soll sein*

$$R' \overline{C^2}.$$

Was zunächst den Widerstand der Leitung anbelangt, so lässt sich mit Hülfe des Poynting'schen Satzes der Nachweis führen, dass scheinbarer und effectiver Widerstand identisch sind. Aus der ersten der Gleichungen (1) folgt

$$E_{z1} \cdot C = R_1 C^2 + \tfrac{1}{2} L_{i1} \frac{\partial C^2}{\partial t}. \tag{9}$$

$4\pi C$ ist, da $C$ in absolutem elektromagnetischem Maasse gemessen wurde, dem Linienintegrale $\int ds\, H_s$ der magnetischen Kraft gleich, das über die Randcurve $s$ des Querschnittes des ersten Drahtes zu erstrecken ist. Demgemäss schreiben wir (9):

$$\frac{1}{4\pi} \int ds\, E_{z1} \cdot H_s = R_1 C^2 + \tfrac{1}{2} L_{i1} \frac{\partial C^2}{\partial t}. \tag{9a}$$

Die linke Seite giebt die auf die Längeneinheit bezogene Energiemenge an, die in der Zeiteinheit in den ersten Draht hineinströmt. Da nach einer ganzen Schwingung die magnetische Energie des Drahtinnern zu ihrem ursprünglichen Werte zurückgekehrt ist, so ist die in den Draht während dieser Zeit hineingeströmte Energie vollständig in Joule'sche Wärme verwandelt worden. Mithin ist $R_1' \overline{C^2}$ der zeitliche Mittelwert der linken Seite von (9a); andererseits ist $R_1 \overline{C^2}$ der zeitliche Mittelwert der rechten Seite für die Zeit einer Schwingung. Mithin folgt

$$R_1' = R_1,$$

und entsprechend

$$R_2' = R_2,$$

daher nach (3a)

$$R' = R_1' + R_2' = R. \tag{10}$$

*Scheinbarer und effectiver Widerstand sind identisch.* Auch die Identität der scheinbaren und effectiven inneren Selbstinduction wäre durch geeignete Interpretation der Gleichung (9a) zu beweisen; doch werden wir diese Identität weiter unten (§ 4) in directerer Weise erkennen.

Wir wenden ferner den Poynting'schen Satz auf ein Gebiet im Isolator an, dessen Begrenzung erstens durch zwei benachbarte, durch die Parameter $z$ und $(z + dz)$ gekennzeichnete, auf den Drahtaxen senkrechte Ebenen, zweitens durch die Drahtoberflächen und drittens durch einen, das ganze System einschliessenden Kreiscylinder von unendlich grosser Basis gebildet wird. Der über eine Schwingung erstreckte zeitliche Mittelwert der Energieströmung muss gleich Null sein, da nach einer Schwingung die Feldenergie des Gebietes sich nicht geändert hat. Die mittlere Energieströmung durch den zweiten Teil der Begrenzung beträgt, nach dem soeben Bewiesenen, $R\overline{C^2}dz$. Durch den dritten Teil der Begrenzung strömt — das ist eine Grundbedingung des Problems der Drahtwellen — keine Energie herein oder heraus. Die $z$-Componente des Poynting'schen Strahlvectors sei

$$S_z = \frac{1}{4\pi}(E_x H_y - E_y H_x). \tag{11}$$

Alsdann folgt aus dem Verschwinden der mittleren Energieströmung durch die Begrenzung des Gebietes hindurch

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\int \overline{S_z}\,dx\,dy + R\overline{C^2} = 0. \tag{11a}$$

Um den Ausdruck (11a) auf eine andere Form zu bringen, müssen wir auf die Grundgleichungen des Feldes zurückgehen. Dieselben ergeben, mit Rücksicht auf das Fehlen einer longitudinalen Componente $H_z$ (vgl. § 1):

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}. \end{cases} \tag{12}$$

Da die Abhängigkeit sämtlicher Feldgrössen von $t$, $z$ durch den Factor

$$e^{2\pi i\frac{t}{\tau} - qiz}$$

bestimmt ist, so bestehen zwischen den complexen Ausdrücken der Componenten die Relationen

$$(12a)\qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{2\pi}{\tau}\cdot E_x = \quad q H_y, \\ \frac{\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{2\pi}{\tau}\cdot E_y = -q H_x, \quad q = \frac{2\pi}{\omega\tau} - \varkappa i. \end{cases}$$

Bei der Berechnung des über eine Schwingung erstreckten zeitlichen Mittelwertes von (11) hat man nur den mit $H_y$ gleichphasigen Teil von $E_x$, und den mit $H_x$ gleichphasigen Teil von $E_y$ zu berücksichtigen, also zu setzen

$$\overline{S_z} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2\pi}{\omega\tau}\cdot\frac{c^2\cdot\tau}{\varepsilon\cdot 2\pi}(\overline{H_x^2} + \overline{H_y^2}) = \frac{2c^2}{\omega\varepsilon}\cdot\frac{1}{8\pi}(\overline{H_x^2} + \overline{H_y^2}).$$

Da nun die auf den Isolator entfallende mittlere magnetische Energie der Längeneinheit der Leitung beträgt

$$\tfrac{1}{2} L_a' \overline{C^2} = \overline{W_{ma}} = \int\int dx\, dy \frac{\mu_a}{8\pi}(\overline{H_x^2} + \overline{H_y^2}),$$

so wird

$$(12b)\qquad \int\int \overline{S_z}\, dx\, dy = \frac{c^2}{\omega\varepsilon\mu_a}\cdot L_a' \overline{C^2}.$$

Nun war $\varkappa$ die räumliche Dämpfung der Stromamplitude, mithin $2\varkappa$ diejenige des Quadrates der Stromamplitude. Mithin ergiebt (11a):

$$-\frac{2\varkappa c^2}{\omega\varepsilon\mu_a}\cdot L_a' \overline{C^2} + R\,\overline{C^2} = 0,$$

oder

$$(13)\qquad R = \frac{2\varkappa c^2}{\omega\varepsilon\mu_a}\cdot L_a'.$$

*Diese Relation verknüpft den Widerstand mit der effectiven äusseren Selbstinduction.* Sie wird uns im Folgenden von Nutzen sein, gestattet indessen nicht, den allgemeinen Zusammenhang der Werte von scheinbarer und effectiver Capacität und Selbstinduction zu erkennen. Um dieses Problem zu erledigen, müssen wir einen zweiten, dem Poynting'schen analogen Satz der Elektrodynamik heranziehen.

### § 3. Beweis eines allgemeinen Satzes über elektrische Schwingungen.

Wir wollen die Betrachtungen zunächst etwas allgemeiner halten, als es für die Anwendung auf Drahtwellen unbedingt erforderlich wäre. Wir wollen von einem stationären Schwin-

gungszustand in einem Körper reden, der sowohl leitend, wie elektrisch und magnetisch polarisirbar ist. Für das Feld der Schwingungen gelten bei Zugrundelegung absoluten elektromagnetischen Maasses die Differentialgleichungen[1]):

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\lambda E = \operatorname{curl} H, \tag{14}$$

$$\operatorname{div} E = 0; \tag{14a}$$

$$-\mu\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{curl} E, \tag{15}$$

$$\operatorname{div} H = 0. \tag{15a}$$

Wir führen das Maxwell'sche Vectorpotential $A$ ein, welches definirt ist durch die Gleichungen

$$\mu H = \operatorname{curl} A, \tag{16}$$

$$\operatorname{div} A = 0. \tag{16a}$$

Mit Rücksicht auf (14a), (15) folgt, dass zwischen der elektrischen Kraft und dem Vector $A$ die Relation besteht:

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{16b}$$

*Wir stellen nun dem Poynting'schen Strahlvector*

$$S = \frac{1}{4\pi}[EH]$$

*einen neuen Vector T gegenüber, der definirt ist durch*

$$T = \frac{1}{4\pi}[AH]. \tag{17}$$

*Der neue Vector T ist das mit $1/4\pi$ multiplicirte äussere (vectorielle) Product aus Vectorpotential und magnetischer Kraft.*

Für die Divergenz des äusseren Productes zweier Vectoren gilt die Formel (19′) des erwähnten Encyklopädieartikels[2]):

$$\operatorname{div}[AH] = H\operatorname{curl} A - A\operatorname{curl} H.$$

---

1) Ueber die hier benutzten Symbole der Vectoranalysis findet man Näheres in dem vom Verfasser herrührenden Artikel 4. 14 der Encyklopädie der mathem. Wissensch. Für die ausserordentliche Vereinfachung, welche gerade in der Elektrodynamik die Verwendung der Vectorenrechnung mit sich bringt, mag dieser Paragraph als Beleg dienen.

2) M. Abraham, Mathem. Encykl. 4. 14. p. 20. 1901.

Mit Rücksicht auf diese Rechnungsregel und die Gleichungen (14), (16) erhält man

$$(17\,a) \qquad \operatorname{div} T = \frac{1}{4\pi}\left\{\mu H^2 - A\left(\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\lambda E\right)\right\}.$$

Wir integriren diese Gleichung über einen Raum $w$, der von einer Fläche $o$ eingeschlossen ist. Infolge der Definition der Divergenz eines Vectors[1]) wird die linke Seite

$$\iiint dw \operatorname{div} T = \iint do\, T_\nu,$$

wo $T_\nu$ die Componente des Vectors $T$ in Richtung der äusseren Normalen der Fläche $o$ bezeichnet. Mithin wird

$$(18) \qquad \iint do\, T_\nu = \frac{1}{4\pi}\iiint dw\,\mu H^2 - \frac{1}{4\pi}\iiint dw\, A\left(\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\lambda E\right).$$

Nun bilden wir zeitliche Mittelwerte, erstreckt über die Zeit $\tau$ einer Schwingung. Die zeitlichen Mittelwerte der magnetischen und elektrischen Energie des Raumes $w$ sind

$$\overline{W_m} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt \iiint dw \frac{\mu H^2}{8\pi},$$

$$\overline{W_e} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt \iiint dw \frac{\varepsilon E^2}{8\pi c^2}.$$

Mithin ist für den Mittelwert des ersten Gliedes der rechten Seite von (18) $2\,\overline{W_m}$ zu setzen. Bei der Berechnung des Mittelwertes des zweites Gliedes hat man, mit Rücksicht auf (16b), zu setzen

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt.\, A\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\left\{AE\right\}_t^{t+\tau} + \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt.\, E^2,$$

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt.\, AE = -\frac{1}{\tau}\left\{\tfrac{1}{2}A^2\right\}_t^{t+\tau}.$$

---

1) M. Abraham, l. c. p. 12.

Da die Feldgrössen zu den Zeiten $t$ und $t + \tau$ dieselben Werte besitzen, so hat man

$$\frac{1}{4\pi}\iiint d w \frac{\varepsilon}{c^2} \overline{A \frac{\partial E}{\partial t}} = \frac{1}{4\pi}\iiint d w \frac{\varepsilon}{c^2} \overline{E^2} = 2\overline{W}_e,$$

$$\frac{1}{4\pi}\iiint d w \, 4\pi\lambda \, \overline{A E} = 0.$$

Demnach erhält man schliesslich

$$\overline{W}_m - \overline{W}_e = \tfrac{1}{2}\iint d o \, \overline{T}_\nu. \tag{19}$$

Wir können das Resultat in den Satz zusammenfassen: *Bei einem stationären elektromagnetischen Schwingungsvorgang in einem homogenen isotropen Körper wird die Differenz der zeitlichen Mittelwerte der magnetischen und elektrischen Energie durch das halbe, über die Begrenzungsfläche erstreckte Integral der Normalcomponente unseres Vectors T angegeben.*

Auch wenn das Feld von verschiedenen homogenen, isotropen Körpern erfüllt ist, die Leiter, Halbleiter oder Isolatoren sein können, behält dieser Satz seine Gültigkeit. Die Normalcomponente des Vectors $T$ durchsetzt nämlich stetig die Trennungsfläche verschiedener Körper; denn weder die Tangentialcomponenten der elektrischen, noch diejenigen der magnetischen Kraft werden längs derartiger Trennungsflächen unstetig. Aus der Stetigkeit der Tangentialcomponenten der elektrischen Kraft $E$ der Schwingungen folgt aber, nach (16b), die Stetigkeit der Tangentialcomponenten des Vectorpotentiales $A$, und Stetigkeit der Tangentialcomponenten von $A$ und $H$ bedingt, nach (17), Stetigkeit der Normalcomponenten des Vectors $T$. *Ebenso wie der Poynting'sche Satz gilt auch der durch (19) formulirte, wenn die Fläche o verschiedene homogene, isotrope Körper einschliesst.*

Die erste Anwendung unseres Satzes soll sich auf den Fall beziehen, wo das Feld von Isolatoren erfüllt und von vollkommen leitenden Wänden begrenzt ist. An der Begrenzung verschwindet die tangentielle elektrische Kraft der Schwingungen, mithin nach (16b) auch die Tangentialcomponente des Vectorpotentiales. Daher ist $T_\nu = 0$, und man erhält aus (19):

$$\overline{W}_m = \overline{W}_e.$$

*Bei stationären elektromagnetischen Schwingungen in einem allseitig von vollkommen spiegelnden Wänden begrenzten Raume sind die zeitlichen Mittelwerte der magnetischen und elektrischen Energie für eine ganze Schwingung einander gleich.*

Wenn nur ein Teil der Begrenzung des Feldes vollkommen spiegelt, während durch andere Teile derselben ebene homogene Wellen herein und heraus laufen, so verliert dieses Resultat seine Gültigkeit nicht. Bei ebenen homogenen elektromagnetischen Wellen ist nämlich die elektrische Kraft senkrecht zur magnetischen orientirt, und mit ihr in gleicher Phase. Das Vectorpotential $A$ besitzt nach (16b) einen Phasenvorsprung von $\pi/2$ vor der elektrischen und somit auch vor der magnetischen Kraft. Daher ist der über eine Schwingung erstreckte zeitliche Mittelwert des Vectors $T$ bei ebenen homogenen Wellen gleich Null. Daraus folgt in der That:

*Bei stationären elektromagnetischen Schwingungen in einem Felde, das teilweise von vollkommen reflectirenden Wänden begrenzt ist, während durch die anderen Teile der Begrenzung ebene homogene Wellen Energie ab- und zuführen, ist die mittlere magnetische Energie der mittleren elektrischen gleich.*

Bei Drahtwellen liegen die Verhältnisse complicirter; weder sind die Drähte als vollkommen leitend, noch sind die Wellen als homogen anzusehen. Hier ist eine besondere Betrachtung notwendig.

### § 4. Anwendung auf Drahtwellen.

Wir wenden den neuen Satz auf ein Stück des ersten Drahtes, von der Länge 1, an, um die Identität der „scheinbaren" inneren Selbstinduction desselben ($L_{i1}$) mit der „effectiven" ($L'_{i1}$) zu beweisen. Diese Betrachtung geht ganz parallel der in § 2 auf Grund des Poynting'schen Satzes durchgeführten. Die Gleichung (1) nimmt durch Einführung des Vectorpotentiales nach (16b) die Form an

$$-\frac{\partial A_{s1}}{\partial t} = R_1 C + L_{i1}\frac{\partial C}{\partial t}.$$

Die Integration nach der Zeit, Multiplication mit $(\frac{1}{2}C)$ und Mittelwertsbildung für die Zeit einer ganzen Schwingung ergiebt, da $\int C\,dt$ und $C$ die Phasendifferenz $(\pi/2)$ besitzen:

$$-\tfrac{1}{2}\overline{A_z C} = \frac{L_{i1}}{2}\cdot\overline{C^2}.$$

Hier ist also das Glied mit $R_1$ herausgefallen, während aus der Formel (9) bei der Mittelwertsbildung das Glied mit $L_{i1}$ herausfiel. Die linke Seite ist mit Hülfe der Relation $4\pi C = \int ds\, H_s$, mit Rücksicht auf (17), zu schreiben

$$\frac{1}{2}\int ds\, \overline{T_\nu} = \frac{L_{i1}}{2}\,\overline{C^2}. \tag{20}$$

$T_\nu$ bedeutet dabei die Componente des Vectors $T$ in Richtung der äusseren Normalen der Drahtoberfläche. Die Anwendung unseres Satzes (19) auf das Drahtinnere ergiebt, da dielektrische Verschiebung und mithin elektrische Energie im Drahtinnern nicht angenommen wird:

$$\frac{1}{2}\int ds\, \overline{T_\nu} = \frac{1}{2}\, L_{i1}'\, \overline{C^2}.$$

Es folgt also

$$L_{i1}' = L_{i1}.$$

Die analoge Ueberlegung ergiebt für den zweiten Draht

$$L_{i2}' = L_{i2},$$

daher ist nach (3b)

$$L_i' = L_{i1}' + L_{i2}' = L_i. \tag{21}$$

*Effective und scheinbare innere Selbstinduction sind in der That identisch.*

Bei dieser Betrachtung wurden, ebenso wie bei der analogen des § 2, die auf die Grundflächen des aus dem Drahte herausgeschnittenen Cylinders bezüglichen Teile der Flächenintegrale fortgelassen. Durch eine besondere, diese Terme berücksichtigende Rechnung habe ich mich davon überzeugt, dass diese Terme zu vernachlässigen sind in allen den Fällen, in denen es erlaubt ist, $R_1$ und $L_{i1}$ aus der Gleichung (1a) zu entnehmen. Diese Relation wurde nämlich von Lord Rayleigh und J. Stefan abgeleitet auf Grund der Voraussetzung, dass die äussere elektrische Kraft sich längs des Drahtes nicht verändert. Nun ist zwar bei Hertz'schen Schwingungen diese Annahme keineswegs erfüllt; die tangentielle elektrische Kraft wechselt periodisch beim Fortschreiten längs des Drahtes. Indessen ist die Correction, die hierdurch in die Werte von $R_1$ und $L_{i1}$ hereinkommt, so geringfügig, dass sie in allen mir bekannten Arbeiten vernachlässigt wird, und von derselben

Grössenordnung sind die von den erwähnten Termen herrührenden Correctionen der Werte von $R_1'$ und $L_{i1}'$.

Ferner wenden wir den Satz (19) an auf ein Gebiet des Isolators, dessen Begrenzung erstens von zwei auf den Drahtaxen senkrechten, durch die Parameter $z$ und $(z + dz)$ gekennzeichnete Ebenen, zweitens durch die Drahtoberflächen und drittens durch einen, das ganze System einschliessenden Kreiscylinder von unendlicher Basis gebildet wird. Für den zweiten Teil der Begrenzung gilt, gemäss dem soeben Bewiesenen, da $\nu$ jetzt die nach dem Drahtinnern weisende Normale bezeichnet

$$\tfrac{1}{2}\iint \overline{T_\nu}\, do = -\, L_i \frac{\overline{C^2}}{2} \cdot dz\,.$$

In unendlicher Entfernung werden die Feldcomponenten in der Weise Null, dass der dritte Teil der Begrenzung keinen Beitrag zu dem Flächenintegral liefert. Somit ergiebt der Satz (19):

$$\overline{W_{ma}} - \overline{W_e} = -\,\frac{L_i}{2}\,\overline{C}^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\iint dx\,dy\,\overline{T_z}\,. \tag{22}$$

Hierbei ist nach (17) zu setzen:

$$\overline{T_z} = \frac{1}{4\pi}\left(\overline{A_x H_y} - \overline{A_y H_x}\right). \tag{22a}$$

Führt man mit Hülfe von (16b) das Vectorpotential $A$ in die Grundgleichungen (12) ein, so erhält man

$$\begin{cases} -\,\dfrac{\varepsilon}{c^2}\,\dfrac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\,\dfrac{\partial H_y}{\partial z}\,, \\ -\,\dfrac{\varepsilon}{c^2}\,\dfrac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = +\,\dfrac{\partial H_x}{\partial z}\,. \end{cases} \tag{23}$$

Da die Abhängigkeit der complexen Ausdrücke der Feldgrösse von $t$ und $z$ durch den Factor

$$e^{2\pi i \frac{t}{\tau} - q i z}$$

bestimmt sind, so gelten für diese Ausdrücke die Relationen

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c^2}\cdot\left(\dfrac{2\pi}{\tau}\right)^2 A_x = \quad q\,i\,H_y\,, \\ \dfrac{\varepsilon}{c^2}\cdot\left(\dfrac{2\pi}{\tau}\right)^2 A_y = -\,q\,i\,H_x\,, \quad q = \dfrac{2\pi}{\omega\,\tau} - \varkappa i\,. \end{cases} \tag{24a}$$

In die auf der rechten Seite von (22a) stehenden zeitlichen Mittelwerte geht nur der mit $H_y$ gleichphasige Teil

von $A_x$, sowie der mit $H_x$ gleichphasige Teil von $A_y$ ein. Demgemäss wird

$$\overline{T}_z = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\varkappa c^2}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 (\overline{H}_x^2 + \overline{H}_y^2) = \frac{2\varkappa c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\mu_a}{8\pi} (\overline{H}_x^2 + \overline{H}_y^2),$$

und somit

$$\iint \overline{T}_z \, dx\, dy = \frac{2\varkappa c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \cdot \iint dx\, dy \, \frac{\mu_a}{8\pi} (\overline{H}_x^2 + \overline{H}_y^2).$$

Da nun die magnetische Energie des Drahtäusseren pro Längeneinheit der Leitung beträgt

$$\tfrac{1}{2} L_a' \overline{C}^2 = \overline{W}_{ma} = \iint dx\, dy \, \frac{\mu_a}{8\pi} (\overline{H}_x^2 + \overline{H}_y^2),$$

und die räumliche Dämpfung von $\overline{C}^2$ durch $2\varkappa$ gegeben wird, so ergiebt (22)

$$(24) \qquad \tfrac{1}{2} L_a' \overline{C}^2 - \tfrac{1}{2} \frac{\overline{e}^2}{Q'} = -\frac{L_i \overline{C}^2}{2} - \frac{2\varkappa^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{L_a'}{2} \cdot \overline{C}^2.$$

Um $\overline{e}^2$, $\overline{C}^2$ zu eliminiren, hat man die Beziehung zu benutzen

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial x},$$

aus der folgt:

$$\overline{e}^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = |q^2| \, \overline{C}^2.$$

Durch Einführung derselben erhält man

$$(25) \qquad |q^2| = Q' (L_a' + L_i) \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\varkappa^2 c^2}{\varepsilon \mu_a} \cdot Q' L_a'.$$

Diese Relation ist es, die sich durch Anwendung des Satzes (19) auf das Drahtäussere ergiebt. Zusammen mit der Relation (13), die sich in entsprechender Weise aus dem Poynting'schen Satze ergab, liefert sie zwei Gleichungen zur Bestimmung der für die magnetische und elektrische Energie des Drahtäusseren maassgebenden Wert der effectiven äusseren Selbstinduction ($L_a'$) und der effectiven Capacität ($Q'$). Beide Relationen gelten nicht nur für zwei Paralleldrähte, sondern für eine beliebige, durch gerade Drähte oder coaxiale Cylinder gebildete Leitung, immer unter Voraussetzung symmetrischer

Stromverteilung. Kennt man für die betreffende Leitung die Werte von $R$, $L_i$, $L_a$ und $Q$, mithin nach (5) auch denjenigen von

$$q = \frac{2\pi}{\omega\tau} - \varkappa i,$$

so kann man $L_a'$, $Q'$ aus jenen beiden Relationen berechnen. *Unser Satz (19) erledigt also im Verein mit dem Poynting'schen allgemein die Frage nach der Energie elektrischer Drahtwellen.* Wir wollen am Beispiele der beiden Paralleldrähte die hier vorliegenden Verhältnisse genauer discutiren.

### § 5. Effective Capacität und effective äussere Selbstinduction.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der complexen Grösse

$$q = \frac{2\pi}{\omega\tau} - \varkappa i$$

schreiben wir die Relationen (25) und (13):

$$(26)\quad \left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 + \varkappa^2 = Q'(L_a' + L_i)\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\varkappa^2 c^2}{\varepsilon\mu_a} \cdot Q' L_a',$$

$$(27)\quad \frac{2\varkappa}{\omega} = \frac{\varepsilon\mu_a}{c^2} \cdot \frac{R}{L_a'}.$$

Diese Relationen verknüpfen effective Capacität ($Q'$) und effective äussere Selbstinduction ($L_a'$) mit Widerstand ($R$), innerer Selbstinduction ($L_i$), Fortpflanzungsgeschwindigkeit ($\omega$) und räumlicher Dämpfung ($\varkappa$) der Schwingungen.

Diesen Gleichungen gegenüber stellen wir die complexe Gleichung (5) des § 1, die $\omega$, $\varkappa$ durch die aus Spannung und Gesamtinduction definirten Werte der „scheinbaren" Capacität ($Q$) und „scheinbaren" äusseren Selbstinduction ($L_a$) ausdrückt:

$$(28)\quad \left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 - \varkappa^2 - \frac{4\pi\varkappa i}{\omega\tau} = Q(L_a + L_i)\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{2\pi i}{\tau} \cdot QR.$$

Wir beabsichtigen, $\omega$ und $\varkappa$ aus diesen Gleichungen zu eliminiren, um direct die Werte der scheinbaren und effectiven Capacität und äusseren Selbstinduction in Verbindung zu bringen. Hierbei sind die Fälle fehlender und mitwirkender dielektrischer Rückleitung gesondert zu behandeln.

Wird die Rückleitung ausschliesslich durch den Leitungsstrom besorgt, so nehmen, wie in § 1 erwähnt, die Grössen

$Q$ und $L_a$ reelle Werte an. Demgemäss spaltet sich die Gleichung (28) durch Trennung des reellen und imaginären Teiles in die beiden folgenden:

$$\left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 - \varkappa^2 = Q(L_a + L_i)\cdot\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2, \tag{29}$$

$$\frac{2\varkappa}{\omega} = Q\,R. \tag{30}$$

Aus (27), (30) folgt zunächst

$$Q\,L_a' = \frac{\varepsilon\mu_a}{c^2}; \tag{31}$$

andererseits war nach (6b), (6c):

$$Q\,L_a = \frac{\varepsilon\mu_a}{c^2}.$$

Hieraus schliessen wir

$$L_a' = L_a. \tag{32}$$

Mit Rücksicht auf (31), (32) ergiebt die Subtraction der Gleichungen (26), (29)

$$0 = (Q' - Q)\left\{(L_a + L_i)\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\varkappa^2}{Q}\right\}.$$

Da der Factor, mit dem $(Q' - Q)$ hier multiplicirt erscheint, positiv ist, so folgt

$$Q' = Q. \tag{33}$$

Wir gelangen also zu dem Resultate:

*Wenn die Rückleitung ausschliesslich durch Leitungsstrom erfolgt und mithin die Werte von scheinbarer Capacität und scheinbarer äusserer Selbstinduction reell sind, so sind diese mit den aus der Feldenergie definirten Werten der effectiven Capacität und effectiven äusseren Selbstinduction identisch.*

Nun werde der allgemeine Fall untersucht, dass dielektrische Rückleitung in Betracht zu ziehen ist. Dann bestimmen sich $Q$ und $L_a$ aus den Gleichungen (8a), (8b). $\zeta = r\,.\,e^{\varphi i}$ ist hier eine complexe Grösse, deren Werte für ein bestimmtes Beispiel in der Tabelle des § 1 angeführt sind; der Winkel $\varphi$ ergiebt sich durch Multiplication der dort in Graden ausgedrückten Winkel mit $2\pi/360$. Man könnte zu der Vermutung geneigt sein, dass hier der zeitliche Mittelwert der elektrischen Energie für eine Schwingung durch den zeitlichen

Mittelwert des Productes aus Spannung und Ladung, derjenige der magnetischen durch den zeitlichen Mittelwert des Productes aus Stromstärke und Gesamtinduction gegeben werde. Dann hätte man

$$\overline{W_{ma}} = \frac{\overline{C^2}}{2} \cdot R_e(L_a), \quad \overline{W_e} = \frac{\overline{e^2}}{2} \cdot R_e\left(\frac{1}{Q}\right);$$

vernachlässigt man zweite und höhere Potenzen des Phasenwinkels $\varphi$, so wären für die reellen Teile $R_e(L_a)$, $R_e(1/Q)$ die absoluten Beträge $|L_a|$, $|1/Q|$ zu setzen. Es wäre also

$$\overline{W_{ma}} = |L_a| \frac{\overline{C^2}}{2}, \quad \overline{W_e} = \frac{\overline{e^2}}{2|Q|},$$

was für effective äussere Selbstinduction und Capacität zu den Gleichungen führen würde:

$$L_a' = |L_a| = 4\mu_a r, \quad Q' = |Q| = \frac{\varepsilon}{4c^2 r}.$$

Wir werden indessen sehen, dass die Vermutung, die zu diesen Beziehungen führt, nicht richtig ist. Die Differenzen

$$L_a' - |L_a|, \quad \frac{1}{Q'} - \frac{1}{|Q|}$$

ergeben sich vielmehr von der Ordnung des Phasenwinkels $\varphi$ selbst.

Durch Einführung der Werte

$$L_a = 4\mu_a r \cdot e^{\varphi i}, \quad Q = \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot e^{-i\varphi} \tag{34}$$

in (28) gelangt man zu der complexen Gleichung

$$\left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 - \varkappa^2 - \frac{4\pi\varkappa i}{\omega\tau} = \frac{\varepsilon\mu_a}{c^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + L_i \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot e^{-\varphi i} \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{2\pi i}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot e^{-\varphi i} \cdot R,$$

die in folgende beiden reellen Gleichungen zu spalten ist:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 - \varkappa^2 = \frac{\varepsilon\mu_a}{c^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \\ &\qquad \cdot \left\{\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 L_i \cos\varphi - \frac{2\pi}{\tau} \cdot R \cdot \sin\varphi\right\} \\ &\frac{2\varkappa}{\omega} = \frac{\varepsilon}{4c^2 r} \cdot \left\{R\cos\varphi + \frac{2\pi}{\tau} \cdot L_i \sin\varphi\right\}. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Da der Phasenwinkel $\varphi$, wie die Tabelle des § 1 lehrt, in der Regel sehr klein ist, so können wir uns mit der Berücksichtigung der ersten Potenz dieses Winkels begnügen, also für (35) schreiben:

$$(36)\quad \left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 - \varkappa^2 = \frac{\varepsilon\mu_a}{c^2}\cdot\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{4c^2r}\cdot\left\{\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 L_i - \frac{2\pi}{\tau}\cdot R\cdot\varphi\right\},$$

$$(37)\quad \frac{2\varkappa}{\omega} = \frac{\varepsilon}{4c^2r}\left\{R + \frac{2\pi}{\tau}\cdot L_i\cdot\varphi\right\}.$$

Die Gleichungen (36), (37) sind jetzt mit (26), (27) zu combiniren, um nach Elimination von $\omega$ und $\varkappa$, $Q'$ und $L_a'$ durch $r$ und $\varphi$ auszudrücken. Aus (27), (37) folgt

$$(38)\quad \frac{4\mu_a r}{L_a'} = 1 + \psi,$$

wenn zur Abkürzung

$$(38a)\quad \psi = \varphi\cdot\frac{2\pi L_i}{\tau R}$$

gesetzt wird.

Der Factor von $\varphi$ in (38a) ist, wie wir sehen werden, wenig von 1 verschieden. Berücksichtigen wir daher consequenterweise nur erste Potenzen von $\psi$, so erhalten wir

$$(39)\quad L_a' = 4\mu_a r(1-\psi) = |L_a|(1-\psi).$$

*Der Wert der effectiven äusseren Selbstinduction ist immer etwas kleiner als der absolute Betrag der scheinbaren äusseren Selbstinduction.*

Etwas complicirter gestaltet sich die Beziehung zwischen $Q'$ und $|Q|$. Um diese abzuleiten, schreiben wir (26)

$$(40)\quad \frac{1}{Q'}\left\{\left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 + \varkappa^2\right\} = (L_a' + L_i)\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\varkappa^2c^2}{\varepsilon\mu_a}\cdot L_a',$$

und (36)

$$(40a)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{4c^2r}{\varepsilon}\left\{\left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 + \varkappa^2\right\} &= (4\mu_a r + L_i)\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{2\pi}{\tau}\cdot R\cdot\varphi\\ &\quad + 2\varkappa^2\cdot\frac{4c^2r}{\varepsilon},\end{aligned}\right.$$

und erhalten durch Subtraction

$$\left(\frac{4c^2r}{\varepsilon} - \frac{1}{Q'}\right)\cdot\left(\left(\frac{2\pi}{\omega\tau}\right)^2 + \varkappa^2\right) = (4\mu_a r - L_a)\cdot\left(\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\varkappa^2c^2}{\varepsilon\mu_a}\right)$$
$$- \frac{2\pi}{\tau}\cdot R\cdot\varphi,$$

oder mit Rücksicht auf (39)

$$(40\,b)\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{4\,c^2 r}{\varepsilon}-\frac{1}{Q'}\right)\cdot\left(\left(\frac{2\,\pi}{\omega\,\tau}\right)^2+\varkappa^2\right) &= 4\,\mu_a r\cdot\psi\left(\left(\frac{2\,\pi}{\tau}\right)^2+\frac{2\,\varkappa^2 c^2}{\varepsilon\,\mu_a}\right)\\ &\quad -\frac{2\,\pi}{\tau}\cdot R\cdot\varphi\,.\end{aligned}\right.$$

Da

$$\frac{4\,c^2 r}{\varepsilon}=\frac{1}{|Q|},$$

so ergiebt die Division von (40b) durch (40a)

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}-\frac{1}{Q'}\right):\frac{1}{|Q|} &= \left\{4\,\mu_a r\cdot\psi\left(\left(\frac{2\,\pi}{\tau}\right)^2+\frac{2\,\varkappa^2 c^2}{\varepsilon\,\mu_a}\right)-\frac{2\,\pi}{\tau}\cdot R\cdot\varphi\right\}\\ &\quad :\left\{4\,\mu_a r\left(\left(\frac{2\,\pi}{\tau}\right)^2+\frac{2\,\varkappa^2 c^2}{\varepsilon\,\mu_a}\right)-\frac{2\,\pi}{\tau}\cdot R\cdot\varphi+L_i\cdot\left(\frac{2\,\pi}{\tau}\right)^2\right\}.\end{aligned}\right.$$

Dieses ist die (bei Berücksichtigung erster Potenzen von $\varphi$, $\psi$) genaue Gleichung. Praktisch kann man indessen in normalen Fällen $L_i$, ebenso wie $R\,.\,\tau/2\,\pi$ gegen $4\,\mu_a r=|L_a|$ streichen, und erhält dann

$$(42)\qquad \frac{1}{Q'}=\frac{1}{|Q|}(1-\psi)=\frac{4\,c^2 r}{\varepsilon}(1-\psi).$$

*Die reciproke effective Capacität ist immer etwas kleiner als der reciproke absolute Betrag der scheinbaren Capacität.*

Bei Hertz'schen Schwingungen ist die Stromconcentration in der Regel so stark, dass man mit den Rayleigh'schen Werten (1b) von Widerstand und innerer Selbstinduction zu rechnen hat. Dann ergiebt (38a) $\psi=\varphi$, und demnach (39) und (42)

$$(43)\qquad L_a'=L_a(1-\varphi),$$

$$(44)\qquad \frac{1}{Q'}=\frac{1}{|Q|}(1-\varphi).$$

*Kennt man die complexen Werte der scheinbaren äusseren Selbstinduction und Capacität, so kann man mit Hülfe der Gleichungen (43), (44) sofort die effective äussere Selbstinduction und die effective Capacität berechnen.*

Wir sind nunmehr im stande, die Tabelle des § 1 durch folgende Tabelle zu ergänzen:

| $2d$ | $4r = \lvert L_a \rvert$ | $L_a'$ |
|---|---|---|
| 40 | 30,33 | 30,3 |
| 400 | 37,60 | 36,6 |
| 1200 | 38,26 | 36,7 |
| $\infty$ | 38,24 | 36,6 |

Die zweite Columne giebt den absoluten Betrag der scheinbaren äusseren Selbstinduction, die dritte die effective Selbstinduction für den betreffenden Abstand ($2d$) der Drähte an. Die Zahlen der dritten Columne mit $\overline{C^2}/2$ multiplicirt, ergeben, unserer Definition gemäss, die magnetische Energie des Drahtäusseren pro Längeneinheit der Leitung. Man sieht, dass die Energie nicht sehr stark mit der Entfernung der Drähte variirt. Insbesondere ist die Energie bereits von einer Entfernung von 4 m an merklich mit derjenigen zweier Einzeldrähte vom gleichen Material identisch, die so weit voneinander entfernt sind, dass sie sich nicht mehr beeinflussen, und dass die Energien ihrer Felder sich einfach superponiren; für das Feld jedes dieser Einzeldrähte würde sich die mittlere magnetische Energie pro Längeneinheit zu $18{,}3 \cdot \overline{C^2}/2$ berechnen. Entsprechendes gilt für die elektrische Energie. *Wie aus (43), (44) folgt, ergeben sich elektrische bez. magnetische Energie im Verhältnis $(1 - \varphi) : 1$ kleiner als die zeitlichen Mittelwerte der Producte von Ladung und Spannung* ($\overline{e^2}/2\,|Q|$) *bez. von Strom und Gesamtinduction* ($|L_a|/2 \cdot \overline{C^2}$).

Göttingen, Juli 1901.

(Eingegangen 11. Juli 1901.)

## 2. *Untersuchungen über Platinwiderstände und Petroläthertherthermometer; von L. Holborn.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Nachdem für die Reichsanstalt ein Linde'scher Apparat für Luftverflüssigung angeschafft war, ist die Untersuchung von Petroläthertherthermometern wieder aufgenommen, die von Hrn. Kohlrausch bei Gelegenheit von Versuchen im Linde'schen Laboratorium zu München angegeben wurden.[1]) Da ich Platinwiderstände, die an das Wasserstoffthermometer angeschlossen waren, als Normalthermometer benutzte, so bot sich auch die Gelegenheit, die früher von W. Wien und mir ausgeführte elektrische Messung tiefer Temperaturen[2]) fortzusetzen.

An der Untersuchung beteiligte sich bis zu seinem Abgang von der Reichsanstalt Herr Day; später nacheinander die Herren Dittenberger und Grüneisen.

### 1. Vergleichung von Platinwiderständen mit dem Wasserstoffthermometer.

Es sind im ganzen drei verschiedene Platindrähte zu Widerständen benutzt worden. Der erste Draht (Widerstand Nr. 0) von 0,1 mm Stärke, von Heräus (Hanau) bezogen, war bifilar auf ein Glimmerkreuz (60 mm lang) gewickelt, das sich am Boden eines dünnwandigen Glasrohres (250 mm lang und 16 mm weit) befand. Die Zuleitungen bestanden aus 0,5 mm dicken Kupferdrähten, die mit Zinn an die Platinenden gelötet waren und ausserhalb des Glasrohres kupferne Klemmen trugen.

Die beiden folgenden Widerstände (Nr. 1 und 2) waren fertig gewickelt von der Cambridge Scientific Instrument Company bezogen. Die Zuführungen aus Platin waren ohne fremdes

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **60.** p. 1. 1897.
2) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. **59.** p. 213. 1896.

Lot mit den Widerstandsdrähten verschmolzen. Als Schutz dienten 7 mm weite Porzellanrohre.

Die Widerstände Nr. 3, 4 und 5, die später angefertigt wurden, sind aus einer dritten Drahtsorte (von Heräus) hergestellt. Sie wurden in ähnlicher Weise montirt wie die englischen Widerstände, nur wählte man das Glimmerkreuz breiter und die Dicke der Platinzuleitungen geringer. Die Widerstandsdrähte von Nr. 4 und 5 waren 0,2 mm, der von Nr. 3 0,15 mm dick. Sie wurden vor dem Wickeln elektrisch ausgeglüht und nachher mehrere Stunden lang auf 500° erhitzt. Die Schutzröhren bestanden aus Jenaer Glas $59^{III}$.

Um die Platinwiderstände zu messen, schaltete man sie mit einem Normalwiderstand aus Manganin in denselben Stromkreis und verglich die Spannung mittels eines Compensationsapparates. Zu diesem Zweck besassen die Platinwiderstände an jedem Ende zwei Zuführungen, von denen das eine Paar den Strom zuleitete, während das andere zur Abnahme des Potentials diente. Der Strom des Hauptkreises, dessen Stärke gewöhnlich nicht über 0,002 Amp. betrug, wurde bei jeder Messung commutirt.

Der kleinste der benutzten Platinwiderstände, der 2,5 Ohm bei 0° betrug, erleidet unter diesen Verhältnissen eine Spannungsänderung von 1 MV, wenn sich die Temperatur um 0,05° ändert. Eine solche Grösse ist bei der gewählten Anordnung noch genau mit einem Siemens'schen Galvanometer nach d'Arsonval zu messen. Für die folgenden Beobachtungen ist meistens ein empfindlicheres astatisches Galvanometer benutzt worden.

Als Gasthermometer mit constantem Volumen diente das früher beschriebene Instrument[1]), das für den vorliegenden Zweck mit einem Gefäss aus Jenaer Glas $59^{III}$ (Inhalt 156,8 ccm) versehen wurde. Das Verhältnis des Gefässes zum schädlichen Raum betrug 0,00602. Als Messgas diente elektrolytisch erzeugter Wasserstoff, dessen Druck der internationalen Normalscala entsprechend etwa 1 m Quecksilber bei 0° betrug, und zwar bei zwei verschiedenen Füllungen 986,3 und

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 820. 1899.

994,2 mm. Der Ausdehnungscoefficient des Gases wurde zu 0,003 665 bestimmt.

Direct mit dem Wasserstoffthermometer verglichen wurden nur die Widerstände Nr. 0, 1 und 2. Die Widerstände Nr. 3, 4 und 5 sind später indirect mit Hülfe der drei ersten Platinthermometer auf die Wasserstoffscala bezogen.

Als Temperaturbad diente einmal flüssige Luft, die sich in einem Glascylinder mit evacuirter Wandung von 25 cm Höhe und 8 cm Weite befand, während dasselbe Gefäss zur Herstellung des zweiten Temperaturbades mit einem Gemisch von Alkohol und fester Kohlensäure angefüllt wurde.

Wurde die flüssige Luft sogleich benutzt, nachdem sie aus dem Linde'schen Apparat kam, so lag ihre Temperatur unter $-191^{\circ}$; unter diesen Umständen wurde bis zu $-191{,}7^{\circ}$ gemessen. Die Temperatur steigt nur langsam an, wenn die flüssige Luft in versilberten Flaschen mit gut evacuirter Wandung aufbewahrt wird; sie erreicht dann am dritten Tag ungefähr $-187$ bis $-188^{\circ}$. Einmal wurde in flüssiger Luft, von der nach sechstägigem Stehen etwa noch $^1/_4$ Liter vorhanden war, eine Temperatur von $-182{,}7^{\circ}$ gemessen, die dem Siedepunkt des reinen Sauerstoffs entspricht. Aber hier war die Verdampfung durch mehrfaches Umgiessen bei dem vorhergehenden Gebrauch sehr befördert worden.

In dem Beobachtungsgefäss, das wegen der Ablesung der einzutauchenden Petroläthermometer nicht versilbert war, fand die Verdampfung schneller statt. Man konnte hier die Temperatur leicht um $^1/_2{}^{\circ}$ ändern, indem man den Inhalt des Gefässes teilweise verdampfen liess oder frische Flüssigkeit aus dem versilberten Aufbewahrungsgefäss zugoss.

Das zweite Temperaturbad, zu dem Schnee von käuflicher Kohlensäure und stets frischer absoluter Alkohol genommen wurde, zeigte sich bei Verwendung des Dewar'schen Gefässes sehr constant, wenn Kohlensäureschnee stets hinreichend nachgefüllt wurde. Auch die Unterschiede der an verschiedenen Tagen angesetzten Bäder betrugen nur einige Hundertstel Grad, wenn man die Abhängigkeit vom Barometerstande berücksichtigt.

Die folgende Zusammenstellung enthält die Temperaturen $t$, die bei dem Barometerstande $B$ (auf $0^{\circ}$ reducirt) mit dem

Wasserstoffthermometer beobachtet wurden; $t_n$ sind die auf normalen Druck umgerechneten Werte, deren Mittel $-78{,}34^0$ beträgt. Am zweiten Beobachtungstage wurde das Gefäss des Thermometers zuerst in trockenen Schnee eingeführt, der eine um $0{,}10^0$ tiefere Temperatur als das Gemisch mit Alkohol ergab. Bei den Thermometer-Vergleichungen ist stets der grösseren Genauigkeit halber das Gemisch aus Alkohol und Schnee verwendet worden. Dabei blieb das Gefäss oben offen, sodass nach Bedarf Kohlensäure nachgefüllt werden konnte.

| 1899 | $t$ | $B$ | $t_n$ |
|---|---|---|---|
| 2. November | $-78{,}33^0$ | 759,2 mm | $-78{,}31^0$ |
| 4. „ | $-78{,}44$ | 756,2 | $-78{,}36$ |
| 14. December | $-78{,}60$ | 747,4 | $-78{,}35$ |
| 23. „ | $-78{,}20$ | 767,0 | $-78{,}34$ |

Tab. 1 enthält die Vergleichungen der Platinthermometer Nr. 0, 1 und 2 mit dem Wasserstoffthermometer. $W$ bedeutet den beobachteten Wert der Widerstände, und zwar gilt hierbei der Vergleichswiderstand aus Manganin von 4,987 Ohm als Einheit. $t$ bezeichnet die mit dem Wasserstoffthermometer bestimmte Temperatur. Am Fusse der Tabelle sind die Werte der Widerstände für 0 und $100^0$, sowie die mittleren Temperaturcoefficienten zwischen diesen Grenzen angegeben. Nach den Formeln

$$(0) \qquad W = W_0(1 + 0{,}003824\,t - 0{,}000000862\,t^2),$$

$$(1) \qquad W = W_0(1 + 0{,}003890\,t - 0{,}000001013\,t^2),$$

$$(2) \qquad W = W_0(1 + 0{,}003889\,t - 0{,}000001003\,t^2)$$

sind rückwärts Zahlen für $t$ berechnet. Ihre Differenzen gegen die beobachteten Werte von $t$ lassen die Grösse der Beobachtungsfehler bei der Temperatur der flüssigen Luft erkennen.

In Tab. 2 gebe ich in ähnlicher Anordnung die Daten für die Widerstände Nr. 3, 4 und 5. Die Werte von $t$ sind hier aus der Vergleichung mit den Platinthermometern Nr. 1 und 2 gewonnen, und zwar wurde am ersten Beobachtungstage Nr. 1, an den beiden anderen Nr. 2 für die Vergleichung benutzt. Aus den beobachteten Werten von $W$ sind rück-

| 1899 | Nr. 0 | | | Nr. 1 | | | Nr. 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $W$ | $t$ | $t$ beob.-ber. | $W$ | $t$ | $t$ beob.-ber. | $W$ | $t$ | $t$ beob.-ber. |
| 20. Decbr. | 1,0642 | − 189,20° | + 0,01° | 0,11520 | − 190,90° | − 0,02° | 0,23416 | − 190,15° | + 0,05° |
| | 1,0709 | − 188,85 | 0,00 | 0,11568 | − 190,68 | − 0,01 | 0,23587 | − 189,75 | + 0,07 |
| | 1,0780 | − 188,49 | − 0,04 | — | — | — | — | — | — |
| 22. „ | 1,0584 | − 189,56 | − 0,02 | 0,11664 | − 190,24 | 0,00 | 0,23274 | − 190,63 | − 0,11 |
| | 1,0721 | − 188,72 | + 0,05 | 0,11765 | − 189,78 | + 0,01 | 0,23353 | − 190,38 | + 0,03 |
| | 3,0147 | − 78,18 | 0,00 | 0,36034 | − 78,19 | − 0,01 | 0,72083 | − 78,26 | − 0,02 |
| | 3,0145 | − 78,19 | 0,00 | 0,36029 | − 78,18 | + 0,02 | 0,72083 | − 78,21 | + 0,03 |
| $W_0$ | 4,3330 | — | — | 0,52250 | — | — | 1,04539 | — | — |
| $W_{100}$ | 5,9761 | — | — | 0,72426 | — | — | 1,44876 | — | — |
| $\alpha$ | 0,003792 | — | — | 0,003364 | — | — | 0,003859 | — | — |

Tabelle 2.

| 1901 | Nr. 3 | | | Nr. 4 | | | Nr. 5 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $W$ | $t$ | $t$ beob.-ber. | $W$ | $t$ | $t$ beob.-ber. | $W$ | $t$ | $t$ beob.-ber. |
| 12. Jan. | 0,45576 | − 186,71° | 0,00° | 0,26144 | − 187,16° | + 0,02° | 0,26357 | − 187,58° | + 0,05° |
| 15. „ | 0,41882 | − 191,04 | − 0,01 | 0,24323 | − 190,89 | − 0,01 | 0,24816 | − 190,71 | 0,00 |
| 13. Febr. | 1,3519 | − 78,41 | − 0,01 | 0,78180 | − 78,60 | − 0,01 | 0,79586 | − 78,33 | + 0,07 |
| $W_0$ | 1,9722 | — | — | 1,14178 | — | — | 1,16113 | — | — |
| $W_{100}$ | 2,7431 | — | — | 1,58796 | — | — | 1,61509 | — | — |
| $\alpha$ | 0,003909 | — | — | 0,003908 | — | — | 0,003910 | — | — |

wärts die Temperaturen für alle drei Widerstände nach der Formel

(3, 4, 5) $$W = W_0(1 + 003934\,t - 0{,}000000988\,t^2)$$

berechnet. Innerhalb der Beobachtungsgrenze gilt dieselbe Formel für die aus demselben Draht hergestellten Thermometer.

Was die Haltbarkeit der Widerstände anbetrifft, so sind nie merkliche Aenderungen beobachtet, mit Ausnahme von Widerstand Nr. 1, der später bei 0° den Wert 0,52239 hatte, also um etwa $^1/_{5000}$ abgenommen hatte.

**2. Vergleichung des Stickstoffthermometers mit dem Wasserstoffthermometer.**

Bei der früheren mit W. Wien ausgeführten Messung tiefer Temperaturen war der Unterschied zwischen dem Luft- und dem Wasserstoffthermometer bei der Temperatur der flüssigen Luft gemessen worden.[1]) Es hatte sich ergeben, dass das erstere um 0,65° tiefer zeigt, wenn der Druck bei 0° ungefähr eine Atmosphäre beträgt.

Diese Vergleichung ist mit dem genaueren Luftthermometer wiederholt, das mir jetzt zur Verfügung stand. Dabei sind die Bedingungen etwas abgeändert: statt Luft wurde Stickstoff und als Anfangsdruck der Druck der Normalscala von 1 m Quecksilber gewählt. Im übrigen ist die Bestimmung in derselben Weise wie früher durchgeführt, d. h. es wurden die auf die Wasserstoffscala bezogenen Platinwiderstände mit dem Stickstoffthermometer in flüssiger Luft verglichen.

Bei dem Versuch, der im Januar 1900 mit den Widerständen Nr. 0, 1 und 2 angestellt wurde, betrug der Druck des Stickstoffthermometers 1002,8 mm bei 0°; für den Ausdehnungscoefficienten der aus Ammoniumnitrit bereiteten Gasfüllung ergab sich der Wert 0,003677.

Tab. 3 enthält die Ergebnisse, nach denen das Stickstoffthermometer bei − 190° um 0,50° ± 0,06° tiefer zeigt als das Wasserstoffthermometer.

---

1) L. Holborn u. W. Wien, l. c. p. 227.

Tabelle 3.

| $W$ | $t_H$ ber. | $t_N$ beob. | $t_H - t_N$ |
|---|---|---|---|
| Nr. 0 | | | |
| 1,0513 | − 189,93° | − 190,43° | 0,50° |
| 1,0669 | − 189,07 | − 189,70 | 0,63 |
| Nr. 1 | | | |
| 0,11490 | − 191,02 | − 191,51 | 0,49 |
| 0,11530 | − 190,84 | − 191,31 | 0,47 |
| 0,11615 | − 190,46 | − 190,92 | 0,46 |
| Nr. 2 | | | |
| 0,23335 | − 190,38 | − 190,83 | 0,45 |
| 0,23568 | − 189,85 | − 190,36 | 0,51 |

**3. Vergleichung von Platinthermometern mit dem Stickstoffthermometer bei höherer Temperatur.**

Extrapolirt man die oben angegebenen Formeln für die Platinwiderstände, die durch die Messungen bei 0°, −78° und −190° bestimmt sind, über 0° hinaus nach oben, so weichen sie von den beobachteten Werten ab. Bei +100° beträgt der Unterschied schon über 2°. Nun ist von Callendar zuerst bewiesen, dass die Aenderung des Platinwiderstandes mit der Temperatur von 0° bis über 500° durch eine parabolische Gleichung mit grosser Annäherung ausgedrückt werden kann. Um zu prüfen, bis zu welchem Grade diese Darstellung bei tiefen Temperaturen mit der Beobachtung übereinstimmt, habe ich zwei Platinthermometer (Nr. 1 und 4) zwischen 300 und 500° an mehreren Punkten mit dem Stickstoffthermometer verglichen. Es wurde diese Vergleichung dem Callendar'schen Verfahren vorgezogen, nach dem die Coefficienten der Gleichung zweiten Grades durch die Beobachtung bei 0°, 100° und dem Siedepunkt des Schwefels (445°) bestimmt werden, weil die Angaben verschiedener Beobachter für den letzten Punkt noch um 0,7° schwanken.

Das Gefäss des Gasthermometers wurde mit Stickstoff gefüllt, dessen Druck 473,23 mm bei 0° betrug. Der Ausdehnungscoefficient des Gases wurde zu $0{,}003667_8$ bestimmt, während für die Ausdehnung des Gefässes in höherer Tem-

peratur die anderweitig mitgeteilten Ergebnisse für Jenaer Glas $59^{III}$ benutzt wurden.[1])

Als Temperaturbad diente der elektrisch geheizte Salpeterkessel, der früher schon ähnlichen Zwecken gedient hat.[2])

Die Beobachtungen an zwei Tagen sind in Tabelle 4 u. 5 zusammengestellt.

Tabelle 4.

Nr. 1. $t - t_P = 1{,}515 \left\{\left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100}\right\}$.

| 1901 | $t$ beob. | $W$ | $t_P$ | $t$ ber. | $t$ beob.-ber. |
|---|---|---|---|---|---|
| 10. April | 412,23° | 1,3148 | 392,52° | 412,06° | + 0,17° |
| | 412,56 | 1,3157 | 393,00 | 412,54 | + 0,02 |
| | 481,12 | 1,4370 | 453,05 | 481,24 | − 0,12 |
| 11. „ | 299,13 | 1,1077 | 289,93 | 298,96 | + 0,17 |
| | 298,45 | $1{,}1063_5$ | 289,29 | 298,26 | + 0,19 |
| | 347,94 | 1,1984 | 334,86 | 347,93 | + 0,01 |
| | 471,86 | 1,4215 | 445,38 | 471,96 | − 0,10 |
| | 472,93 | 1,4235 | 446,37 | 473,09 | − 0,16 |
| | − 78,18° | 0,36032 | − 80,28° | − 78,17° | − 0,01° |
| | − 190,40 | 0,11629 | − 201,17 | − 192,79 | + 2,39 |

Tabelle 5.

Nr. 4. $t - t_P = 1{,}489 \left\{\left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100}\right\}$.

| 1901 | $t$ beob. | $W$ | $t_P$ | $t$ ber. | $t$ beob.-ber. |
|---|---|---|---|---|---|
| 10. April | 412,34° | 2,8963 | 393,23° | 412,41° | − 0,07° |
| | 412,74 | 2,8979 | 393,57 | 412,79 | − 0,05 |
| | 480,83 | 3,1651 | 453,47 | 480,71 | + 0,12 |
| 11. „ | 298,79 | 2,4354 | 289,93 | 298,77 | + 0,02 |
| | 298,45 | 2,4338 | 289,57 | 298,39 | + 0,06 |
| | 346,29 | 2,6301 | 333,56 | 346,26 | + 0,03 |
| | 348,48 | 2,6391 | 335,58 | 348,48 | 0,00 |
| | 472,23 | 3,1322 | 446,10 | 472,30 | − 0,07 |
| | 472,55 | 3,1324 | 446,14 | 472,32 | + 0,23 |
| | − 78,60° | 0,78180 | − 80,68° | − 78,59° | − 0,01° |
| | − 190,94 | 0,24323 | − 201,40 | − 193,13 | + 2,19 |

1) L. Holborn u. E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **6.** p. 136. 1901.
2) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. **2.** p. 517. 1900.

Es bedeutet hier $t$ die mit dem Stickstoffthermometer gemessene Temperatur und $W$ den beobachteten Wert des Widerstandes. Aus $W$ ist zunächst die Platintemperatur $t_P$ berechnet, die nach Callendar durch die Gleichung

$$t_P = 100 \frac{W - W_0}{W_{100} - W_0}$$

definirt ist. Unter der Voraussetzung, dass der Platinwiderstand nach einer Parabel verläuft, hängt die Platinscala $t_P$ mit der Stickstoffscala $t$ durch eine Beziehung von der Form

$$t - t_P = \delta \left\{ \left( \frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right\}$$

zusammen. Nachdem passende Werte für die Constante $\delta$ aus den Beobachtungen der beiden Widerstände ermittelt waren, ist hiernach $t$ aus $t_P$ berechnet und mit den am Gasthermometer beobachteten Werten von $t$ verglichen. Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung zeigen keinen systematischen Gang, ihr mittlerer Wert beträgt 0,14 bez. 0,11°.

Die Platinwiderstände, welche Chappuis und Harker[1]) mit dem Stickstoffthermometer bis 580° verglichen haben, stammen aus derselben Bezugsquelle wie der Widerstand Nr. 1. Aus den Angaben, welche jene Beobachter für ihren Widerstand $K_8$ für 0 und 100° machen, folgt, dass der Temperaturcoefficient $\alpha$ für $K_8$ und Nr. 1 fast identisch ist (0,0038640 und 0,0038644). Darf man hieraus schliessen, dass dasselbe Platin für beide Thermometer verwendet worden ist, so ergiebt sich, dass die von Chappuis und Harker aufgestellte Stickstoffscala bei 445° um etwa 0,45° höher liegt als die vorliegende. Denn jene Forscher fanden für $\delta$ den Wert 1,538, während ich diese Grösse zu 1,515 bestimmt habe. Dieser Unterschied wird wahrscheinlich dadurch erklärt, dass Chappuis und Harker die Ausdehnung des von ihnen benutzten Gasthermometergefässes nur unter 100° gemessen und durch Extrapolation auf höhere Temperatur einen zu grossen Wert für den Ausdehnungscoefficienten erhalten

1) P. Chappuis u. J. A. Harker, Trav. et Mém. du Bureau internat. 12. p. 1. 1900.

haben.[1]) Nach der von Callendar aufgestellten Thermometerscala, die sich auf ein Gasthermometer mit constantem Druck bezieht, ist für dasselbe Platin $\delta = 1{,}50$, d. h. diese Scala liegt bei 445° um 0,7° tiefer als die von Chappuis und Harker.

Für den Widerstand Nr. 4 ergab sich $\delta = 1{,}489$. Dieser kleinere Wert entspricht dem grösseren Wert von $\alpha$ (Tabelle 2), da im allgemeinen mit der Zunahme von $\alpha$ eine Abnahme von $\delta$ beobachtet wird. Beurteilt man die Reinheit des Platins nach dem Temperaturcoefficienten $\alpha$, so ist ein so reines Platin, wie das der Widerstände Nr. 3, 4 und 5 meines Wissens bisher noch nicht beobachtet. Dabei ist hervorzuheben, dass der Widerstandsdraht stark ausgeglüht war.

Schreibt man die Gleichungen, welche für die Widerstände Nr. 1 und 4 zwischen 0 und 500° gelten, in der gewöhnlichen Form, so erhält man

(1a) $W = W_0(1 + 0{,}003923\,t - 0{,}000000585\,t^2)$,

(4a) $W = W_0(1 + 0{,}003966\,t - 0{,}000000582\,t^2)$.

Es ist $W = 0$ für

$t = -247{,}7°$ nach (0);

$t = -241{,}6°$ nach (1); $t = -245{,}9°$ nach (1a);

$t = -239{,}8°$ nach (4); $t = -253{,}5°$ nach (4a).

Für das Platinthermometer $K_8$ von Chappuis und Harker gilt die Formel

($K_8$) $W = W_0(1 + 0{,}003922\,t - 0{,}000000585\,t^2)$,

wenn man $\delta = 1{,}515$ setzt. Es ist hier wie bei Nr. 1 $W = 0$ für $t = -245{,}9°$.[2])

Die Widerstände erreichen nach den beiden Arten von Formeln (1) und (4), sowie (1a) und (4a) schon lange vor dem absoluten Nullpunkt den Wert Null. Die Parabel, die für

---

1) Vgl. auch L. Holborn u. E. Grüneisen, l. c.

2) In der Scala von Chappuis und Harker lautet die Gleichung

($K_8'$) $W = W_0(1 + 0{,}0039235\,t - 0{,}0000005944\,t^2)$.

Es ist $W = 0$ für $t = -247{,}1°$. Vgl. hierüber auch den Rapport von Chappuis, wo jedoch für den letzten Wert irrtümlicherweise $-265{,}56°$ angegeben ist.

höhere Temperaturen aufgestellt ist, stimmt noch mit der Beobachtung bei $-78^0$ (Tabelle 4 u. 5) überein, weicht aber bei $-190^0$ um mehr als $2^0$ ab. Vielleicht beginnt diese Abweichung erst unter $-100^0$, wo auch die thermoelektrische Kraft des Platins einen Umkehrpunkt hat, und es wäre alsdann erst unter $-100^0$ eine andere Formel zu benutzen. Die zuerst aufgestellten Gleichungen (1) und (4) würden hier zu gebrauchen sein; ob sie aber dieselbe Genauigkeit geben, wie die Formeln (1a) und (4a) in dem höher liegenden Bereich, kann nur die Beobachtung entscheiden. Unter $-200^0$ bieten die Platinthermometer gar keinen Anhalt für die absolute Temperaturmessung, wie aus den Versuchen von Dewar[1]) über den Siedepunkt des Wasserstoffs folgt. An diesem Punkte beträgt der Unterschied zwischen dem Platin- und dem Wasserstoffthermometer $14^0$. Zwischen 0 und $-190^0$ liegt bisher meines Wissens nur eine ausgedehnte Vergleichung eines Platinwiderstandes mit dem Wasserstoffthermometer vor, die von W. Wien und mir herrührt. Sie beweist, dass der Unterschied zwischen den beiden Thermometern (das Platinthermometer nach der durch $0^0$, $-78^0$ und $-190^0$ bestimmten Formel berechnet) in dem ganzen Intervall kleiner als $1^0$ ist.[2])

---

1) J. Dewar, Proc. of R. Institution, Januar 1899.

2) H. Dickson (Phil. Mag. (5) **44.** p. 445. 1897) hat für den untersuchten Platinwiderstand die Formel

$$(W + 293{,}28615)^2 = 119{,}49237\,(t + 976{,}8586)$$

berechnet, deren mittlere Abweichung von den beobachteten Werten $\pm 0{,}25^0$ beträgt.

Die Einwände, welche Callendar (Phil. Mag. (5) **47.** p. 191. 1899) gegen unsere Messungen wegen der veränderlichen Temperatur der Versuchsanordnung und der unsymmetrischen Form des Wasserstoffthermometer-Gefässes erhoben hat, treffen nicht zu. Die Temperatur stieg nur sehr langsam und war an einzelnen Punkten, z. B bei dem Schmelzpunkt des Aethers, trotz kräftigen Rührens eine Stunde lang innerhalb eines Grades constant. Dabei wurde die Anordnung des Thermometergefässes, in dem sich der Platinwiderstand befand, bei jeder Versuchsreihe abgeändert. Auch sind zwei Gefässe von verschiedener Form benutzt worden; das eine hatte die in Fig. 1 (L. Holborn u. W. Wien, l. c. p. 215) dargestellte Form, während sich bei dem anderen der Fortsatz zur Einführung der Platindrähte oben befand. Die Messungen mit beiden Gefässen haben keine systematischen Unterschiede gezeigt.

#### 4. Siedepunkt von Sauerstoff.

Um in tiefer Temperatur die Platinthermometer jeder Zeit ohne das Gasthermometer auf ihre Constanz prüfen zu können, wurde der Siedepunkt des Sauerstoffs bestimmt. Für diese Messung ist der Widerstand Nr. 2 benutzt worden.

Das Gas wurde aus Kaliumchlorat unter Zusatz von etwas Braunstein hergestellt. Es strömte aus dem Entwickelungsgefäss durch eine mit verdünnter Kalilauge gefüllte Waschflasche und eine mit Chlorcalcium gefüllte Röhre und wurde darauf in einem 2 cm weiten und 25 cm langen Glasrohr condensirt, das in flüssige Luft tauchte. Anfangs war noch eine Kühlschlange aus Glas in dem Bade von flüssiger Luft vorgesehen; es genügt jedoch bei nicht zu stürmischer Entwickelung ein dünnes gerades Rohr (*r*) (vgl. Figur).

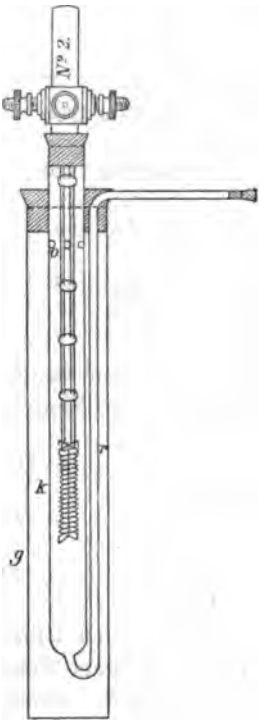



Fig. 2.
$^2/_9$ nat. Grösse.

Das Condensationsrohr (*k*) ist von einem weiteren und längeren Glascylinder (*g*) umgeben, der als Dampfmantel bei dem eigentlichen Siedeversuch dient, wenn das Ganze aus der flüssigen Luft herausgenommen ist. Alsdann taucht der Widerstand in den siedenden Sauerstoff, dessen Dämpfe durch die Löcher *o* nach unten entweichen. Das Röhrchen *r* ist dabei durch einen Kork verschlossen. Für jeden Versuch wurde so viel Kaliumchlorat in einen gläsernen Kochkolben gefüllt, dass das Condensationsrohr etwa bis zu $^3/_4$ seiner Höhe mit flüssigen Sauerstoff gefüllt werden konnte. Ein Zusatz von zu viel Braunstein ist zu vermeiden, weil sonst Chlor entsteht, das leicht mitgerissen wird und sich im festen Zustande in dem Siederohr ausscheidet.

Nachdem der flüssige Sauerstoff einige Minuten aus dem Bade von flüssiger Luft herausgezogen war, kam er in ein

ruhiges Sieden, und die Temperatur wurde besonders dann sehr constant, wenn die Flüssigkeit so weit verdampft war, dass sich der Widerstand fast vollständig in den Dämpfen befand.

Tabelle 6.

Siedepunkt von Sauerstoff.

| | $W$ Nr. 2 | $t$ | Druck (mm) |
|---|---|---|---|
| 13. Febr. 1900 | 0,26445 | − 183,40° | 751,06 |
| | 0,26602 | − 183,05 | 751,65 |
| 14. Febr. 1900 | 0,26601 | − 183,05 | 747,59 |
| | 0,26673 | − 182,94 | 747,72 |
| 12. Jan. 1901 | 0,26786 | − 182,64 | 768,86 |
| | 0,26846 | − 182,50 | 769,56 |
| 16. Jan. 1901 | 0,26842 | − 182,51 | 767,31 |
| | 0,26840 | − 182,52 | 767,76 |

Aus den Beobachtungen, die in Tabelle 6 enthalten sind, folgt für die Siedetemperatur $t$

$$-182{,}54^\circ \text{ bei } 768{,}37 \text{ mm Druck}$$

und

$$-183{,}10^\circ \text{ bei } 749{,}51 \text{ mm Druck,}$$

also

$$-182{,}79^\circ \text{ bei } 760{,}00 \text{ mm Druck.}$$

Bei allen früheren Messungen ist der Widerstand Nr. 2 stets mit dem Schutzrohr aus Porzellan verbunden gewesen, nur in den siedenden Sauerstoff ist er wegen der geringen Menge der Flüssigkeit nackt eingetaucht. Die Correction, welche deshalb an der angegebenen Siedetemperatur anzubringen ist, ergab sich in der Weise, dass der Widerstand Nr. 2 einmal mit, das andere Mal ohne Schutzrohr mit Nr. 1 in flüssiger Luft verglichen wurde. Hiernach ist der obige Wert um 0,08° zu vergrössern, sodass endgültig für den Siedepunkt

$$-182{,}7^\circ$$

folgt.

Dewar[1]) giebt — 182,5° als wahrscheinlichsten Wert an. Er erhielt mit zwei verschiedenen Wasserstoffthermometern für den Siedepunkt die Temperaturen

— 182,20 — 182,67 und — 181,20°.

### 5. Petroläthertherthermometer.

Da der Petroläther als Thermometerflüssigkeit den Nachteil hat, keine einheitliche Substanz zu sein, so wurde zuerst nach einem anderen Stoffe gesucht, der bei der Temperatur der flüssigen Luft flüssig bleibt. Doch haben diese Bestrebungen keinen Erfolg gehabt, und wir haben uns deshalb darauf beschränken müssen, aus dem käuflichen Petroläther, dessen Siedepunkt bei etwa 33° liegt, durch fractionirte Destillation eine Flüssigkeit mit niedrigerem Siedepunkt zu gewinnen, die in der flüssigen Luft weniger zähe ist.

Der zu destillirende Petroläther wurde in einem Wasserbade auf 25—30° erwärmt. Die Dämpfe gingen zunächst durch ein senkrechtes Glasrohr, das an einigen Stellen kugelförmig aufgeblasen war und Drahtnetze enthielt, über denen sich die weniger flüchtigen Bestandteile schon bei Zimmertemperatur condensirten und allmählich zurückflossen. Die übergehenden Dämpfe wurden in einer Flasche, die von einer Kältemischung von Schnee und Kochsalz umgeben war, über Phosphorpentoxyd aufgefangen.

Wenn auch das Destillat mit dem Sinken des Siedepunktes in flüssiger Luft beweglicher bleibt, so ist doch andererseits ein zu niedriger Siedepunkt nicht erwünscht, weil sich dann bei längerer Abkühlung auf — 190° flockige Niederschläge im Thermometergefäss bilden. Dies erklärt sich wohl daher, dass das niedriger siedende Destillat eine einfachere Zusammensetzung besitzt und deshalb leichter gefriert, als das Gemisch vieler Verbindungen. Unter 20° ist man deshalb mit dem Siedepunkt nicht herabgegangen.

Diese Grenze ist auch darum inne zu halten, weil mit dem Sinken des Siedepunktes die Schwierigkeit der Aufbewahrung und der Erhaltung der unveränderlichen Zusammensetzung wächst, von der die Ausdehnung und damit die Uebereinstimmung der zu verschiedenen Zeiten hergestellten Thermometer in hohem Grade

1) J. Dewar, Proc. of R. Soc. 68. 44. 1901.

abhängt. Die Aufbewahrungsflaschen waren mit Schliff und Quecksilberverschluss versehen, der eine etwa 10 cm hohe Quecksilbersäule fassen konnte, sodass erst bei einem gewissen Ueberdruck Gase aus dem Innern entweichen konnten.

Diese Vorrichtung bewährte sich gut. Am sichersten verfährt man jedoch bei der Anfertigung einer grösseren Anzahl von Thermometern, wenn man sie alle gleichzeitig mit einem Petroläther füllt, dessen Ausdehnung unmittelbar vorher bestimmt worden ist. Selbstverständlich erleichtert man sich die Arbeit sehr, wenn sie in der kühleren Jahreszeit vorgenommen wird.

Für die Messung der Ausdehnung wurde das Gefäss und die Capillare eines Thermometers mit Quecksilber ausgewogen und mit Petroläther gefüllt. Dies Probethermometer, dessen Stiel eine gleichmässige Teilung erhielt, verglich man alsdann bei $-78^\circ$ und $-190^\circ$ mit einem Platinwiderstande. Weil es zunächst hauptsächlich darauf ankam, die günstigsten Bedingungen für die tiefste Temperatur zu ermitteln, habe ich mich auf diese beiden Punkte beschränkt und die Ausdehnung durch eine Gleichung zweiten Grades dargestellt. Im Vergleich zu der Genauigkeit, welche die Thermometer überhaupt in tiefster Temperatur gewähren, ist diese Darstellung hinreichend. Für genauere Messungen bei etwas höherer Temperatur muss die Abweichung, welche diese Scala gegen das Wasserstoffthermometer etwa aufweist, besonders bestimmt werden.

Es ist mehrfach Petroläther destillirt worden. Alle Lieferungen der Ausgangsflüssigkeit stammten aus derselben Bezugsquelle (Kahlbaum, Berlin). Da sich die verschiedenen Destillate in ihrer Ausdehnung um einige Procent unterscheiden, so genügt es, hier nur die Formel für ein Destillat als Beispiel anzugeben:

$$V = V_0(1 + 0{,}001\,46\,t + 0{,}000\,001\,60\,t^2).$$

Der Petroläther mit dem Siedepunkt von $20^\circ$ hat hiernach noch eine etwas grössere und ungleichmässigere Ausdehnung als der bei $33^\circ$ siedende.[1])

Es wurden nur Stabthermometer angefertigt, die man zunächst mit Quecksilber auswog und dann ungleichmässig nach der Ausdehnungsformel in ganze Grade teilte. Die Länge

1) Vgl. F. Kohlrausch, Wied. Ann. **60**. p. 3. 1897.

eines Grades ist bei — 80° um etwa 18 Proc. und bei — 190° um etwa 43 Proc. kleiner als bei 0°. Vor dem Füllen wurden die Rohre evacuirt, damit der Petroläther möglichst wasserfrei eintritt. Denn die an der Luft gefüllten Thermometer zeigten wahrscheinlich infolge von Wassergehalt bei — 190° starke Trübungen. Ich habe deshalb auch grosse Aufmerksamkeit auf die trockene Aufbewahrung des Petroläthers verwandt und zu diesem Zweck über der Oberfläche der Flüssigkeit im Aufbewahrungsgefäss ein Röhrchen mit Phosphorpentoxyd angebracht. Eine ganz geringe Trübung der Kuppe bei —190° liess sich jedoch nicht vermeiden.[1])

Wegen des Abdestillirens von Petroläther wird die Thermometercapillare, die man 1—2 mm weit wählt, an ihrer Spitze birnenförmig erweitert. Auch empfiehlt es sich, die Gefässe bei dem endgültigen Zuschmelzen in feste Kohlensäure zu bringen, damit eine Luftsäule von grösserem Druck auf der Kuppe ruht.

Das Eintauchen der Thermometer in ein Bad von flüssiger Luft erfordert besondere Vorsicht, wenn man auf 1° sicher messen will. Es darf zunächst nur das Gefäss abgekühlt werden, damit der Petroläther in der Capillare beweglich genug bleibt und nicht zu sehr an der Wandung adhärirt. Erst wenn die Kuppe schon fast den tiefsten Stand erreicht hat, taucht man die Capillare beliebig weit ein.

Befindet sich das Thermometer längere Zeit (etwa $^1/_4{}^h$) in flüssiger Luft, deren Temperatur allmählich zu steigen beginnt, so folgt die Kuppe zwar nach, aber doch in ungleichmässiger Weise. Sie adhärirt mehr oder weniger an der Wandung, wird deshalb zunächst flacher und oft zuletzt ganz unregelmässig. Man muss alsdann das Thermometer ganz herausziehen und nachdem man sich überzeugt hat, dass der Flüssigkeitsfaden bei dem Erwärmen nicht gerissen ist, es von neuem eintauchen.

Tab. 7 enthält als Beispiel die Correctionen zweier Petrolthermometer, die an verschiedenen Tagen mit dem Wasserstoff- oder dem Platinthermometer besonders lange Zeit nach der Einführung in das Bad verglichen wurden; $\tau$ und $\tau'$ bezeichnen

1) Die untersuchten Thermometer wurden von dem Glasbläser C. Richter (Berlin) mit grosser Sorgfalt angefertigt. Zur besseren Vermeidung der Parallaxe ist jeder zehnte Teilstrich ganz um das Rohr herumgezogen.

die Angaben der Petrolthermometer, $t$ die Temperatur in der Wasserstoffscala. Die Unregelmässigkeit der Kuppe ist durch einen * ausgedrückt. Bei $-78^{\circ}$ fallen alle Schwierigkeiten wegen der Kuppenbildung fort, selbst wenn man die Petrolthermometer viel schneller abkühlt, als es z. B. ein Weingeistthermometer verträgt. Auch bei $-190^{\circ}$ bleiben die Abweichungen, einschliesslich der durch schlechte Kuppenbildung markirten Fälle, kleiner als $\pm 1^{\circ}$.

Tabelle 7.

Petroläther thermometer.

| Zeit | $t$ | Nr. 12 $\tau$ | $t-\tau$ | Nr. 14 $\tau'$ | $t-\tau'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 12. Decbr. | $6^h 40^m$ | $-191{,}7^{\circ}$ | $-190{,}1^{\circ}$ | $-1{,}6^{\circ}$ | $-193{,}1^{\circ}$ | $+1{,}4^{\circ}$ |
| | 7 10 | $-191{,}3$ | $-189{,}9$ | $-1{,}4$ | $-192{,}9^*$ | $+1{,}6$ |
| | 7 47 | $-191{,}1$ | $-189{,}7$ | $-1{,}4$ | $-192{,}9^*$ | $+1{,}8$ |
| 14. „ | 10 15 | $-190{,}2$ | $-188{,}6$ | $-1{,}6$ | $-192{,}0$ | $+1{,}8$ |
| | 10 35 | $-189{,}9$ | $-188{,}3$ | $-1{,}6$ | $-192{,}0$ | $+2{,}1$ |
| | 11 20 | $-189{,}6$ | $-188{,}3$ | $-1{,}3$ | $-191{,}9$ | $+2{,}3$ |
| | 11 55 | $-189{,}0$ | $-188{,}0^*$ | $-1{,}0$ | $-191{,}8^*$ | $+2{,}8$ |
| | 12 30 | $-188{,}4$ | $-187{,}0^*$ | $-1{,}4$ | $-189{,}9^*$ | $+1{,}5$ |
| | 1 55 | $-78{,}6$ | $-78{,}0$ | $-0{,}6$ | $-79{,}9$ | $+1{,}3$ |
| | 2 5 | $-78{,}6$ | $-78{,}0$ | $-0{,}6$ | $-79{,}9$ | $+1{,}3$ |
| | 2 30 | $-78{,}5$ | $-77{,}9$ | $-0{,}6$ | $-79{,}8$ | $+1{,}3$ |
| 20. „ | 6 30 | $-190{,}9$ | $-189{,}6$ | $-1{,}3$ | $-192{,}9$ | $+2{,}0$ |
| | 6 45 | $-190{,}7$ | $-189{,}3$ | $-1{,}4$ | $-193{,}0^*$ | $+2{,}3$ |
| | 7 3 | $-190{,}1$ | $-188{,}7$ | $-1{,}4$ | $-192{,}3^*$ | $+2{,}2$ |
| | 7 20 | $-189{,}7$ | $-188{,}2$ | $-1{,}5$ | $-192{,}1^*$ | $+2{,}4$ |
| 22. „ | 10 5 | $-190{,}6$ | $-188{,}5$ | $-2{,}1$ | $-192{,}3$ | $+1{,}7$ |
| | 10 20 | $-190{,}4$ | $-188{,}5$ | $-1{,}9$ | $-192{,}1$ | $+1{,}7$ |
| | 10 45 | $-190{,}2$ | $-188{,}1$ | $-2{,}1$ | $-192{,}0$ | $+1{,}8$ |
| | 11 45 | $-189{,}8$ | $-188{,}0^*$ | $-1{,}8$ | $-191{,}6^*$ | $+1{,}8$ |
| 23. „ | 10 35 | $-78{,}3$ | $-77{,}7$ | $-0{,}6$ | $-79{,}5$ | $+1{,}2$ |
| | 10 45 | $-78{,}2$ | $-77{,}6$ | $-0{,}6$ | $-79{,}3$ | $+1{,}1$ |
| | 10 55 | $-78{,}2$ | $-77{,}5$ | $-0{,}7$ | $-79{,}3$ | $+1{,}1$ |
| | 11 5 | $-78{,}2$ | $-77{,}4$ | $-0{,}8$ | $-79{,}3$ | $+1{,}1$ |
| | 11 20 | $-78{,}2$ | $-77{,}4$ | $-0{,}8$ | $-79{,}3$ | $+1{,}1$ |
| | 11 35 | $-78{,}2$ | $-77{,}4$ | $-0{,}8$ | $-79{,}3$ | $+1{,}1$ |

(Eingegangen 26. Juli 1901.)

## 3. *Ueber den Einfluss des Luftdruckes und der Luftfeuchtigkeit auf die Entladung statischer Elektricität aus Spitzen;* von *Franz Tamm.*

(Nach seiner Inaugural-Dissertation für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Die Aufgabe, über deren Bearbeitung ich im Folgenden kurz berichten möchte, lautete: Wie hängt die aus einer auf bestimmtes Potential geladenen Spitze in gemessener Zeit ausgestrahlte Elektricitätsmenge von der Luftfeuchtigkeit und dem Luftdruck ab.

In zwei vor kurzem erschienenen Arbeiten, welche sich mit der Bestimmung der bei Atmosphärendruck aus einer Spitze ausströmenden Elektricitätsmengen beschäftigen, ist der Versuch gemacht worden, eine Formel aufzustellen, nach welcher sich diese Elektricitätsmengen berechnen lassen. Hr. Warburg[1]) hat aus seinen Versuchen, bei denen die Spitze auf Potentiale, die zwischen $\pm 4000$ und $\pm 10000$ Volt lagen, geladen war und gegen Scheiben im Abstande von 2—7 cm strahlte, die Formel abgeleitet

$$E = c\,V(V - M),$$

worin $c$ eine von der Spitze und dem Scheibenabstand abhängige Constante, $V$ das Spitzenpotential und $M$ das Minimumpotential bedeuten.

Hr. Sieveking[2]) glaubte aus seinen Versuchen schliessen zu müssen, dass für Spitzenpotentiale, die kleiner als $\pm 5000$ Volt sind, Hrn. Warburg's Formel seine Beobachtungen nicht mehr so gut wiedergiebt, die gefundenen Elektricitätsmengen sich vielmehr besser nach der Formel

$$E = a(V - M)$$

1) E. Warburg, Wied. Ann. **67**. p. 72. 1899.
2) H. Sieveking, Inaug.-Diss. p. 72. Freiburg 1899.

berechnen lassen. Hierin hat $a$ wiederum die Bedeutung einer von Spitze und Scheibenabstand abhängigen Constante, $V$ und $M$ entsprechen $V$ und $M$ in der Formel des Hrn. Warburg.

Da die Vermutung nahe lag, dass beide Formeln nach Anbringung einer entsprechenden Correction die Ergebnisse meiner Beobachtungen bei verschiedenen Drucken innerhalb des oben angegebenen Geltungsbereiches wiedergeben könnten, glaubte ich zuerst den Geltungsbereich, welcher beiden Formeln unter denselben Bedingungen zukommt, nochmals genau feststellen zu müssen.

Zu diesem Zwecke unterwarf ich zunächst die beiden Formeln gemeinsame Grösse, das Minimumpotential, das ich der Kürze wegen im Folgenden mit $M$ bezeichnen will, einer eingehenden Untersuchung.

Auf die Bedeutung des $M$ hat zuerst Hr. Röntgen[1]) aufmerksam gemacht. Hr. Röntgen machte bei seinen Untersuchungen über die Entladung der Elektricität in Isolatoren die Beobachtung, dass die Entladung nicht bei jedem Potential stattfindet, sondern dass vielmehr zum Einleiten derselben immer ein ganz bestimmtes Potential erforderlich ist. Wenn jedoch einmal die Entladung vorhanden ist, so kann man das Potential wieder verkleinern, wodurch die Entladung stetig abnimmt und bei einem Potential, das wesentlich kleiner ist als dasjenige, bei welchen die Entladung anfing, wieder vollständig aufhört.

$M$ ist also dasjenige Potential, bei welchem die Entladung aufhört. Es ist die kleinste Spannung, bei welcher gerade noch eine Ueberstrahlung von Spitze zur Scheibe stattfindet, oder, wie Hr. Warburg[2]) sagt, das kleinste Potential, welches einen Strom unterhalten kann.

Hr. Röntgen hat $M$ in der Weise bestimmt, dass er von einem unter $M$ liegenden Potential ausgehend letzteres allmählich so lange steigerte, bis das Galvanometer durch einen plötzlichen, verhältnismässig grossen constanten Ausschlag die eingetretene Entladung anzeigte. Nachdem die Entladung eingeleitet war, verringerte er wieder das Potential so lange,

1) W. C. Röntgen, Gött. Nachr. 1878. p. 395.
2) E. Warburg, Wied. Ann. 67. p. 72. 1899.

bis die Entladung vollständig aufhörte. In diesem Augenblick erfolgte die Ablesung des *M*.

Es lag die Frage nahe, ob man für *M* den gleichen Wert erhält, wenn man von einem weit über *M* liegenden Potential abwärts gehend letzteres so lange verringert, bis die Entladung aufhört.

### I. Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung war die folgende (vgl. Fig. 1):

Eine Wimshurst'sche Elektrisirmaschine *WM* von 21 cm Scheibendurchmesser wurde durch einen Elektromotor in ent-

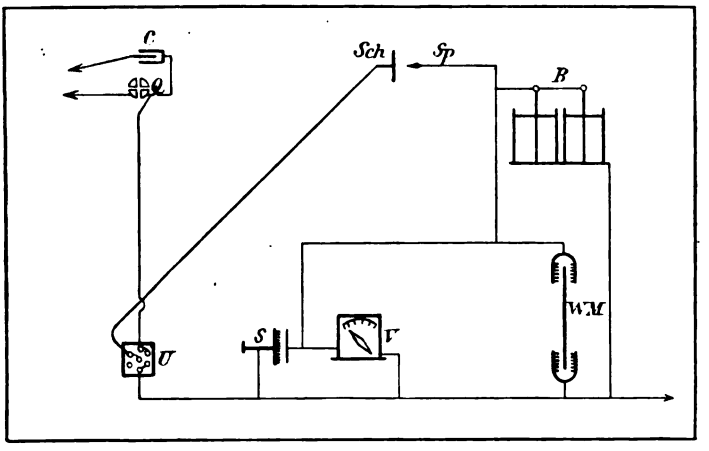



Fig. 1.

sprechend rasche Drehung versetzt. Der eine Pol der Maschine war zur Erde abgeleitet, der andere mit einer Batterie von sieben Leydener Flaschen verbunden. Die äussere Belegung derselben lag an der Erde, die innere war mit einem Siemens'schen elektrostatischen Voltmeter *V* und der strahlenden Spitze *Sp* verbunden. Der Messbereich des Voltmeters betrug 10 000 Volt. Die Spitze bestand aus einem 0,1 mm dicken, 3 mm langen Platindraht, der an einem 5 cm langen Messingstäbchen angelötet war. Der zur Strahlung dienende Teil der Spitze war nach Hrn. Warburg[1]) in der Weise her-

1) E. Warburg, Wied. Ann. 66. p. 653. 1898.

gestellt, dass der Platindraht im Bunsenbrenner zum Glühen gebracht und alsdann durchgerissen wurde. Das Messingstäbchen war mittels Siegellack an einer Schlittenverschiebung mit Mikrometerschraube befestigt und stand centrisch einer gleichfalls mittels Siegellack isolirten, polirten Messingscheibe *Sch* von 12 cm Durchmesser gegenüber. Von der Scheibe aus führte die Leitung zum Umschalter *U*.

Der Körper desselben bestand aus einem viereckigen Paraffinblock, in welchem sechs Vertiefungen zur Aufnahme von Quecksilber eingebohrt waren. Die Anordnung derselben war so getroffen, dass man die übergestrahlten Mengen zur Messeinrichtung oder zur Erde überleiten konnte. Die Zuführung vom Umschalter zur letzteren bestand behufs Herabminderung der von der Flaschenbatterie herrührenden Influenz aus einem einadrigen Bleirohrkabel, dessen Bleihülle zur Erde abgeleitet war. Die Capacität des Kabels war der eingeschalteten Condensatorcapacität gegenüber so gering, das erstere bei sämtlichen Versuchen unberücksichtigt bleiben konnte. Die Messeinrichtung bestand aus einem Elliot'schen Glimmercondensator *C* und einem Thomson'schen Quadrantelektrometer *Q*. Mit letzterem wurde das Potential gemessen, das dem Condensator von der von der Spitze zur Scheibe übergestrahlten Elektricitätsmenge erteilt wurde. Die Nadel des Elektrometers war bifilar aufgehängt. Als Dämpfung diente $H_2SO_4$, welche gleichzeitig als Zuführung der Nadelladung diente. Die Nadel wurde durch eine Batterie von 100 Zn-Cu-$MgSO_4$-Elementen geladen. Als Elektrolyt diente $^1/_{10}$ Normallösung von $MgSO_4$. Jedes Element war mit einer 1 cm hohen Vaselin-Oelschicht bedeckt. Behufs Isolation war die gesamte Batterie in einem Kasten in eine 3 cm hohe Paraffinschicht eingeschmolzen. Die elektromotorische Kraft eines Elementes wurde auf 1,02 Volt festgestellt. Um das Spitzenpotential constant zu erhalten, wurde die von der Maschine gelieferte überschüssige Elektricitätsmenge durch Saugspitzen *S*, welche kammartig einer mit der Flaschenbatterie verbundenen Scheibe gegenüberstanden und zur Erde abgeleitet waren, abgesaugt. Der Abstand zwischen den Spitzen und der Scheibe konnte beliebig verändert werden.

### II. Das Minimumpotential.

Die Bestimmung des $M$ erfolgte ohne Condensator, da man auf diese Weise die genauesten Werte erhält. Denn bei einem sehr wenig über dem $M$ liegenden Potential wird die Elektrometernadel rasch aus dem Gesichtsfeld herausgetrieben, bei einem sehr wenig unter dem $M$ liegenden Potential bleibt dieselbe in ihrer Ruhelage. Das $M$ wurde daher der Spannung gleich erachtet, bei welchem die Nadel die langsamste gleichmässige Wanderung, die sich erreichen liess, annahm.

Zunächst bestimmte ich $M$ in der von Hrn. Röntgen angegebenen Weise, also „aufwärts" und erhielt z. B. für einen Spitzenabstand von 10 cm:

$$M = -3420 \text{ bez. } +4460 \text{ Volt.}$$

Das Verfahren, auf welche Weise ich diese Werte ermittelt habe, will ich an dem Werte $-3420$ Volt erläutern.

Bei Beginn des Versuches legte ich das Potential $-3400$ Volt an die Spitze, hob die Erdverbindung auf und beobachtete die Elektrometernadel. Da dieselbe in Ruhe blieb, steigerte ich durch Rückwärtsdrehen an den Saugspitzen unter fortgesetzter Beobachtung der Elektrometernadel das Spitzenpotential so lange, bis die Nadel anfing, aus ihrer Ruhelage langsam herauszuwandern. Dies war bei $-3480$ Volt der Fall.

Kaum aber hatte die Nadelwanderung begonnen, so wurde dieselbe stetig rascher, bis die Nadel schliesslich aus dem Gesichtsfeld verschwand. Ich legte die Messeinrichtung an Erde. Alsdann verringerte ich bei ununterbrochener Strahlung der Spitze durch wiederholtes Vorwärtsdrehen an den Saugspitzen das Spitzenpotential unter Aufheben der Erdverbindung und Beobachten der Elektrometernadel so lange, bis ich bei $-3420$ Volt die langsamste gleichmässige Wanderung erhielt.

Für positive Strahlung erhielt ich die Werte $+4530$ bez. $+4460$ Volt.

Die $M$-Werte blieben, wie folgende Reihe seigt, constant, wenn die Spitze bei $-3420$ Volt ununterbrochen weiterstrahlte. Die Elektrometernadel wurde von 2 zu 2 Minuten beobachtet und nach jeder Beobachtung wieder an Erde gelegt.

| 0′ | 2′ | 4′ | 6′ | 8′ | 10′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| − 3420 | 3420 | 3420 | 3420 | 3420 | 3420 | Volt |
| + 4460 | 4460 | 4460 | 4460 | 4460 | 4460 | „ |

Bei − 3410 bez. + 4450 Volt war die Wanderung der Elektrometernadel eine stossweise, was auf eine zeitweise Unterbrechung des Stromes hindeutete; bei − 3400 bez. + 4430 Volt blieb die Nadel in ihrer Ruhelage.

Wird nach Hrn. Precht[1]) das Potential, bei dem die Entladung anfängt, mit $AP$ bezeichnet, im vorliegenden Falle $AP = -3480$ bez. + 4530 Volt, so findet man, dass der Unterschied zwischen $AP$ und $M$ für negative und positive Elektricität fast gleich gross ist. Derselbe beträgt nämlich für negative Strahlung 60, für positive 70 Volt. Im Verhältnis zu den von Hrn. Precht angegebenen Unterschieden zwischen $AP$ und $M$ ist der von mir beobachtete ein sehr geringer. Der Grund, dass die von Hrn. Precht[2]) beobachteten Unterschiede zwischen $AP$ und $M$ bedeutend grösser sind als die meinigen, ist nur in der von ihm gewählten Versuchsanordnung zu suchen.

Ich glaube noch darauf hinweisen zu müssen, dass vor Beginn der Versuche keine Ausstrahlung aus der Spitze stattgefunden hat; während derselben wurde die Spitze nicht entladen, sondern blieb stets mit der geladenen Flaschenbatterie in Verbindung.

Zur Beantwortung der Frage, ob man für $M$ denselben Wert erhält, wenn man von einem über $M$ liegenden Potential abwärts gehend letzteres so lange verringert, bis die Entladung aufhört, verfuhr ich in folgender Weise.

Zu Beginn des Versuches legte ich das Potential − 3600 Volt an die Spitze und beobachtete die Nadel unter Aufhebung der Erdverbindung. Da die Nadel sofort aus dem Gesichtsfeld verschwand, legte ich wieder an Erde, verminderte das Spitzenpotential in der schon angegebenen Weise auf − 3500 Volt und beobachtete wieder unter Aufheben der Erdverbindung. Da die Nadel noch aus dem Gesichtsfeld verschwand, er-

1) J. Precht, Wied. Ann. **49**. p. 174. 1893.

2) J. Precht, l. c. p. 174 hat zur Bestimmung von $AP$ und $M$ ein Aluminiumblattelektroskop benutzt, hat aber selbst auf die Schwierigkeit, die mit dieser Bestimmungsart verbunden ist, ausdrücklich hingewiesen.

niedrigte ich das Spitzenpotential auf $-3450$ Volt. Bei diesem Potential wanderte die Nadel noch ziemlich rasch, aber sie ging nicht mehr aus der Scale heraus. Durch wiederholtes vorsichtiges Vorwärtsdrehen an den Saugspitzen und Beobachten der Elektrometernadel erreichte ich die langsamste gleichmässige Nadelwanderung bei $-3420$ Volt.

In analoger Weise begann ich bei der Bestimmung des positiven $M$ mit $+4600$ Volt und erhielt den Wert $+4460$ Volt. Auch diese Werte ($-3420$ bez. $+4460$ Volt) blieben constant.

Durch die vorstehend beschriebenen Versuche glaube ich bewiesen zu haben, dass es auf die Grösse des $M$ ganz ohne Einfluss ist, ob man dasselbe „aufwärts" oder „abwärts" bestimmt.

Als weitere Frage trat auf, ob $M$ für alle Fälle constant bleibt. Zu dieser Frage haben mich gleich meine ersten Beobachtungen, die ich über die ausgestrahlten Elektricitätsmengen anstellte, veranlasst.

Diese Versuche, auf die ich später eingehender zurückkommen werde, stellte ich in der Weise an, dass ich zunächst das $M$ und alsdann die bei den verschiedenen Potentialen ausgestrahlen Elektricitätsmengen bestimmte. Am Schlusse der Versuchsreihe controlirte ich den zu Anfang derselben bestimmten Wert des $M$. Hierbei fand ich, dass das am Ende der Versuchsreihe bestimmte $M$ stets kleiner war als das zu Anfang bestimmte.

Ich stellte folgenden Versuch an. Zunächst bestimmte ich $M$ „abwärts" und erhielt wie früher $-3420$ bez. $+4460$ Volt. Alsdann legte ich wieder das Potential $-3600$ bez. $+4600$ Volt an die Spitze, liess dieselbe aber bei diesen Potentialen 1 Min. lang ununterbrochen strahlen und ging dann wieder rasch zu dem früheren Potential $-3420$ bez. $+4460$ Volt über. Die Nadelwanderung war eine schnellere, die $M$ hatten somit kleinere Werte angenommen. Als solche ermittelte ich $-3410$ bez. $+4450$ Volt. Diese Werte blieben constant. In entsprechender Weise stellte ich die Versuche unter Benutzung höherer Potentiale an. Wie folgende Tabelle zeigt, nahmen die $M$ bis zu einem bestimmten Spitzenpotential ($-5000$ bez. $+6000$ Volt ab, und zwar ist die Abnahme bei positiver Strahlung eine relativ grössere. Die ermittelten Werte blieben

constant. Dieselben Werte erhielt ich, auch wenn die Strahlungsdauer mehr wie 1 Minute betrug.

| $M = -3420$ Volt | | | | $M = +4460$ Volt | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3600 Volt | 1 Min., | $M = -3410$ Volt | | +4600 Volt | 1 Min., | $M = +4450$ Volt | |
| 3700 „ | 1 „ | 3400 „ | | 4700 „ | 1 „ | 4430 „ | |
| 3800 „ | 1 „ | 3390 „ | | 4800 „ | 1 „ | 4390 „ | |
| 3900 „ | 1 „ | 3380 „ | | 4900 „ | 1 „ | 4340 „ | |
| 4000 „ | 1 „ | 3360 „ | | 5000 „ | 1 „ | 4260 „ | |
| 4500 „ | 1 „ | 3340 „ | | 5500 „ | 1 „ | 4160 „ | |
| 5000 „ | 1 „ | 3300 „ | | 6000 „ | 1 „ | 4030 „ | |
| 6000 „ | 1 „ | 3300 „ | | 7000 „ | 1 „ | 4030 „ | |
| 7000 „ | 1 „ | 3300 „ | | 8000 „ | 1 „ | 4030 „ | |
| 8000 „ | 1 „ | 3300 „ | | 9000 „ | 1 „ | 4030 „ | |
| 9000 „ | 1 „ | 3300 „ | | 10000 „ | 1 „ | 4030 „ | |
| 10000 „ | 1 „ | 3300 „ | | | | | |

Hiernach möchte ich ein $M$ des Hrn. Röntgen ($Mr$) und ein durch lebhafte Strahlung vermindertes $M$ ($Mv$) unterscheiden. Dem ersteren würden die Werte $-3420$ bez. $+4460$ Volt, dem letzteren je nach der Grösse des Spitzenpotentials die Werte $-3410$ bis $-3300$ bez. $+4450$ bis $+4030$ Volt entsprechen.

Wie schon angeführt, habe ich bei sämtlichen Beobachtungen die Spitze ununterbrochen strahlen lassen. Sobald jedoch die Strahlung auch nur einige Secunden unterbrochen wurde, erhielt ich erst wieder einen Nadelausschlag bei $-3480$ bez. $+4530$ Volt. Diese Werte, welche ich von $-3300$ bez. $+4030$ Volt aufwärts gehend erhielt, entsprechen den Werten, bei welchen die Entladung anfing, es sind die $AP$-Werte von p. 264.

Ich glaube noch auf folgendes hinweisen zu müssen. Es könnte auffallend erscheinen, dass das „abwärts" bestimmte $Mr$ statt der Werte $-3420$ bez. $+4460$ Volt nicht sofort die Werte $-3410$ bez. $+4450$ Volt angenommen hat, da doch bei der $M$-Bestimmung abwärts gleich zu Beginn des Versuches auch ein Strahlen bei höherem Potential stattgefunden hat. Dieser Widerspruch ist nur ein scheinbarer. Bei der Bestimmung des $Mv$ habe ich die Spitze bei $-3600$ bez. $+4600$ Volt eine ganze Minute lang strahlen lassen, während die Strahlungsdauer bei der Abwärtsbestimmung des $Mr$ bei $-3600$ bez. $+4600$ Volt nur wenige Secunden betrug.

Bei der Abwärtsbestimmung des $Mr$ ist es erforderlich, sich rasch dem $M$-Werte zu nähern, um eine wenn auch noch so kurze Strahlungsdauer bei höherem Potential möglichst zu vermeiden. Man kann dieser Gefahr aus dem Wege gehen, wenn man nach jeder Beobachtung die Flaschenbatterie entladet, und alsdann so lange ein stets kleineres Potential wieder an die Spitze legt, bis man in die Nähe von $AP$ gekommen ist. Doch wäre dieses Verfahren sehr umständlich und zeitraubend. Ich halte daher die Bestimmung des $Mr$ nach der von Hrn. Röntgen angegebenen Weise für die sicherste und zweckmässigste Bestimmungsart.

Zur Entscheidung der Frage, ob die Abnahme des $M$ auf die Spitze oder auf die zwischen Spitze und Scheibe befindliche Luftstrecke zurückzuführen sei, wurde während einer Bestimmung des $M$ mittels eines Ventilators fortgesetzt frische Luft zwischen Spitze und Scheibe geschafft.

Bei ruhendem Ventilator erhielt ich $M = -3420$ bez. $+ 4460$ Volt. Sobald ich jedoch bei diesen Potentialen den Ventilator in Bewegung setzte, ging die Nadel in ihre Ruhelage zurück. Ausschlag erhielt ich alsdann nur bei $-3480$ bez. $+4530$ Volt. Diese Werte, welche ich sowohl „aufwärts" wie „abwärts" erhielt, blieben constant.

| 0′ | 2′ | 4′ | 6′ | 8′ | 10′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| − 3480 | 3480 | 3480 | 3480 | 3480 | 3480 | Volt |
| + 4530 | 4530 | 4530 | 4530 | 4530 | 4530 | „ |

Vorstehende Werte sind die bereits angegebenen $AP$-Werte.

Die Abnahme des $M$ ist somit nur auf Veränderungen zurückzuführen, welche die Luft zwischen Spitze und Scheibe infolge der Durchstrahlung erleidet.

Eine der Abnahme des $M$ entsprechende Zunahme der ausgestrahlten Elektricitätsmengen konnte ich nicht feststellen.[1])

### III. Prüfung der Formeln $c\,V(V - M)$ und $a(V - M)$.

Durch die vorstehend beschriebenen Versuche glaube ich gezeigt zu haben, dass $M$ abhängig ist sozusagen von der

1) Fr. Tamm, Inaug.-Diss. p. 16.

Vorgeschichte der in Frage kommenden Luftstrecke zwischen Scheibe und Spitze; dass man einen grösseren Wert für $M$ erhält, wenn der Luftraum zwischen Scheibe und Spitze vor der Bestimmung nur wenig durchstrahlt wird, und dass man einen kleineren Wert erhält, wenn man durch Anwendung eines höheren Spitzenpotentials zuerst eine längere lebhafte Strahlung hervorruft und dann rasch das $M$ bestimmt.

Welchen Wert des $M$ muss ich nun in die Formeln $cV(V-M)$ und $a(V-M)$ einsetzen, um Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu finden, und innerhalb welches Bereiches ist dies der Fall?

Nach Tabelle p. 266 gehört zwar bis zu einer bestimmten Grenze zu jedem Spitzenpotential ein besonderes $Mv$, bei den Berechnungen[1]) jedoch habe ich *zunächst* nur den Wert des $Mr$ und den kleinsten Wert des $Mv$ berücksichtigt, um zu sehen, wie gross der Unterschied zwischen Berechnung und Beobachtung überhaupt sein kann.

Die Untersuchungen nun haben ergeben, dass keine der beiden Formeln die Beobachtungen *in jeder Beziehung* mit ausreichender Genauigkeit wiederzugeben vermag, weder wenn man für $M$ den Wert des $Mr$, noch wenn man den des kleinsten $Mv$ einsetzt. Die Formel $cV(V-M)$ passt sich für negative Strahlung, wenn $M = Mr$ gesetzt wird, den Beobachtungen verhältnismässig gut an, hingegen lässt die Uebereinstimmung für positive Strahlung zu wünschen übrig. Für diese stimmt die Formel des Hrn. Sieveking für $M = Mr$ etwas besser, aber auch nicht sehr gut. Dagegen erhält man sehr gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten für negative wie positive Strahlung, wenn man jeweils in die Formel $cV(V-M)$ für $M$ das arithmetische Mittel aus $Mr$ und dem kleinsten Wert von $Mv$ einsetzt. Die Genauigkeit der Formel

$$cV\left(V - \frac{Mr + Mv}{2}\right)$$

bleibt auch für verschiedenen Spitzenabstand bestehen.[2])

---

1) Fr. Tamm, Inaug.-Diss. p. 17—21.
2) l. c. p. 22—26.

### IV. Versuche in geschlossenen Gefässen.

Zu den Untersuchungen des Abhängigkeitsverhältnisses der Spitzenentladung von der Luftfeuchtigkeit und dem Luftdruck benutzte ich zunächst eine Glasflasche von 22 cm Höhe, 14 cm lichtem Durchmesser und 5 mm Wandstärke. In derselben war unter Beibehaltung der früheren Versuchsanordnung der Strahlapparat in etwas veränderter Form eingeschlossen. Die Spitze, in der früher beschriebenen Weise hergestellt, war in eine mit Paraffin ausgegossene Glasröhre eingeschmolzen und mittels Gummiringes in den Flaschenhals eingeführt. Zwei mit Hähnen versehene Ansatzstücke dienten zur Verbindung mit einem Trockenapparat bez. mit der Luftpumpe (Wasserstrahlpumpe). Als Scheibe diente eine Hg-Schicht von 1,5 cm Höhe, in welche ein Platindraht zur Ableitung der übergestrahlten Elektricitätsmengen eintauchte. Derselbe war an dem einen Ende einer rechtwinklig gebogenen Glasröhre, welche mittels eines über dem Boden angebrachten Glasschiffes in die Flasche eingeführt war, eingeschmolzen. Die Glasröhre war mit Hg gefüllt, in welches die Zuführung zum Umschalter eintauchte. Als Füllung benutzte ich zunächst Zimmerluft. Gleich bei dem ersten Versuch stiess ich auf eine Schwierigkeit. Es zeigte sich, dass die in den gleichen Zeiten übergestrahlten Elektricitätsmengen nicht constant blieben, sondern allmählich abnahmen. Die Untersuchungen wurden bei verschiedenem Spitzenabstand vorgenommen.

Da ich mit den Versuchen in der Glasflasche kein befriedigendes Ergebnis erzielen konnte, stellte ich mir ein kesselförmiges Gefäss her; dessen Hülle während der Versuche zu Erde abgeleitet werden konnte. Das Gefäss bestand aus 0,25 cm dickem Eisenblech und hatte eine Höhe sowie einen Durchmesser von 26 cm. In der Decke war ein konischer Ansatz zur Aufnahme der Spitze, welche in der früher beschriebenen Weise hergestellt war, centrisch angebracht. Zur Abdichtung der Spitze diente ein Gummiring mit daraufgegossener Paraffinschicht. Das Paraffin wurde, nachdem der Kessel etwa bis zur Hälfte evacuirt war, in flüssigem Zustand auf den Gummiring gegossen. In zwei mehr am Rande befindlichen Ansätzen waren die Zuführungshähne aus Glas mit Siegellack eingegossen,

conaxial mit der Spitze befand sich im Boden ebenfalls ein Ansatz, in welchem ein Kupferstab, auf den eine Zinkscheibe von 13 cm Durchmesser aufgenietet war, mit Siegellack eingegossen. Die Zinkscheibe war auf der der Spitze zugekehrten Seite amalgamirt, die Rückseite und der Kupferstab waren mit einem Eisenlacküberzug versehen.

Zur vollständigen Abdichtung war der Kessel mit einem achtfachen Emaillackanstrich versehen. Nur die äussere Siegel-

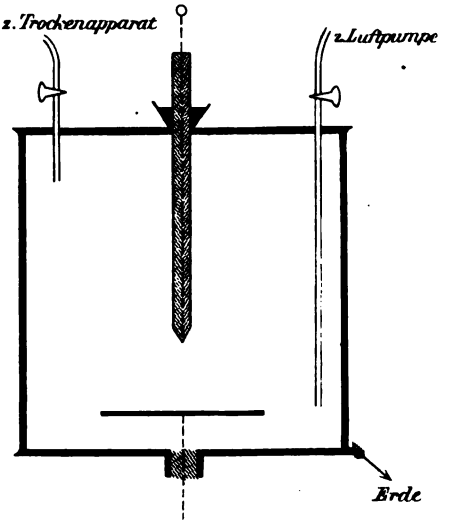



Fig. 2.

lackfläche des unteren Ansatzes trug einen Paraffinüberzug. Diese Stelle war ursprünglich ebenfalls mit Emaillack überstrichen. Der Lack aber musste wieder entfernt werden, da derselbe in flüssigem Zustande sich als Isolator, in festem dagegen als Conductor erwiesen hat. Im Inneren war der Kessel behufs Verhinderung von Oxydationen verkupfert.

Zunächst wurde der Apparat auf Constanz der in ihm übergestrahlten Mengen geprüft. Die Hülle wurde während der Versuche an Erde gelegt. Als Füllung diente sowohl feuchte wie trockene Luft. Die Versuche[1]) ergaben eine überaus gute Constanz.

1) F. Tamm, l. c. p. 32—33.

Auch war ein quantitativer Unterschied in den Elektricitätsmengen, welche in freier Luft, und denjenigen, die im Kessel überstrahlten, nicht vorhanden.

### V. Einfluss der Luftfeuchtigkeit auf die Spitzenentladung.

Aus den Kesselversuchen hatte sich ergeben, dass die ausgestrahlten Elektricitätsmengen unter den gleichen Bedingungen in trockener Luft grösser waren als in feuchter. Da dieser quantitative Unterschied nur auf die Luftfeuchtigkeit zurückgeführt werden konnte, stellte ich zur näheren Untersuchung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit auf die Spitzenentladung folgenden Versuch an.

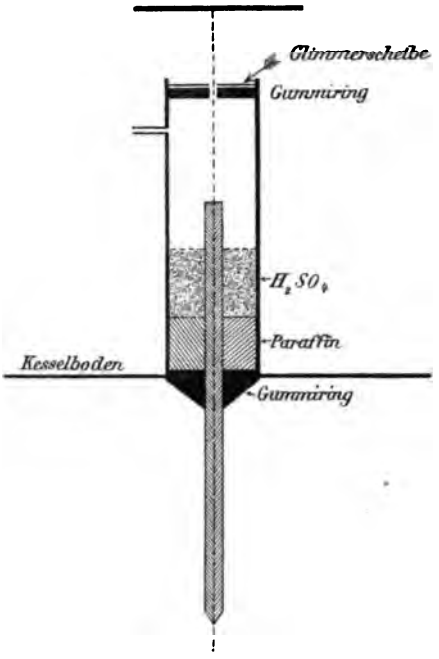


Fig. 3.

Unter Beibehaltung der früheren Versuchsanordnung benutzte ich einen Kessel aus Eisenblech von 40 cm Höhe und Durchmesser. Derselbe war in derselben Weise wie der p. 270 beschriebene eingerichtet. Nur war in der halben Höhe in der Wand ein Glasfensterchen angebracht, hinter dem ein genau gehendes Lambrecht'sches Polymeter aufgehängt war. Behufs Vermeidung von Verlusten an übergestrahlter Elektricität war die Scheibe mit einer Isolationsvorrichtung, welche im Princip der Mascart'schen[1]) ähnlich war, versehen.

---

1) G. Wiedemann, Elektricität **1.** § 8. 1893.

Ein dünner Messingstab von 30 cm Länge war in ein 20 cm langes, 2 cm weites Glasrohr so mit Paraffin eingegossen, dass noch ein freies Ende von 10 cm übrig blieb. Auf diesem war eine Zinkscheibe von 13 cm Durchmesser aufgelötet. Rückseite der Scheibe und freies Ende des Messingstabes waren mit einem Eisenlacküberzug versehen. Diese Vorrichtung war in einem 15 cm langen, 5 cm weiten Glascylinder so eingesetzt, dass zwischen Scheibe und oberem Cylinderrand ein Abstand von 3 cm verblieb. Der Glascylinder war unten mit einem Gummiring, durch den die engere Röhre herausragte, abgeschlossen und auf 3 cm mit Paraffin ausgegossen. Ueber dem Paraffin befand sich eine 4 cm hohe $H_2SO_4$-Schicht. Der obere Teil des Cylinders war ebenfalls mit einem Gummiring, welcher mit einer 1 cm weiten Bohrung für den Messingstab versehen war, abgeschlossen. Auf dem Gummiring lag noch, um ein Eindringen von Feuchtigkeit in den inneren Raum des Apparates möglichst zu vermeiden, eine Glimmerscheibe, deren Oeffnung für den Messingstab so klein war, dass der Abstand Glimmerscheibe-Messingstab nicht mehr als 1 mm betrug. Nachdem der gesamte Apparat in einen im Kesselboden angebrachten conischen Ansatz mittels Siegellack eingegossen war, wurde durch das seitliche Ansatzstück $H_2SO_4$ eingefüllt. Hierauf prüfte ich den Apparat auf seinen Isolationszustand in folgender Weise.

Zunächst füllte ich den Kessel mit Luft, welche mit $H_2SO_4$, $CaCl_2$ und $P_2O_5$ gereinigt und getrocknet wurde. Der geringste Feuchtigkeitsgehalt, den ich erreichen konnte, betrug 10 Proc. Unter Einschaltung einer Condensatorcapacität von 0,1 Mikrof. liess ich so lange Elektricität überstrahlen, bis die Elektrometernadel einen Ausschlag von 85 Sct. anzeigte. In diesem Augenblick unterbrach ich die Verbindung Batterie-Spitze, während Apparat und Elektrometer in Verbindung blieben. Der Nadelausschlag änderte sich, wie folgende Reihe zeigt, innerhalb 5 Min. nicht.

| 0′ | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 85,0 | 85,0 | 85,0 | 85,9 | 85,0 | 85,0 | Sct. |

Die Isolation der Scheibe war also eine sehr gute. Alsdann liess ich unter fortwährender Beobachtung der Elektro-

meternadel durch einen bis auf den Kesselboden reichenden Gummischlauch langsam Dampf einströmen, bis die Luft vollständig mit Wasserdampf gesättigt war. Während dieses Vorganges, der 47 Sec. dauerte, konnte ich ebensowenig wie vorher ein Zurückgehen der Nadel feststellen. Erst nach einer weiteren Minute ging, wie folgende Reihe zeigt, die Nadel allmählich zurück.

| 0′ | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 85,0 | 84,9 | 84,7 | 84,5 | 84,2 | 84,0 | Sct. |

Hiernach konnte, da jeder Strahlungsversuch nur 10 Sec. dauerte und niemals während der folgenden Versuche ein derartig starker Dampfstrom durch den Apparat geschickt wurde, die Isolation des Apparates für den gedachten Zweck für vollständig ausreichend angesehen werden.

Denselben führte ich nun in folgender Weise aus. Zunächst bestimmte ich bei 10 Proc. Feuchtigkeitsgehalt die übergestrahlte Elektricitätsmenge. Hierauf vermehrte ich langsam die Luftfeuchtigkeit, indem ich die in den Kessel eingeleitete Luft vorher durch eine mit Wasser gefüllte Waschflasche zog, bis das Polymeter einen Gehalt von 20 Proc. anzeigte und bestimmte wieder die übergestrahlte Menge.

So von 10 zu 10 Proc. weitergehend, bestimmte ich die Elektricitätsmengen bei den übrigen in der folgenden Tabelle angegebenen Feuchtigkeitsgehalten. Eine Steigerung der letzteren durch Einströmenlassen von Wasserdampf ist nicht empfehlenswert, da durch denselben eine so rasche Zunahme der Feuchtigkeit erfolgt, dass ein Beobachten in denselben Intervallen unmöglich wird. Zur Prüfung der Werte verfuhr ich in umgekehrter Weise, indem ich durch den Kessel wieder trockene Luft leitete.

So erhielt ich bei einem Spitzenpotential von $\pm 6000$ Volt, einem Scheibenabstand von 10 cm, einer Strahlungsdauer von 10 Sec. und einer Capacität von 0,5 Mikrof. (der besseren Uebersicht wegen führe ich die den Mengen entsprechenden Scalenteile an) bei:

| | | − | | Im Mittel | | | + | | Im Mittel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Proc. | — | — | 30,0 | 0 | Proc. | — | — | 21,0 |
| 10 | „ | 29,8 | 30,2 | 30,0 | 10 | „ | 20,7 | 21,1 | 20,9 |
| 20 | „ | 29,7 | 30,1 | 29,9 | 20 | „ | 20,4 | 21,0 | 20,7 |
| 30 | „ | 29,5 | 29,9 | 29,7 | 30 | „ | 19,9 | 20,9 | 20,4 |
| 40 | „ | 29,1 | 29,7 | 29,4 | 40 | „ | 19,3 | 20,7 | 20,0 |
| 50 | „ | 28,2 | 29,0 | 28,6 | 50 | „ | 18,4 | 20,4 | 19,4 |
| 60 | „ | 27,0 | 28,0 | 27,5 | 60 | „ | 17,3 | 19,7 | 18,5 |
| 70 | „ | 24,8 | 26,0 | 25,4 | 70 | „ | 15,7 | 18,5 | 17,1 |
| 80 | „ | 21,6 | 23,2 | 22,4 | 80 | „ | 13,4 | 16,6 | 15,0 |
| 90 | „ | 17,1 | 19,3 | 18,2 | 90 | „ | 9,4 | 13,0 | 11,2 |
| 100 | „ | 11,9 | 11,9 | 11,9 | 100 | „ | 5,8 | 5,8 | 5,8 |

Die Richtung der Pfeile deutet den Gang des Versuches an.

Die für einen Feuchtigkeitsgehalt von 0 Proc. angegebenen Werte sind Extrapolationswerte.

Nach vorstehender Tabelle ist der die Ausstrahlung hindernde Einfluss der Luftfeuchtigkeit bis zu 50 Proc. ein sehr geringer, während derselbe von 50 Proc. an mit der Zunahme des Feuchtigkeitsgehaltes rasch wächst.

Beobachtungen, welche die Herren Elster und Geitel[1]) vor kurzem über Elektricitätsstreuung in der Luft angestellt haben, bestätigen den die Entladung hemmenden Einfluss der Luftfeuchtigkeit.

### VI. Einfluss des Luftdruckes auf die Spitzenentladung.

Zur Bestimmung des Abhängigkeitsverhältnisses der Spitzenentladung vom Luftdruck benutzte ich unter Beibehaltung der früheren Versuchsanordnung als Untersuchungsapparat den p. 270 näher beschriebenen Kessel und als Kesselfüllung trockene Luft. Ausserdem verwendete ich bei den niederen Drucken eine Voss'sche Influenzmaschine von 60 cm Scheibendurchmesser und neben dem Elliot'schen Glimmercondensator noch einen Papiercondensator von 20 Mikrof. von Siemens und Halske. Die Bestimmung der den ausgestrahlten Mengen entsprechenden Potentiale erfolgte in zweifacher Weise.

Einmal wurde die den Mengen entsprechende Anzahl Volt bei demselben Spitzenpotential und den verschiedenen Drucken, zum anderen Mal bei demselben Druck und den verschiedenen

1) J. Elster u. H. Geitel, Ann. d. Phys. 2. p. 425. 1900.

Spitzenpotentialen bestimmt. Hierdurch war eine hinreichend genaue Controle gegeben. Bei Vergleichung sämtlicher entsprechender Werte betrug der Unterschied in keinem Fall mehr als 3 Proc.

Die Strahlungsdauer betrug 10 Sec., der Spitzenabstand 10 cm.

Die Ergebnisse der Beobachtungen lassen sich sowohl für negative wie für positive Elektricität darstellen durch die Formel:

$$e_x = e_{76}\left[\frac{76}{x} - \sqrt[3]{\frac{V}{10^5}}\log\text{nat}\left(\frac{76}{x}\right)\right]^2.$$

Hierin bedeuten $e_x$ die bei einem bestimmten Druck gesuchte Elektricitätsmenge, $e_{76}$ die bei einem Druck von 76 cm ausgestrahlte Menge, 76 den Druck bei 76 cm, $x$ den Druck bei $x$ cm, $V$ das Spitzenpotential.

Die Formel gestattet also die Elektricitätsmenge zu berechnen, welche bei einem beliebigen Drucke ausgestrahlt wird, sobald man diejenige Menge kennt, welche bei 76 cm Druck und dem gleichen Spitzenpotential ausgestrahlt wird.

Aus der Thatsache, dass die Formel für positive wie negative Elektricität gilt, folgt, dass das Verhältnis $+e_x/-e_x$ = const. für die verschiedenen Drucke bei gleichem Spitzenpotential, während ein bestimmtes Verhältnis $+e_x/-e_x$ bei verschiedenen Spitzenpotentialen und demselben Druck nicht existirt.

Negative Elektricität.

| Druck in cm | $V = -4000$ | | $V = -10000$ | |
|---|---|---|---|---|
| | Gefunden | Berechnet | Gefunden | Berechnet |
| 76 | 1,40 M.C.[1]) | 1,40 M.C. | 13,4 M.C. | 13,4 M.C. |
| 70 | 1,55 „ | 1,57 „ | 14,5 „ | 14,6 „ |
| 60 | 1,98 „ | 2,00 „ | 17,6 „ | 17,8 „ |
| 50 | 2,64 „ | 2,66 „ | 22,8 „ | 22,9 „ |
| 40 | 3,7 „ | 3,8 „ | 33,7 „ | 34,0 „ |
| 30 | 6,8 „ | 6,9 „ | 58,0 „ | 58,6 „ |
| 20 | 14,6 „ | 14,8 „ | 134,2 „ | 135,2 „ |
| 10 | 65,4 „ | 66,0 „ | — | — |

1) M.C. = Mikrocoulombs.

Diese wie die folgenden Tabellen enthalten einen Auszug aus den ausführlichen, in der Inaug.-Diss. mitgeteilten Tabellen.

Positive Elektricität.

| Druck in cm | $V = +4000$ | | $V = +10000$ | |
|---|---|---|---|---|
| | Gefunden | Berechnet | Gefunden | Berechnet |
| 76 | 0,70 M.C. | 0,70 M.C. | 9,3 M.C. | 9,3 M.C. |
| 70 | 0,77 „ | 0,78 „ | 10,1 „ | 10,2 „ |
| 60 | 0,98 „ | 1,00 „ | 12,3 „ | 12,5 „ |
| 50 | 1,30 „ | 1,33 „ | 16,0 „ | 16,0 „ |
| 40 | 1,86 „ | 1,90 „ | 23,5 „ | 23,8 „ |
| 30 | 3,3 „ | 3,4 „ | 40,4 „ | 41,0 „ |
| 20 | 7,3 „ | 7,4 „ | 93,0 „ | 93,9 „ |
| 10 | 32,6 „ | 33,0 „ | — | — |

Es war noch von Interesse, festzustellen, ob die Formel $cV(V - M)$, worin

$$M = \frac{Mr + Mv}{2}$$

ist, ihre Gültigkeit auch für die verschiedenen Drucke beibehält.

Zu diesem Zwecke bestimmte ich $M$ bei den verschiedenen Drucken in der Weise, dass ich zunächst $Mr$ feststellte, alsdann 1 Min. lang das Potential $\pm$ 7000 Volt an die Spitze legte und hierauf zu $Mv$ überging. Spitzenabstand und Kesselfüllung blieben dieselben.

Negative Elektricität.

| Druck in cm | $Mr$ | $Mv$ | $\frac{Mr + Mv}{2} = M$ |
|---|---|---|---|
| 76 | 2200 Volt | 2080 Volt | 2140 Volt |
| 70 | 2190 „ | 2080 „ | 2135 „ |
| 60 | 2160 „ | 2050 „ | 2105 „ |
| 50 | 2080 „ | 1990 „ | 2035 „ |
| 40 | 1950 „ | 1860 „ | 1905 „ |
| 30 | 1730 „ | 1650 „ | 1690 „ |
| 20 | 1390 „ | 1330 „ | 1360 „ |
| 10 | — | — | 910 „ |

Positive Elektricität.

| Druck in cm | $Mr$ | $Mv$ | $\frac{Mr+Mv}{2}=M$ |
|---|---|---|---|
| 76 | 3970 Volt | 3550 Volt | 3760 Volt |
| 70 | 3960 „ | 3550 „ | 3755 „ |
| 60 | 3900 „ | 3510 „ | 3705 „ |
| 50 | 3770 „ | 3400 „ | 3585 „ |
| 40 | 3520 „ | 3180 „ | 3350 „ |
| 30 | 3120 „ | 2820 „ | 2970 „ |
| 20 | 2510 „ | 2270 „ | 2390 „ |
| 10 | 1640 „ | 1520 „ | 1580 „ |

Vergleicht man in den beiden vorhergehenden Tabellen den Unterschied zwischen $Mr$ und $Mv$ bei den verschiedenen Drucken, so findet man, dass dieser Unterschied mit der Abnahme des Druckes kleiner wird. Diese Erscheinung hat ihren Grund wohl darin, dass mit der Abnahme des Druckes die Leitfähigkeit der Luft zunimmt.

Das Ergebnis der Beobachtungen lässt sich darstellen nach der Formel:

$$M_x = M_{76} \frac{1}{\sqrt{\frac{76}{x} - \log\text{nat}\left(\frac{76}{x}\right)}}.$$

Hierin bedeutet $M_x$ den Mittelwert aus $Mr$ und $Mv$ bei einem Druck von $x$ cm, $M_{76}$ den Mittelwert aus $Mr$ und $Mv$ bei einem Druck von 76 cm.

Die übrigen Grössen sind die gleichen wie in der anderen Formel.

Da obige Formel ebenfalls für positive wie negative Elektricität gilt, so ist

$$\frac{+M_{76}}{+M_x} = \frac{-M_{76}}{-M_x}$$

und mithin auch das Verhältnis

$$\frac{+M}{-M} = \text{const.}$$

für die verschiedenen Drucke bei gleichem Spitzenabstand, während, wie die Tabellen zeigen, $(+M_{76}) - (+M_x)$ bedeutend grösser ist als $(-M_{76}) - (-M_x)$.

| Druck in cm | $-M$ | | $+M$ | |
|---|---|---|---|---|
| | Gefunden | Berechnet | Gefunden | Berechnet |
| 76 | 2140 Volt | 2140 Volt | 3760 Volt | 3760 Volt |
| 70 | 2135 „ | 2136 „ | 3755 „ | 3753 „ |
| 60 | 2105 „ | 2108 „ | 3705 „ | 3704 „ |
| 50 | 2035 „ | 2040 „ | 3585 „ | 3583 „ |
| 40 | 1905 „ | 1907 „ | 3350 „ | 3351 „ |
| 30 | 1690 „ | 1689 „ | 2970 „ | 2967 „ |
| 20 | 1360 „ | 1362 „ | 2390 „ | 2393 „ |
| 10 | 910 „ | 906 „ | 1580 „ | 1592 „ |

Aus den angeführten Tabellen folgt, dass die Mengen bei hohen Drucken sehr langsam, bei niederen dagegen sehr rasch zunehmen, während die $M$ bei hohen Drucken langsam, bei niederen rascher abnehmen.

In den beiden folgenden Tabellen will ich noch zeigen, dass die Formel $cV(V-M)$ die bei verschiedenen Drucken ausgestrahlten Elektricitätsmengen mit genügender Annäherung wiedergiebt.

Negative Elektricität.

| Druck in cm | $V=-4000$ | | $V=-6000$ | | $V=-8000$ | | $V=-10000$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gef. | Ber. | Gef. | Ber. | Gef. | Ber. | Gef. | Ber. |
| | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. |
| 76 | 1,4 | 1,4 | 4,2 | 4,2 | 8,0 | 8,5 | 13,4 | 14,2 |
| 70 | 1,6 | 1,5 | 4,6 | 4,4 | 8,6 | 8,7 | 14,5 | 14,9 |
| 60 | 2,0 | 1,9 | 5,7 | 5,8 | 10,5 | 11,7 | 17,6 | 19,5 |
| 50 | 2,6 | 2,5 | 7,6 | 7,8 | 13,7 | 15,2 | 22,8 | 24,9 |
| 40 | 3,7 | 3,9 | 11,3 | 11,5 | 20,4 | 21,9 | 33,7 | 36,2 |
| 30 | 6,8 | 7,1 | 19,5 | 19,9 | 35,3 | 37,8 | 58,0 | 62,1 |
| 20 | 14,6 | 16,2 | 44,7 | 45,2 | 80,9 | 84,9 | 134,2 | 138,2 |

Positive Elektricität.

| Druck in cm | $V=+4000$ | | $V=+6000$ | | $V=+8000$ | | $V=+10000$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gef. | Ber. | Gef. | Ber. | Gef. | Ber. | Gef. | Ber. |
| | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. | M.C. |
| 76 | 0,7 | 0,5 | 2,1 | 2,1 | 4,8 | 5,3 | 9,3 | 10,1 |
| 70 | 0,8 | 0,6 | 2,3 | 2,3 | 5,1 | 5,8 | 10,1 | 10,7 |
| 60 | 1,0 | 0,9 | 2,8 | 2,9 | 6,3 | 7,2 | 12,3 | 13,2 |
| 50 | 1,3 | 1,2 | 3,8 | 4,0 | 8,2 | 9,5 | 16,0 | 17,3 |
| 40 | 1,9 | 1,7 | 5,6 | 5,7 | 12,3 | 13,4 | 23,5 | 23,9 |
| 30 | 3,3 | 3,0 | 9,7 | 9,9 | 21,1 | 21,9 | 40,4 | 38,4 |
| 20 | 7,3 | 6,9 | 22,4 | 23,0 | 48,0 | 49,6 | 93,0 | 90,5 |

Da die Formel $c\,V(V-M)$ ihre Gültigkeit für die verschiedenen Drucke beibehält, darf man in der Formel p. 275 für $e_{76}$ setzen $c\,V(V-M)$ und erhält dann:

$$e_x = c\,V(V-M)\left[\frac{76}{x} - \sqrt[3]{\frac{V}{10^5}}\log\text{nat}\left(\frac{76}{x}\right)\right]^2.$$

Mit dieser Formel kann man also, wenn man für ein bestimmtes Spitzenpotential die bei einem Druck von 76 cm ausgestrahlte Menge kennt, für denselben Spitzenabstand die Mengen für die verschiedenen Spitzenpotentiale bei verschiedenen Drucken berechnen.

Freiburg (Breisgau), Physik. Inst., Januar 1901.

(Eingegangen 1. Juli 1901.)

## 4. *Ueber die angebliche Anomalie des Sauerstoffs bei geringem Drucke; von M. Thiesen.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Die mehrfach bei kleinen Dichten gefundenen Abweichungen der Gase vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze bestehen schlecht vor einer eingehenden Kritik; wie namentlich Amagat hervorgehoben hat, sind diese Abweichungen meistens durch Fehler in den Druckmessungen zu erklären. Nur ein besonders merkwürdiger Fall schien mir eine nähere Prüfung zu verdienen. Bohr hatte angegeben, dass Sauerstoff bei kleinen Drucken eine sehr starke Abweichung zeige und ausserdem bei einem Druck von 0,7 mm eine Zustandsänderung erfahre, die dadurch gekennzeichnet ist, dass bei diesem Drucke eine erhebliche Volumenänderung ohne Druckänderung eintreten soll.

Diese Anomalie ist dann von mehreren anderen Beobachtern bestätigt worden, die ebenfalls auf einen Sprung in der Nähe von 0,7 mm schliessen, und Battelli konnte daher mit einigem Recht diesen Sprung als jetzt endgültig festgestellt hinstellen.

Meine eigenen Messungen führten dagegen zunächst zu dem Ergebnisse, dass ein Sprung in der von Bohr angegebenen Grösse keinesfalls vorhanden sei. Unmittelbar vor dem Bekanntgeben dieses Resultates und mir noch unbekannt hatte auch Lord Rayleigh[1]) angezeigt, dass er ein regelmässiges Verhalten des Sauerstoffs bei 0,7 mm Druck gefunden habe.

Nachträglich schienen mir aber meine Versuche doch noch nicht entscheidend zu sein. Da ich mit grossen Räumen bei verhältnismässig kleinen Oberflächen gearbeitet hatte, so lag noch die Möglichkeit vor, die von Bohr angegebenen Unregelmässigkeiten auf den Einfluss der Wände zurückzuführen, von denen sich bei 0,7 mm Druck eine Schicht flüssigen Sauerstoffs von etwa 0,000001 mm Dicke loslösen würde. Dadurch wäre

1) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **68.** p. 92. 1901. Inzwischen ausführlich veröffentlicht: London Philos. Trans. **196.** A. p. 205. 1901.

zugleich erklärt gewesen, dass aus Battelli's Versuchen ein wesentlich geringerer Wert des Sprunges folgt, während Baly und Ramsay, die mit Capillaren arbeiteten, ausserordentlich grosse Anomalien fanden. Ich glaubte sogar in den übrig bleibenden Fehlern meiner Versuche Spuren eines solchen Verhaltens zu finden.[1]) Andererseits musste ein solches bei einer hoch über der kritischen liegenden Temperatur von vornherein als unwahrscheinlich erscheinen, falls man an eine eigentliche Adsorption mit den namentlich durch Kayser festgestellten Eigenschaften und nicht an eine umkehrbare chemische Verbindung des Gases mit festen Körpern oder eine Auflösung desselben in einer die Wände bedeckenden Flüssigkeit dachte.

Die infolge dessen noch weiter mit vergrösserter Oberfläche angestellten Versuche haben aber ebenfalls eine Uebereinstimmung mit dem Boyle-Mariotte'schen Gesetze ergeben. Die Anomalie ist in der von Bohr angegebenen und mit seinen Mitteln erkennbaren Grössenordnung unter den Bedingungen meiner Versuche sicher nicht vorhanden. Es gewinnt damit an Wahrscheinlichkeit, dass sie überhaupt auf Beobachtungs- und Interpretationsfehlern beruhe, wenigstens wird man bei einer Kritik des vorhandenen Materiales diese Möglichkeit nicht ausser Acht lassen dürfen.

Ich habe in den folgenden Capiteln eine solche Kritik zu geben versucht, meine Aufgabe allerdings vielfach dadurch sehr erschwert gefunden, dass oft für die Beurteilung sehr wesentliche Punkte in den Veröffentlichungen nicht mitgeteilt werden. Hieran schliesse ich die Ergebnisse meiner eigenen Versuche an.

2. Die Annahme einer Anomalie im Verhalten des Sauerstoffs wird auch heute noch vor allem durch die Versuche von Bohr[2]) gestützt, da diese kaum eine andere Deutung zuzulassen scheinen. Bohr benutzte im wesentlichen ein Regnault'sches Differentialmanometer mit beiderseits geschlossenen Schenkeln; der eine der beiden Schenkel war

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. p. 80. 1901.

2) C. Bohr, Wied. Ann. 27. p. 459. 1886; vorher in den Mém. Ac. de Copenhagen erschienen.

calibrirt und enthielt etwas Sauerstoff; durch Aenderung des Niveaus in der passend geformten Wanne änderte man Volumen und Druck des Sauerstoffs.

Das Ergebnis seiner Versuche wird von Bohr durch die Formeln wiedergegeben:

$$(p + 0{,}109)\,v = k, \quad p > 0{,}70,$$
$$(p + 0{,}070)\,v = k_1, \quad p < 0{,}70,$$

wo $p$ den Druck in Millimetern Quecksilber, $v$ das Volumen bezeichnet. Ferner ergiebt sich aus seinen Angaben das Verhältnis der Constanten $k$ und $k_1$ zu $k_1/k = 1{,}047$ für die erste mit 18,5 mm weitem Rohr bei einer Temperatur von 14° und zu $k_1/k = 1{,}025$ für die zweite mit 32 mm weitem Rohr bei 11,5° angestellte Reihe.

Die Volumenänderung bei dem Drucke von 0,7 mm würde sich nach diesen Daten gleich 10 v. H. für die erste, gleich 8 v. H. für die zweite Reihe ergeben; diese Volumenänderung tritt ferner nach Bohr als Volumenvergrösserung sofort ein, während bei einer Volumenverkleinerung Druckschwankungen stattfinden, die aber nach 5 Stunden sicher verschwunden sind.

Bei einer Beurteilung der Versuche und Formeln Bohr's werden zwei verschiedene Abweichungen vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze scharf zu unterscheiden sein. Die eine, welche in den Formeln durch die zu $p$ hinzugefügte Constante gekennzeichnet wird, ist durch systematische Beobachtungsfehler zu erklären und wird auch, trotz der Sorgfalt, mit der Bohr solche Fehler zu vermeiden suchte, auf solche zurückgeführt werden müssen; es genügt schon die Annahme, dass sämtliche Drucke um 0,1 mm zu klein beobachtet wurden, noch besser die Annahme, dass sich dieser Fehler bei Drucken unter 0,5 mm etwas verringerte. Welche Ursache für einen solchen Fehler anzunehmen sei, ist nicht festzustellen, doch scheint es mir auffällig, dass Bohr, der andere wohl ebenso bekannte Fehlerquellen ausführlich bespricht, nichts über die Justirung seines Kathetometers erwähnt.

Nach Beseitigung der einen Abweichung durch die erwähnte Annahme bleibt noch der Sprung übrig und tritt nur um so stärker hervor, welchen das Volumen des Gases bei einem Drucke von 0,7 mm zeigte, und den man wohl als

Bohr'sche Anomalie bezeichnen kann. Das Gas hätte sich dann sowohl oberhalb als unterhalb dieses Druckes wie ein vollkommenes Gas verhalten; bei diesem Drucke wäre stets eine Aenderung des Volumens von etwa 10 v. H. eingetreten.

Diese Abweichung durch zufällige Beobachtungsfehler zu erklären, geht nicht gut an; will man sie doch auf Beobachtungsfehler zurückführen, so muss man systematische, von dem beobachteten Drucke stark abhängige und sich sprungartig ändernde Fehler annehmen.

Ob solche Fehler begangen werden konnten, hängt von der nicht mitgeteilten Art der Beobachtung ab. Wurde das Fernrohr etwa durch Neigen stets bei der Noniusablesung Null auf den einen Meniscus eingestellt, so ist die Möglichkeit solcher Fehler in den Teilungsfehlern des Nonius ohne weiteres gegeben. Man hätte dann etwa einen constanten, auf mangelhafter Justirung des ein für allemal fest aufgestellten Kathetometers beruhenden Fehler von +0,05 mm und zwischen den Grenzen −0,02 und +0,06 mm liegende Teilungsfehler des Nonius anzunehmen. Aber diese Annahme erklärt auch noch nicht die Angaben Bohr's über den trotz Volumenvergrösserung sich gleichbleibenden Druck von 0,70 mm also einen Druck, bei dem doch wohl ein Noniusstrich in genauer Coincidenz gewesen wäre. Jedenfalls wären auch heute noch genauere Angaben über die von Bohr befolgte Einstellungsmethode erwünscht.

3. Baly und Ramsay benutzten einen Apparat, welcher zwei miteinander verbundene McLeod'sche Manometer enthielt; ihre Hauptaufgabe war, die thermische Ausdehnung stark verdünnter Gase zu messen. Dabei machten sie eine sehr auffallende, die Bohr'sche Anomalie einigermaassen bestätigende Beobachtung.[1]) Als einmal der Druck des Sauerstoffs im Apparate 1,4 mm betrug, hätte ein weiterer Pumpenzug der Quecksilberluftpumpe den Druck auf etwa 0,75 mm herabbringen müssen. Thatsächlich zeigte aber jetzt das eine (von der Pumpe entferntere) Manometer einen über achtmal so grossen Druck an als das andere, und der Unterschied blieb auch bei wiederholtem Oeffnen und Schliessen der Manometer

1) E. C. C. Baly u. W. Ramsay, Phil. Mag. (5) 38. p. 323. 1894.

bestehen. Erst nach 78 Stunden gaben die Manometer denselben Druck. Aber bei dem Versuche, jetzt die Ausdehnung des Gases (durch Erwärmen des einen Manometers, Abschliessen der Manometer und Messung des von ihnen nach der Abkühlung angegebenen Druckes) zu bestimmen, trat die Störung sofort wieder ein, und man fand für die Ausdehnung einen viel zu kleinen Wert. Die gleiche Anomalie zeigte sich auch in folgenden Versuchen. Bei geringeren Drucken zeigte sich nichts derartiges.

Hier ist ohne Zweifel eine Anomalie vorhanden, entweder im Verhalten des Gases oder in den Versuchsbedingungen. Eine sehr einfache Erklärung, die durch die bei der Wichtigkeit der Beobachtung etwas dürftigen Angaben der Beobachter zwar nicht gestützt aber auch nicht widerlegt wird, würde in der Annahme liegen, dass die Verbindung zwischen den Manometern etwa durch einen Quecksilbertropfen in dem horizontalen Verbindungsrohre zeitweise ganz oder doch so weit aufgehoben war, dass die bei diesem geringen Drucke schon ziemlich grosse Zähigkeit des Gases einen raschen Ausgleich verhinderte. Man müsste dann ferner voraussetzen, dass das entferntere Manometer den Druck 1,4 mm angab, und dass das Verhältnis der Räume ein solches war, dass das der Pumpe näher liegende Manometer durch einen Pumpenzug auf $^1/_8$ evacuirt werden konnte, oder, was wohl wahrscheinlicher ist, dass das entferntere Manometer einen höheren Druck als 1,4 mm angab, aber bei den vorausgehenden Pumpenzügen nicht abgelesen worden war.[1])

Gegen diese Erklärung würde allerdings die Unwahrscheinlichkeit sprechen, dass die Beobachter, da sich die Erscheinung wiederholt zeigte, nicht auf ihre Ursache aufmerksam geworden sein sollten.

Aber auch wenn die Erscheinung thatsächlich stattfand, so bestätigt sie doch die Beobachtung Bohr's nur insofern, als danach in der Nähe des Druckes von 0,7 mm in dem Verhalten des Sauerstoffs merkwürdige Eigentümlichkeiten auf-

1) Aus den Angaben p. 321, 322, 324 würde allerdings zu folgen scheinen, dass die Manometer Drucke von 0,056 mm und 0,46 mm anzeigten, nach p. 314 u. 324 wäre aber der Druck das Zehnfache gewesen, also die obige Erklärung nicht ausgeschlossen.

treten. Gerade das verschiedene Verhalten der beiden Manometer würde dagegen der Bohr'schen Ansicht widersprechen, dass bei diesem Drucke die ganze Masse des Gases eine von Nebenumständen wesentlich unabhängige Umwandlung erfahre.

4. Die Versuche Campetti's[1]) werden von ihm selbst und danach auch von den späteren Schriftstellern, die diese Frage behandeln, als eine Bestätigung der Ergebnisse Bohr's angesehen, doch ist wohl das Gegenteil der Fall. Campetti vergleicht die Compressibilität des Sauerstoffs mit der des Wasserstoffs, die er als normal ansieht, bei Drucken unter 30 mm. Bei den grösseren Drucken verhält sich dann auch Sauerstoff normal; bei kleineren Drucken werden die Ergebnisse durch den Einfluss der Beobachtungsfehler unsicher; doch erleidet nach Campetti das Product $pv$ ähnlich wie bei Bohr einen deutlichen Sprung in der Nähe von 0,7 mm. Dies kann zugegeben werden, aber die Richtung dieses Sprunges fällt nur in einer von sechs Reihen mit der Richtung bei Bohr zusammen, in fünf anderen Reihen ist die Richtung die entgegengesetzte. Auch der Gang von $pv$ vor und nach dem Sprunge fällt dem Zeichen nach, soweit er überhaupt mit einiger Bestimmtheit hervortritt, nicht wesentlich häufiger mit dem von Bohr gefundenen Gange zusammen, als er ihm widerspricht. Ein bestimmtes Ergebnis folgt aus den Versuchen Campetti's daher überhaupt nicht.

5. Battelli[2]) drückte das untersuchte Gas durch eingepresstes Quecksilber auf nahe die Hälfte des Volumens zusammen, nachdem er es sich vorher durch Verdrängen des Quecksilbers hatte ausdehnen lassen. Mitgeteilt wird nur das Mittel der beiden Resultate, eine Controle des von Bohr angegebenen Unterschiedes im zeitlichen Eintreten der Anomalie bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung des Gases ist daher von vornherein ausgeschlossen. Den Anfangsdruck[3]) maass er mit einem Regnault'schen Differentialmanometer, die Druckänderung mit einem besonders empfindlichen Mikro-

1) A. Campetti, Atti di Torino **31**. p. 52. 1895.

2) A. Battelli, Nuovo Cimento (5) **1**. p. 5 u. 81. 1901.

3) Dass dies der grössere Druck war, ist ohne Einfluss, wenn die Messungsfehler unabhängig vom Druck waren; es wäre von Nachteil gewesen, wenn die Fehler mit dem Drucke wuchsen.

manometer. Der Apparat bestand in der einen Versuchsreihe ganz aus Glas, in einer anderen war das Gas grösstenteils in Gefässen aus polirtem Eisen enthalten.

Battelli zieht aus seinen Versuchen, denen er mehrere Gase unterzogen hat, ohne nähere Discussion nur qualitative Folgerungen. Für Sauerstoff schliesst er zunächst, ohne besonderes Gewicht darauf zu legen, dass dieser bei äusserst kleinen Drucken etwas stärker zusammengedrückt werde, als es das Boyle-Mariotte'sche Gesetz fordere, dann aber, dass sich in der Nähe eines Druckes von 0,7 mm, entsprechend den Versuchen früherer Beobachter, eine Anomalie zeige, die jetzt sicher feststehe.

Was nun den ersten Punkt betrifft, so wird man thatsächlich aus Battelli's Versuchen die Unrichtigkeit der Bohr'schen Formel

$$(p + 0{,}07)v = K_1, \quad p < 0{,}7$$

folgern; die kleinste von Battelli gemessene Dichte ist nur $^2/_9$ von derjenigen, bei der nach Bohr der Sauerstoff überhaupt keinen Druck mehr ausüben dürfte. Die geringe im entgegengesetzten Sinne gefundene Abweichung lässt sich aber ohne weiteres auf kleine Fehler in den Druckmessungen und sogar auf den Ueberfluss der von Battelli berechneten Decimalen zurückführen. So findet bei dem kleinsten benutzten Drucke von 0,014 mm Battelli das Verhältnis der $pv$ gleich 0,9832, wenn das dem grösseren Drucke entsprechende Product in den Zähler gesetzt wird; nach Bohr's Formel müsste es 1,6 sein; der von der Theorie geforderte Wert Eins ergiebt sich, wenn man den Enddruck zu 0,014235 mm, also nicht verschieden von dem wirklich beobachteten, annimmt.

Was den zweiten, den Hauptpunkt betrifft, so müssen wir uns zunächst darüber Rechenschaft geben, was wir zu erwarten haben. Wäre der von Bohr angegebene Sprung vorhanden, verhielte sich aber das Gas im übrigen wie ein normales, so müsste das Verhältnis der $pv$ gleich Eins sein, solange Anfangs- und Enddruck beide entweder über oder unter 0,7 mm liegen, dagegen nahe gleich 0,9, falls der eine Druck über, der andere unter 0,7 mm liegt.

Thatsächlich zeigt das Verhältnis bei den Versuchen mit

den Eisencylindern einen ganz anderen Gang, es fängt schon an stark zu sinken, während der kleinere Enddruck noch weit über 0,7 liegt und steigt dann rasch etwa ebenso hoch über den Wert Eins, als es darunter gefallen war. Wollte man eine regelmässige Abweichung vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze als Ursache annehmen, so hätte man etwa zu setzen

$$\begin{aligned} pv &= 1, && p > 1{,}1, \\ pv &= 1 + 0{,}07\,(1{,}1 - p), && 1{,}1 > p > 0{,}63, \\ pv &= 1 + 0{,}13\,(p - 0{,}38), && 0{,}63 > p > 0{,}38, \\ pv &= 1, && 0{,}38 > p. \end{aligned}$$

Unter $\alpha$ ist in der folgenden Tabelle das nach diesen Formeln corrigirte Verhältnis $p_1 v_1 / p_2 v_2$ angegeben, während $\beta$ der von Battelli berechnete Wert ist.

| $p_1$ | $p_2$ | $\beta$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 1,855 | 0,985 | 0,9920 | 1,000 |
| 1,620 | 0,866 | 0,9855 | 1,002 |
| 1,450 | 0,781 | 0,9779 | 1,000 |
| 1,390 | 0,750 | 0,9764 | 1,001 |
| 1,321 | 0,715 | 0,9733 | 1,000 |
| 1,194 | 0,648 | 0,9707 | 1,002 |
| 1,115 | 0,604 | 0,9725[1]) | 1,002 |
| 0,961 | 0,510 | 0,9926 | 1,000 |
| 0,886 | 0,462 | 1,0102 | 1,006 |
| 0,757 | 0,390 | 1,0224 | 1,000 |

Die Versuche mit den Glasgefässen enthalten nur zwei Beobachtungen an der kritischen Stelle; die Abweichungen zeigen mit den soeben behandelten eine Aehnlichkeit, aber keine völlige Uebereinstimmung.

Battelli's Versuche haben demnach im allgemeinen keine sprungweise, sondern eine allmählich verlaufende Abweichung von der Theorie ergeben; die grösste Abweichung beträgt nur $^1/_3$ des von Bohr gefundenen Sprunges. Da die Abweichung nach Bohr unabhängig von Nebenumständen sein sollte, so ist in diesem Sinne schon der gefundene Unterschied in der Grösse nicht als eine Bestätigung, sondern als eine Widerlegung der Bohr'schen Anomalie anzusehen.

1) In Battelli's Veröffentlichung enthält hier $p_1 v_1$ einen störenden Druckfehler durch Umsetzung der Ziffern 4 und 6.

Fragen wir schliesslich, wie weit sich die von Battelli gefundenen Abweichungen durch Beobachtungsfehler insbesondere in den Druckmessungen erklären lassen. Die Fehler des Differential- und des Mikromanometers haben beide auf das Resultat sehr nahe denselben Einfluss, der ihrem Verhältnis zum grösseren Drucke gleich ist; es braucht also nicht auf die Frage eingegangen zu werden, welche Fehler überwogen haben dürften. Die grösste in der kritischen Gegend beobachtete Abweichung erfordert nun einen Fehler von 0,035 mm an einem der Instrumente, dagegen giebt die erste mitgeteilte Beobachtung mit den Eisencylindern den Fehler 0,025 mm, die erste Beobachtung mit den Glascylindern sogar 0,058 mm, wenn man hier bei grösseren Drucken das Verhalten des Gases als normal ansieht. Die zweite Beobachtung der früher untersuchten Luft im Eisencylinder giebt 0,063 mm, die zweite im Glascylinder 0,059 mm. Für den später beobachteten Wasserstoff führt die grösste Abweichung auf 0,023 mm, für die zuletzt beobachtete Kohlensäure auf 0,021 mm. Nimmt man daher auch an, dass, wie es wahrscheinlich ist, die Fehler des nur summarisch calibrirten Mikromanometers mit dem Drucke wachsen, so bleiben nach dem mitgeteilten Material immer noch Fehler von einer solchen Grösse zulässig, dass sie die beobachteten Abweichungen erklären, wenn man nicht willkürlich alle Stellen, an denen Fehler dieser Grösse vorkommen, als den Sitz von Anomalien erklären will. Ueberdies scheinen die Fehler mit der Zeit abgenommen zu haben.

6. Für das Bestehen der Bohr'schen Anomalie werden von Battelli noch zwei weitere Autoritäten angeführt. Er sagt[1]):

„Von einer solchen Anomalie des Sauerstoffs hat man noch einen mittelbaren Beweis in den Versuchen Crookes' über die Bewegung des Radiometers. Er fand in der That, dass bei dem Drucke von 0,76 mm die ablenkende Kraft des Sauerstoffs zwölfmal grösser war als die des Stickstoffs und der Kohlensäure, und dass diese Kraft erst unterhalb 0,15 mm wieder normal wird."

„Und eine andere Bestätigung der Anomalie findet sich in dem Sprunge, welchen Ebert in der Curve beobachtet hat,

1) l. c. p. 22.

welche die Länge des dunkeln Kathodenraumes im Sauerstoff bei verschiedenen Drucken darstellt; ein Sprung, der gerade bei dem Drucke von 0,7 mm stattfindet."

Was die erste Bemerkung betrifft, so ist es richtig, dass nach Crookes[1]) die abstossende Kraft, welche eine Kerzenflamme auf einen Radiometerflügel ausübt, bei höheren Drucken von der Ordnung von 0,76 mm im Sauerstoff viel grösser ist als in anderen Gasen und dass sie bei geringeren Drucken von derselben Ordnung wird. Irgend eine Discontinuität in der Nähe von 0,76 mm hat aber Crookes nicht beobachtet, die Curve hat für Sauerstoff denselben Charakter und zeigt einen vielleicht noch glatteren Verlauf als bei den anderen Gasen. Der Druck von 0,76 mm ($= {}^1/_{1000}$ Atm.) spielt bei Crookes nur insofern eine Rolle, als seine Beobachtungen über die abstossende Kraft bei diesem Drucke anfangen und als er bei den Beobachtungen über die Zähigkeit mit diesem Drucke die Einheit ändert, in der er seine Drucke anführt.

Dagegen hat Ebert in der That den angegebenen Sprung bei 0,7 mm beobachtet. Aber Ebert hebt ausdrücklich hervor, dass die Lage dieses Sprunges ganz von den Umständen insbesondere von den Dimensionen der Elektrode abhängt; für eine grössere Elektrode ergab sich die Lage des Sprunges bei 0,50 mm.[2]) Auch die Versuche Ebert's tragen daher nicht dazu bei, das Bestehen der Anomalie zu bestätigen.

7. Der Apparat, mit welchem ich zunächst die Anomalie des Sauerstoffs zu prüfen versuchte, war in erster Linie dazu bestimmt, die reguläre Abweichung des Wasserdampfes von dem Boyle-Mariotte'schen Gesetze bei Zimmertemperatur zu bestimmen. Ich vermutete, dass diese Abweichung zwar sehr viel kleiner sei, als sie aus Battelli's Versuchen zu folgen scheint[3]), aber doch noch mit meinen Mitteln der Ordnung nach festzustellen sein müsse.

Aber obgleich ich, um den Einfluss der Gefässwände möglichst herabzusetzen, recht grosse Räume gewählt hatte, so machte sich doch der Einfluss der Gefässwände dadurch bemerkbar, dass nach jeder Vermehrung des Druckes eine

1) W. Crookes, Phil. Trans. 172. p. 410 u. Taf. 57. 1882.
2) H. Ebert, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 104. 1900.
3) A. Battelli, Memorie di Torino (2) 43. p. 66. 1893.

anfangs schneller, dann langsamer verlaufende Druckverminderung, nach jeder grösseren Druckverminderung eine ähnlich verlaufende Druckvermehrung eintrat. So wurde, nachdem der Druck von 0 auf 11 mm vermehrt war, während der ersten Messung in einer halben Stunde eine Druckabnahme von etwa 0,07 mm[1]), in einem Tage die Gesamtabnahme von 0,15 mm beobachtet, der Wasserdampf verhielt sich so, als ob er mit einer Salzlösung in Berührung sei.

Es mag dahingestellt bleiben, ob diese Störung durch neue sorgfältige Reinigung und Zusammensetzung des Apparates hätte beseitigt werden können; seine Glaswände waren nicht mit kochendem Wasser behandelt worden, und überdies hatten einige durch die Quecksilberpumpen (namentlich eine anfangs benutzte Pumpe nach Kahlbaum) verursachte Unfälle eine kleine nachträgliche Verschmutzung herbeiführen können; jedenfalls war der Apparat in dieser Beschaffenheit nicht geeignet, den Wasserdampf zu untersuchen, und ich ging daher zu den schon vorbereiteten Versuchen mit Sauerstoff über.

8. Bei dieser Untersuchungsreihe bestand der Apparat aus den folgenden, durch weite Glasröhren miteinander verbundenen Teilen.[2])

Auf die für sich abschliessbaren, nebeneinander geschalteten Entwickelungsgefässe für Wasserdampf und Sauerstoff folgte ein mit I bezeichneter Ballon von etwa 10 Liter Inhalt, der dauernd mit dem rechten Schenkel des Manometers verbunden war. Darauf folgte, nach einem als Hahn dienenden Verschluss, Ballon II von ähnlicher Grösse und, nach einem weiteren Verschluss, Ballon III von nahe 0,8 Liter Inhalt. Hinter dem diesen Ballon absperrenden Verschluss befand sich eine automatische Quecksilberpumpe, die dauernd mit dem linken Schenkel des Manometers verbunden war und, daneben

1) Es mag hier zum Vergleich erwähnt werden, dass bei den Versuchen mit Sauerstoff sich zwar oft eine bis zu 0,005 mm gehende Aenderung der Ablesung während der Messung zeigte, diese aber in beiden Schenkeln die gleiche war und durch die Ausdehnung des Quecksilbers erklärt wird. Ausserdem traten zwischen den Messungen Aenderungen auf, die auf ein Ab- und Zudestilliren des Quecksilbers in dem meist sehr guten Vacuum hinweisen.

2) Vgl. Thätigkeitsbericht, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **21.** p. 107. 1901.

geschaltet, aber durch Verschluss und eingeschliffenen Hahn absperrbar, eine Toepler'sche Pumpe.

Das Entwickelungsgefäss für Sauerstoff bestand aus einer Röhre von schwer schmelzbarem Glase, deren im stumpfen Winkel schräg abwärts gebogenes und verschlossenes Ende Quecksilberoxyd enthielt.

Die Ballons waren käufliche Gaswaschflaschen nach Drechsel; der die Zuleitungsröhren enthaltende eingeschliffene Stopfen wurde dadurch gedichtet, dass man den Hals der Flasche mit einem Papierring umgab und in die gebildete Wanne Quecksilber goss.

Die nach dem Vorgange Hagen's[1]) statt der Hähne benutzten Quecksilberverschlüsse hatten im allgemeinen die früher veröffentlichte Form[2]) aber zum Teil mit schräg gestellten Schenkeln und einer Sicherheitskugel. Bei grösseren Druckunterschieden wird dadurch allerdings nur bei einem sehr ruhigen Ausgleich des Druckes ein Wegschleudern des Quecksilbers verhütet; um dies sicher zu verhindern, wird man complicirtere Formen wählen müssen.

Das Manometer war mit einem früher benutzten identisch.[3])

Die automatische Pumpe nach Sprengel's Princip will ich gesondert beschreiben; nur die Toepler'sche Pumpe enthielt ein Gefäss mit Phosphorsäure.

Die Verbindungsröhren waren nicht durchweg zusammengeschmolzen, sondern an einigen Stellen auch durch Siegellackkittungen miteinander verbunden.

Die Ballons standen in Sand eingebettet in grösseren Gefässen; nahe der Ballonwandung in den Sand gestossene, unten geschlossene und mit einem Wattepfropf versehene Röhren enthielten die zur Bestimmung der Ballontemperaturen dienenden Thermometer.

9. Das Princip der Versuche bestand darin, dass man den Apparat vollständig leer pumpte, durch Erhitzen des Quecksilberoxyds Sauerstoff entwickelte, der in den Ballon I trat, nach Messung des Druckes, diesen Sauerstoff auf die anderen

1) E. Bessel-Hagen, Wied. Ann. **12.** p. 430. 1881.

2) M. Thiesen u. K. Scheel, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt **3.** p. 76. Fig. 2. 1900.

3) l. c. p. 76.

Ballons verteilte und nun untersuchte, ob sich das aus den gemessenen Drucken abgeleitete Verhältnis der drei Ballons unabhängig von dem Anfangsdruck ergab.

Die Messung und Berechnung der Drucke erfolgte wesentlich in früher beschriebener Weise[1]), abgesehen davon, dass jetzt nur ein Beobachter die Einstellungen machte; der Nullpunkt des Manometers wurde mehrfach dadurch bestimmt, dass man die Ballons untereinander und mit der Pumpe communiciren liess.

10. Beim Beginn der Versuche mit Sauerstoff war in dem ganzen Apparat, das Entwickelungsgefäss einbegriffen, ein sehr gutes Vacuum vorhanden. Zu dessen Herstellung hatte bei den vorangehenden Versuchen mit Wasserdampf hauptsächlich die Toepler'sche Pumpe beigetragen; es genügte im wesentlichen schon, die Verbindung einige Zeit bestehen zu lassen, um den im Apparate befindlichen Wasserdampf zur Absorption durch die Phosphorsäure zu bringen. Später, als es sich um die Entfernung von Sauerstoff von geringer Dichte handelte, war aber die Toepler'sche Pumpe von geringem Nutzen, da nach jedem Pumpenzuge eine erhebliche Zeit verfloss, bis sich in der Pumpe wieder eine grössere Gasmenge ansammelte. Die Erklärung dafür liegt in der Verengerung der Zuleitung durch die Hahnbohrung, verbunden mit der der Maxwell'schen Theorie entsprechenden grossen Zähigkeit[2]) stark verdünnter Gase. Diese Pumpe diente daher jetzt hauptsächlich nur nach Hagen's Vorschlag als McLeod'sches Manometer, um den noch vorhandenen Gasdruck festzustellen, und wurde dazu frühestens 10 Minuten nach Herstellung der letzten Verbindung benutzt. Dass bei den grösseren Verdünnungen auch dieser Zeitraum für eine eigentliche Messung ungenügend war, zeigt die Ueberlegung, dass sich nach der Theorie bei einem Drucke von 0,001 mm in den Ballons innerhalb 10 Minuten nur derselbe Bruchteil dieses Druckes in der

1) M. Thiesen u. K. Scheel, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 3. p. 79—82. 1900.

2) Nämlich die von Stokes als „Reibungsindex" bezeichnete Grösse, durch welche die Bewegung einer Flüssigkeit infolge der Reibung bedingt wird, und die nach Maxwell's Theorie des constanten Reibungscoefficienten der Dichte des Gases umgekehrt proportional ist.

Pumpe ausbilden konnte, wie bei Atmosphärendruck in 0,008 sec.

11. Ich lasse jetzt zunächst die mit einer zweiten Sauerstofffüllung beobachteten Drucke folgen, die auch meiner ersten Mitteilung an die Deutsche Physikalische Gesellschaft zu Grunde liegen.[1]) Der Anfangsdruck von 0,897 mm wurde sogleich in den verbundenen Ballons I und II hergestellt, dann die Gasmenge auf die drei Ballons verteilt und der neue Druck 0,861 mm gefunden. Man pumpte nun den Ballon III leer, füllte ihn (nach einer durch die Klammer angedeuteten Controlmessung, die nahezu denselben Druck ergab) wieder aus den anderen Ballons auf und fuhr so fort.

| Nr. | Zeit der Messung | | Druck mm | $B-R$ |
|---|---|---|---|---|
| 32 | 12. IV. 1901 | 10,6$^h$ | 0,897 | — |
| 33 | | 11,7 | 0,861 | −2 |
| 34 | | 13,7 | 0,860 | −4 |
| 35 | | 14,5 | 0,826 | −5 |
| 36 | 13. IV. 1901 | 11,5 | 0,826 | −5 |
| 37 | | 12,3 | 0,796 | −4 |
| 38 | | 14,5 | 0,766 | −4 |
| 39 | 15. IV. 1901 | 11,5 | 0,771 | +1 |
| 40 | | 12,3 | 0,742 | +1 |
| 41 | | 14,6 | 0,711 | −2 |
| 42 | 16. IV. 1901 | 10,9 | 0,715 | +2 |
| 43 | | 11,8 | 0,688 | +2 |
| 44 | | 14,2 | 0,661 | 0 |
| 45 | 17. IV. 1901 | 12,4 | 0,636 | 0 |
| 46 | 18. IV. 1901 | 10,9 | 0,612 | 0 |
| 47 | | 13,9 | 0,588 | −1 |
| 48 | 19. IV. 1901 | 11,5 | 0,567 | −1 |
| 49 | | 14,5 | 0,543 | −3 |

Die in der zweiten Columne angegebenen Zeiten entsprechen der Mitte der etwa eine halbe Stunde dauernden Messung.

In der letzten Columne sind, in Einheiten der dritten Decimale, die Fehler angegeben, welche die beobachteten

1) Ein Referat darüber: Zeitschr. f. compr. u. flüss. Gase 5. p. 8. 1901, ist ohne mein Zuthun veröffentlicht, lag mir aber in der Correctur vor.

Drucke unter der Voraussetzung übrig lassen, dass der erste Druck fehlerfrei beobachtet wurde und dass der gemeine Logarithmus der Drucke nach jeder Operation um 0,0166 abnahm. Dazu ist noch folgendes zu bemerken.

Die Drucke sind, abweichend von der vorläufigen Mitteilung, unter Annahme eines für die ganze Reihe constanten Schraubenwertes, inbegriffen die Capillarcorrection, und eines constanten Indexfehlers auf vier Stellen berechnet worden. An ihnen hätten noch einige Correctionen angebracht werden müssen: erstens wegen der Schwankungen der in den grossen Ballons zwischen 17,1° und 17,5° liegenden Temperatur, zweitens wegen der beim Auspumpen noch verbleibenden Gasreste, deren Druck, in der Toepler'schen Pumpe gemessen, nur einmal 0,0004 mm erreichte, drittens wegen der durch die verschiedenen Quecksilberstände in den Verschlüssen bedingten Schwankungen des Ballonvolumens. Da diese Correctionen die angegebenen Fehler nur um eine Einheit, den Charakter des Resultates gar nicht ändern konnten, so ist ihre Berechnung unterblieben, auch wurden die Drucke nicht auf absolute Werte reducirt.

Da nur Tagesbeobachtungen ausgeführt wurden, bei denen die Unruhe des Quecksilbers recht störend war, so ist die Grösse der übrigbleibenden Fehler, die noch durch andere Wahl der beiden Constanten etwas herabgesetzt werden kann, nicht gerade als unzulässig zu bezeichnen, zumal da auch der Indexfehler Aenderungen derselben Ordnung zeigt. Immerhin muss der Gang der Fehler, insbesondere der Sprung, der zwischen den beiden bei gleicher Dichte angestellten aber durch 45 Stunden voneinander getrennten Messungen Nr. 38 und Nr. 39 eingetreten zu sein scheint, als auffällig bezeichnet werden. Es lag nahe zu versuchen, ob die Einführung eines der Zeit proportionalen Gliedes, wie es ein stetiges Loslösen eines Gases von den Wänden oder eine kleine Undichtheit bedingen würde, eine Verbesserung bringt, doch wird eine solche in erheblichem Maasse nur erzielt, wenn man für die letzten sechs Beobachtungen eine Constante ändert. Ausserdem würde aber auch diese Hypothese ein grösseres logarithmisches Decrement verlangen, während sich aus den sogleich zu besprechenden Versuchen bei grösserem Druck ein kleineres ergiebt.

12. Unmittelbar vor und nach den soeben besprochenen wurden noch die folgenden Messungen mit demselben Apparat ausgeführt.

Bei der ersten Füllung war im Ballon I ein Druck von 0,949 mm vorhanden gewesen, der durch Verteilung auf die Ballons I und II auf 0,502 mm herabgesetzt wurde. In genügender Uebereinstimmung damit fand man bei der dritten Füllung, dass der Druck von 22,911 mm auf 12,179 mm herabging; der Unterschied ist zwanzigmal kleiner und von entgegengesetztem Zeichen als ihn die Bohr'sche Anomalie fordern würde.

Ausserdem ergab sich bei der dritten und einer vierten Füllung, bei welcher der Druck in den Ballons I und II 22,4 mm war, dass bei einer Verteilung des Gases auf die drei Ballons der Logarithmus des Druckes um 0,0162 abnahm, also etwas weniger als bei der Berechnung der mit der zweiten Füllung angestellten Versuche vorausgesetzt war.

Bei der ersten Füllung hatte man den Druck von 0,502 mm durch Verteilung auf die drei Ballons in fünf Operationen noch weiter auf 0,431 mm herabgesetzt. Das ist eine zu kleine Abnahme, die Abweichung liegt am Anfang der Beobachtungen und hängt damit zusammen, dass aus einem nicht mehr aufzuklärenden Grunde der zu 0,0000 mm bestimmte Druck im Vacuum sich am folgenden Tage als nicht unerheblich erwies und, wie eine Controlmessung ergab, wahrscheinlich schon bei der vorangehenden Messung (vielleicht auch zum Teil bei den zu 0,949 und 0,502 mm gefundenen Drucken) in Höhe von über 0,01 mm bestanden hatte.

13. Die Versuche, welche entscheiden sollten, ob die kleinen in den vorangehenden Beobachtungen verbleibenden und die grösseren von anderen Beobachtern gefundenen Abweichungen vom Boyle-Mariotte'schen Gesetze ihre Ursache zum Teil in dem Einflusse der Wände haben könnten, wurden mit einem etwas veränderten Apparate angestellt. Der frühere Ballon II wurde entfernt, der frühere Ballon III, nachdem man das auf den Boden gehende Rohr verkürzt hatte, lose mit 12,1 g nicht weiter behandelter Glaswolle von etwa 0,02 mm Fadendurchmesser gefüllt; seine Oberfläche verhielt sich also jetzt zu seinem Inhalt wie bei einem etwa 6 mm weiten Rohr. Ausser-

dem wurden auch die Abbildungsverhältnisse der Mikroskope durch Entfernung der Blenden und durch neue Justirung geändert; bei der Berechnung ist diese Aenderung aber nur durch Annahme der neu bestimmten mittleren Schraubenwerte berücksichtigt worden.

Ausser den beiden Ballons benutzte man bei diesen Versuchen auch den Raum, welcher (nach Absperrung der Toepler'schen Pumpe) von einem genügend constant bleibenden Teile der automatischen Pumpe, von dem linken Manometerschenkel und von den Verbindungsröhren gebildet wurde. Man erreichte dadurch den Vorteil, den Index häufiger inmitten einer Reihe bestimmen zu können, ausserdem aber auch den, neben dem Verhalten des in den mit Glaswolle gefüllten Ballon einströmenden auch das des aus diesen Ballon austretenden Gases untersuchen zu können.

Die Ergebnisse dieser Messungen sind in der p. 297 u. 298 folgenden Tabelle aufgeführt. Dazu ist folgendes zu bemerken.

Die Drucke sind hier noch mit dem Indexfehler $i$ behaftet angeführt; ebenso sind alle Bestimmungen von $i$ angegeben. Bei der Berechnung ist für $i$ sein mittlerer Wert 0,0152 angenommen.

Die Art wie die Verteilung des Gases auf die einzelnen Räume stattfand, war bei diesen Versuchen nicht ganz nach einem einheitlichen Schema geregelt und ist daher in der vorletzten Columne besonders angegeben. Bezeichnen wir das Volumen des grossen Ballons mit 1, das des kleineren die Glaswolle enthaltenden Ballons mit $\alpha$, den dritten Raum mit $\beta$, so bedeutet das Zutreten des Factors $x = 1/1 + \alpha$, dass das Gas aus dem Ballon 1 auf die beiden Ballons 1 und $\alpha$ verteilt wurde; $y = 1/1 + \alpha + \beta$ entspricht einer Verteilung auf die drei Ballons. Endlich ist $z = \alpha/\alpha + \beta$ gesetzt.

Nach den ersten acht Beobachtungen trat ein Unfall durch Bruch des Fallrohres der automatischen Pumpe ein, dabei wurde auch etwas Quecksilber in den mit Glaswolle gefüllten Ballon geschleudert. Das Fallrohr wurde dann, ohne im übrigen etwas an den Verbindungen zu ändern, in einer Weise reparirt, dass ein ähnlicher Unfall jetzt mit Sicherheit ausgeschlossen zu sein scheint. Nachdem der Apparat dann aufs neue leergepumpt und Sauerstoff entwickelt war, wurden die Beobachtungen Nr. 9—27 ausgeführt.

| Nr. | Zeit der Messung | | Ergebnis | Art des Druckes | $B-R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15. VI. 1901 | 11,6 h | 0,019 mm | $i$ | + 4 |
| 2 | | 13,1 | 1,012 | $i+p$ | 0 |
| 3 | | 13,8 | 0,935 | $i+px$ | + 3 |
| 4 | | 14,5 | 0,013 | $i$ | − 2 |
| 5 | 17. VI. 1901 | 10,9 | 0,905 | $i+py$ | − 3 |
| 6 | | 11,9 | 0,835 | $i+pxy$ | 0 |
| 7 | | 12,6 | 0,015 | $i$ | 0 |
| 8 | | 14,1 | 0,213 | $i+py^2(1-z)$ | − 1 |
| 9 | 21. VI. 1901 | 10,5 | 0,015 | $i$ | 0 |
| 10 | | 11,5 | 0,993 | $i+p_1$ | 0 |
| 11 | | 12,2 | 0,928 | $i+p_1x$ | − 1 |
| 12 | | 13,8 | 0,864 | $i+p_1x^2$ | − 6 |
| 13 | | 14,5 | 0,016 | $i$ | + 1 |
| 14 | 22. VI. 1901 | 10,4 | 0,842 | $i+p_1xy$ | − 10 |
| 15 | | 11,2 | 0,794 | $i+p_1x^2y$ | − 4 |
| 16 | | 11,9 | 0,203 | $i+p_1x^2y(1-z)$ | − 8 |
| 17 | | 12,5 | 0,011 | $i$ | − 5 |
| 18 | | 14,0 | 0,771 | $i+p_1xy^2$ | − 10 |
| 19 | | 14,6 | 0,721 | $i+p_1x^2y^2$ | − 10 |
| 20 | 24. VI. 1901 | 10,5 | 0,727 | $i+p_1x^2y^2$ | − 4 |
| 21 | | 11,6 | 0,685 | $i+p_1x^3y^2$ | 0 |
| 22 | | 12,3 | 0,178 | $i+p_1x^3y^2(1-z)$ | − 5 |
| 23 | | 13,0 | 0,015 | $i$ | 0 |
| 24 | 25. VI. 1901 | 11,0 | 0,677 | $i+p_1x^2y^3$ | + 7 |
| 25 | | 11,8 | 0,631 | $i+p_1x^3y^3$ | + 3 |
| 26 | | 12,7 | 0,165 | $i+p_1x^3y^3(1-z)$ | − 3 |
| 27 | | 13,3 | 0,014 | $i$ | − 1 |
| 28 | 26. VI. 1901 | 10,9 | 1,938 | $i+p_2$ | + 1 |
| 29 | | 11,1 | 0,467 | $i+p_2(1-z)$ | + 4 |
| 30 | | 11,5 | 0,807 | $i+p_2(1-z^2)$ | + 1 |
| 31 | | 11,8 | 1,064 | $i+p_2(1-z^3)$ | − 4 |
| 32 | | 12,2 | 1,268 | $i+p_2(1-z^4)$ | − 2 |
| 33 | | 12,6 | 1,425 | $i+p_2(1-z^5)$ | 0 |
| 34 | | 12,9 | 1,543 | $i+p_2(1-z^6)$ | − 1 |
| 35 | | 13,4 | 1,638 | $i+p_2(1-z^7)$ | + 4 |
| 36 | | 13,8 | 1,705 | $i+p_2(1-z^8)$ | 0 |
| 37 | | 14,1 | 1,937 | $i+p_2$ | − 1 |
| 38 | | 14,3 | 1,757 | $i+p_2(1-z^9)$ | − 2 |
| 39 | | 14,4 | 0,018 | $i$ | + 2 |
| 40 | 27. VI. 1901 | 10,8 | 1,772 | $i+p_3$ | 0 |
| 41 | | 11,1 | 0,429 | $i+p_3(1-z)$ | + 4 |

| Nr. | Zeit der Messung | Ergebnis | Art des Druckes | $B-R$ |
|---|---|---|---|---|
| 42 | 27. VI. 1901 11,5$^h$ | 0,743 mm | $i + p_3(1-x^2)$ | + 5 |
| 43 | 12,0 | 0,975 | $i + p_3(1-x^3)$ | − 3 |
| 44 | 12,3 | 1,159 | $i + p_3(1-x^4)$ | − 4 |
| 45 | 12,7 | 1,301 | $i + p_3(1-x^5)$ | − 3 |
| 46 | 13,1 | 1,412 | $i + p_3(1-x^6)$ | − 1 |
| 47 | 13,5 | 1,494 | $i + p_3(1-x^7)$ | − 2 |
| 48 | 13,9 | 1,559 | $i + p_3(1-x^8)$ | − 1 |
| 49 | 14,3 | 1;772 | $i + p_3$ | 0 |
| 50 | 14,4 | 1,612 | $i + p_3(1-x^9)$ | + 3 |
| 51 | 14,6 | 0,019 | $i$ | + 3 |

Die letzten Beobachtungen Nr. 28—51 wurden in etwas abweichender Weise angestellt. Man entwickelte in den beiden Ballons Sauerstoff und bestimmte seinen Druck (zu 1,9232 mm). Dann sperrte man die Ballons voneinander ab, liess das Gas aus dem mit Glaswolle gefüllten Ballon auch in den dritten Raum treten und bestimmte die Druckdifferenz (zu 0,4517 mm). Jetzt pumpte man den dritten Raum leer, füllte ihn wieder aus dem mit Glaswolle gefüllten Ballon auf und bestimmte aufs neue die Differenz des Druckes gegen das im grossen Ballon unverändert gebliebene Gas. So fuhr man fort, bis nach neun Operationen der Druck auf weniger als ein Zehntel des Anfangsdruckes gesunken war. Eine zweite ganz gleiche Reihe wurde ausgeführt, nachdem man den mit Glaswolle gefüllten Ballon durch Verbindung mit dem grossen Ballon wieder aufgefüllt hatte.

Bei diesen Beobachtungen Nr. 28—51 war ausserdem das den kleineren Ballon umgebende Sandbad entfernt und durch ein Eisbad ersetzt worden, das diesen Ballon sehr nahe bei 0° erhielt.

Ferner waren hier die Messungen dadurch sehr vereinfacht, dass man die Bestimmung des Schraubenwertes fortliess, bei der Berechnung vielmehr den aus den 27 vorhergehenden Messungen folgenden Mittelwert benutzte und die Zahl der anderen Einstellungen auf die Hälfte beschränkte. Da auch die leer zu pumpenden Räume jetzt viel kleiner waren, so konnten die einzelnen Messungen rasch auf-

einander folgen und eine Reihe konnte in einem Tage erledigt werden.

14. Bei der Berechnung der Versuche bei denen eine grössere Oberfläche vorhanden war, ergab sich für die ersten acht Versuche, welche aber den für die Anomalie maassgebenden Druck von 0,7 mm nicht erreichen, eine genügende Uebereinstimmung, wenn man den Anfangsdruck als richtig voraussetzte, ferner

$$\log x = - 0{,}03675,$$

$$\log y = - 0{,}04824,$$

und daraus folgend

$$\log(1-z) = - 0{,}60466$$

annahm. Die übrigbleibenden Fehler sind in der letzten Columne der Tabelle angegeben.

Dagegen zeigt die zweite Reihe, welche Nr. 9 bis Nr. 27 umfasst, eine Anzahl von auffallenden Abweichungen, für die mir die Erklärung fehlt. Berechnet sind die übrigbleibenden Fehler dieser Reihe mit den Constanten

$$\log x = - 0{,}02914,$$

$$\log y = - 0{,}03846,$$

$$\log(1-z) = - 0{,}60112.$$

Auffallend ist hier schon die auch für gleiche Drucke angezeigte Aenderung der Constanten gegen die vorige Reihe, welche eine relative Vergrösserung des grossen Ballons erfordern würde und in ihrem Betrage weder durch Temperaturunterschiede oder Aenderungen in den Verschlüssen noch durch die geringe Menge des inzwischen in den kleinen Ballon getretenen Quecksilbers erklärt wird. Aber auch bei Berechnung mit diesen Constanten bleiben noch sehr grosse durch Beobachtungsfehler und die vernachlässigten Correctionen nicht zu erklärende Abweichungen übrig. Besonders auffallend ist die einer früheren Beobachtung entsprechende Druckvermehrung bei gleichbleibender Dichte nach längerer Pause zwischen Nr. 19 und Nr. 20. Ferner die sehr geringe Druckänderung

zwischen Nr. 21 und Nr. 24. Hier findet etwas der Bohr'schen Anomalie ähnliches, wenn auch nur im zehnten Teil des Betrages statt: die Druckänderung entspricht nur der Hälfte der Dichteänderung. Gegenüber den Abweichungen, welche diese Reihe überhaupt zeigt, ist aber darauf kein Gewicht zu legen.

Hervorheben möchte ich noch, dass bei dieser Reihe mit ihren stärkeren Abweichungen das Gas im Apparate wahrscheinlich am wenigsten rein war. Vor der Entwickelung des Sauerstoffs betrug der Druck im Apparate noch 0,008 mm nach Messung an der Toepler'schen Pumpe; es mögen daher im grossen Ballon oder auch im Quecksilberoxyd noch Spuren von Feuchtigkeit zurückgeblieben sein.

Die Temperatur war ziemlich constant nahe bei 16,5°.

Die Berechnung der beiden letzten Reihen zeigt wieder mit Rücksicht auf die jetzt etwas grösser zu erwartenden Beobachtungsfehler eine gute Uebereinstimmung und keine Spur der Anomalie, obgleich gerade hier die Bedingungen für ihr Auftreten, falls sie von den Wänden herrührt, besonders günstig schienen. Der Sprung hätte zwischen Nr. 31 und Nr. 32 und zwischen Nr. 43 und Nr. 44 eintreten müssen.

Man berücksichtigte hier den Umstand, dass sich der dritte Raum infolge des Quecksilberstandes im Manometer systematisch mit dem Drucke etwas ändern musste und legte daher der Berechnung beider Reihen den Wert zu Grunde

$$\log z = -0{,}11548 + 0{,}00070\,p,$$

wo $p$ den Druck in Millimetern bezeichnet. Bei Vergleichung mit den früher bestimmten Werten von $z$ ist zu berücksichtigen, dass jetzt der grösste Teil der beiden verglichenen Räume sich auf einer um 17° verschiedenen Temperatur befand.

Die Werte der beiden Anfangsdrucke $p_2$ und $p_3$ sind als unabhängig voneinander beobachtet angenommen, obgleich man sie auch aufeinander hätte zurückführen können.

15. Fasst man nun alles, was über das Verhalten des Sauerstoffs in der Nähe des Druckes von 0,7 mm bekannt geworden ist, zusammen, so wird wohl der folgende Schluss gerechtfertigt erscheinen:

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Anomalie, welche Sauerstoff bei einem Drucke von etwa 0,7 mm zeigen soll, nicht existirt, dass vielmehr Versuchs- und Messungsfehler zu ihrer Annahme geführt haben.

Keinesfalls ist diese Anomalie eine stets oder unter bekannten Bedingungen in bestimmter Grösse auftretende Erscheinung.

(Eingegangen 1. August 1901.)

## 5. *Ueber die innere Reibung von Helium und ihre Aenderung mit der Temperatur;* von *H. Schultze.*

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut zu Halle a/S.)

Ueber die innere Reibung von *Helium* liegen Messungen von Lord Rayleigh vor. Er fand bei gewöhnlicher Temperatur als Reibungscoefficienten von *nicht ganz reinem* Helium[1]) den auf trockene Luft bezogenen Wert 0,96[2]) und später für *reines* Helium[3]) als bestimmend für die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur in den Grenzen 15° und 100° die Werte $n = 0{,}681$ und $C$ (Sutherland) = 72,2.[4]) Lord Rayleigh's Reibungsversuche sind, wie ich in meiner Arbeit über die innere Reibung von Argon ausgeführt habe[5]), nicht einwandsfrei. Daher unternahm ich es auf Anregung von Hrn. Prof. Dorn, mit dem von mir zur Untersuchung von *Argon* construirten, sehr genau arbeitenden Apparat den Reibungscoefficienten von Helium und seine Aenderung mit der Temperatur, und zwar in den Grenzen 15° und 184° zu bestimmen. Leider konnte ich kein vollkommen reines Helium darstellen (vgl. p. 308). Wenn daher auch meine Resultate nicht als endgültige angesehen werden können, so möchte ich sie doch mitteilen, weil ich merkwürdigerweise für reineres Helium, als es Rayleigh damals zur Verfügung stand, einen über 10 Proc. grösseren Reibungscoefficienten fand, während die von mir be-

1) Das Helium hatte Ramsay in London dargestellt (Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **59.** p. 205. 1896). Die Dichte ist nicht angegeben. Ramsay fand im Mittel die Dichte des (unreinen) Heliums aus verschiedenen Mineralien zu 2,15 bezogen auf O = 16. (W. Ramsay, Proc. Roy. Soc. **59.** p. 329. 1896.)

2) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **59.** p. 206. 1896.

3) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **67.** p. 137—139. 1900; Beibl. **24.** p. 968. 1900.

4) Lord Rayleigh, l. c.

5) H. Schultze, Ann. d. Phys. **5.** p. 140. 1901; Inaug.-Diss. p. 5. Halle 1901.

stimmten Werte von $n$ und $C$ (Sutherland) mit den nach Rayleigh für reines Helium geltenden nahe übereinstimmen.

### I. Darstellung von Helium.

#### a) Darstellung von Rohhelium.

Das Rohhelium wurde durch Ausglühen von *Monazitsand* gewonnen, den Hr. Dr. Knöfler zu diesem Zwecke dem hiesigen *Physikalischen Institut* zur Verfügung gestellt hatte. Bei der Darstellung war besonders darauf zu achten, dass das Gas durch keine merklichen Mengen Luft und infolge dessen Argon verunreinigt wurde, da dieses sowie Neon, Krypton, Xenon auf chemischem Wege nicht zu entfernen ist. Als zweckmässig ergab sich die in Fig. 1 angegebene Anordnung des Apparates.

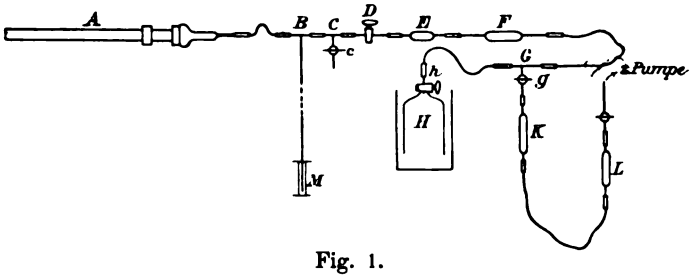



Fig. 1.

$A$ ist ein 90 cm langes, 3,5 cm weites nahtloses Eisenrohr, an dem einen Ende zugeschweisst, am anderen Ende mit einem luftdicht aufschraubbaren Verjüngungsstück aus Rotguss versehen. Es wurde, soweit es sich im Gasofen befand, mit Monazitsand (zuvor gesiebt und getrocknet) beschickt, während der herausragende, kühl gehaltene Teil geglühten Asbest enthielt. $B$ ist ein T-Stück aus 1,5 mm weitem Capillarrohr, dessen senkrecht nach unten gehender, 90 cm langer freier Schenkel in dem 10 cm hohen Quecksilbercylinder $M$ endigte, $C$ ein T-Stück, das durch den Glashahn $c$ mit einem Kipp'schen Wasserstoffentwickelungsapparat in Verbindung stand, vor welchem zum Reinigen und Trocknen des Wasserstoffs zwei Waschflaschen mit übermangansaurem Kali (in Wasser gelöst) und concentrirter Schwefelsäure sowie ein Trockenrohr mit Phosphorpentoxyd lagen. Der Glashahn $D$, die mit Natron-

kalk gefüllte Röhre *E*, das Verbrennungsrohr *F* mit Kupferoxyd im kleinen Gasofen und das T-Stück *G*, das durch den Hahn *g* und zwei Natronkalk bez. Natronkalk und Phosphorpentoxyd enthaltende Glasrohre *K* und *L* mit der Geissler'schen Quecksilber-Hahnluftpumpe in Verbindung stand, führte sodann zum Hahn *h* des Glasgasometers *H*. Dieser fasste etwa 1 Liter Gas. Als Sperrflüssigkeit diente destillirtes, ausgekochtes Wasser. Die Verbindungen der einzelnen Teile des Apparates wurden durch Bleirohr und kurze dickwandige Gummischlauchstücke (mit Gummischnur befestigt) hergestellt.

Der Verlauf der Operationen war folgender. Die Glasglocke wurde bis zum Hahn *h* mit dem Sperrwasser gefüllt. Dann wurden alle Verbindungen bis zu den Hähnen *h* und *c* mit der Geissler'schen Pumpe evacuirt[1]), der Hahn *D* geschlossen und durch Oeffnen von *c* Wasserstoff eingelassen. Aus den Verbindungen vom Wasserstoffapparat bis *c* war zuvor die Luft durch längeres Hindurchleiten eines starken Wasserstoffstromes verdrängt worden. Nach Schliessen von *c* und Oeffnen von *D* wurde der ganze Apparat nochmals evacuirt und das Eisenrohr sowie die Verbindungen bis *D* wieder mit Wasserstoff gefüllt, sodass dieser nach Abschluss von *c* unter Ueberdruck stand. Jetzt wurde bei fortgesetztem Pumpen das Kupferoxyd in *F* auf Dunkelrotglut erhitzt. Als gutes Vacuum erreicht war, wurde der Hahn *g* abgeschlossen und das Eisenrohr im Gasofen erhitzt, wodurch die im Monazitsand enthaltenen Gase, hauptsächlich *Kohlensäure, Wasserstoff, Helium* und, wie sich leider später herausstellte, jedenfalls auch *Neon*, ausgetrieben wurden. Dazu kamen durch das glühende Eisenrohr hindurchdiffundirende Gase, *Wasserstoff* und *Kohlenoxyd*. Als der Ueberdruck in dem durch *D* abgeschlossenen Raume

1) Das Eisenrohr war vor Beginn der Operationen unter starkem Ueberdruck auf Dichtigkeit geprüft worden. Volles Vacuum, soweit es die Geissler'sche Pumpe liefert, wurde übrigens nicht erreicht. Es mag dahingestellt bleiben, ob dies in einer kleinen Undichtheit des Eisenrohres oder in Gasentwickelung aus dem Monazitsand zu erklären ist. Jedenfalls waren die übrigbleibenden Gasblasen so klein, dass im Falle einer Undichtheit die Gefahr, eine grössere Menge Luft und infolge dessen eine merkliche Menge Argon in die Verbindungen zu bekommen, nicht vorlag.

etwa 8 cm Hg erreicht hatte, was das Austreten von Gasblasen in *M* anzeigte, wurde der Hahn *D* vorsichtig geöffnet, sodass im Eisenrohr Ueberdruck blieb, und es traten die Absorptionsapparate in Thätigkeit. Der Natronkalk in *E* absorbirte Kohlensäure, das Kupferoxyd in *F* Wasserstoff und Kohlenwasserstoffe. Als sich nach einigen Minuten so viel Rohhelium entwickelt hatte, dass wieder 8 cm Hg-Druck vorhanden war, wurde der Hahn *h* zum Gasometer geöffnet und in diesem ein grosser Teil des bei etwa $^3/_4$ Stunde Erhitzen freiwerdenden Rohgases unter Ueberdruck aufgenommen. Nach Abschluss von *h* wurde der in den Zuleitungen befindliche Rest durch Oeffnen von *g* (nur einige Secunden) in die evacuirte Pumpe genommen, von wo er mit Hülfe des zur Pumpe gehörigen, zu diesem Zwecke etwas modificirten Gasentbindungsrohres in den Gasometer *H* befördert wurde. Eine Verunreinigung durch Luft war auch bei diesen Operationen ausgeschlossen.

Ein später angestellter Versuch ergab, dass bei $^3/_4$ stündigem Erhitzen auf Hellrotglut in der That alles Helium aus dem Monazitsand ausgetrieben war. Eine kleine Menge von dem geglühten Sand, der übrigens eine stahlgraue Farbe hat, während der frische Monazitsand goldgelb aussieht, gemischt mit dem gleichen Gewicht Kaliumdichromat (vorher geschmolzen und zerrieben)[1]) gab beim Erhitzen im Vacuum der Töpler-Hagen-Pumpe keine Spur Helium mehr ab.

Zur Füllung eines Gasometers (1 Liter Inhalt) waren fünf Portionen Monazitsand von je 2 kg nötig. Es wurden zwei Gasometer voll Rohhelium dargestellt.

Das Kupferoxyd in *F* wurde nach Verarbeitung jeder Portion, der Natronkalk in *E* nach Verarbeitung jeder zweiten oder dritten Portion erneuert.

### b) Reinigung des Rohheliums.

In dem Rohhelium waren folgende Verunreinigungen zu vermuten: Kohlensäure, Wasserstoff, Kohlenwasserstoffe und möglichenfalls Spuren von Stickstoff. Diese Verunreinigungen zu entfernen, wurde die in Fig. 2 angegebene endgültige Anordnung getroffen.

---

1) H. Erdmann, Lehrb. d. anorg. Chem. II. Aufl. p. 209. 1900.

*B*, *F* und *N* sind Verbrennungsrohre aus Glas in kleinen Gasöfen, und zwar enthält *B* die Maquenne'sche Mischung[1]) zur Beseitigung von etwaigem Stickstoff, *F* Bleichromat zur Aufnahme von Kohlenwasserstoffen und im Wasserstoffstrom geglühte metallische Kupferspiralen zur Beseitigung von aus dem Bleichromat sich entwickelndem Sauerstoff, *N* Kupferoxyd zur Beseitigung von Wasserstoff und etwaigen Resten von Kohlenwasserstoffen. *A*, *D*, *G*, *J* sind Trockenrohre mit Natronkalk und Phosphorpentoxyd, *C* ein U-Rohr mit reiner concentrirter Schwefelsäure auf Bimsstein (vorher geglüht) zur Beseitigung von Ammoniak aus der Maquenne'schen Mischung, *P* ein Rohr mit Natronkalk zur Aufnahme von Kohlensäure. Die

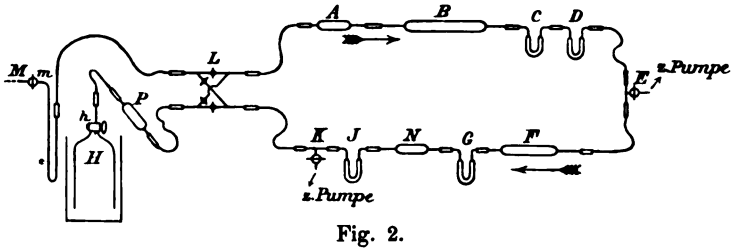



Fig. 2.

Hähne[2]) *E* und *K* können mit der Töpler-Hagen-Pumpe verbunden werden. *H* mit dem Hahn *h* ist der das Rohhelium enthaltende Gasometer, *M* mit dem Hahn *m* die Gaspipette nach Salet zur Aufnahme des Heliums. Schliesslich ist *L* das früher von mir beschriebene Röhrensystem mit vier Hähnen[3]), das ein mehrmaliges Hin- und Herdrücken des Gases durch den Apparat von *H* zu *M* und umgekehrt immer in der Pfeilrichtung gestattete.

Als Verbindungen der einzelnen Teile des Apparates dienten wieder Bleirohre und kurze Stücke dickwandiger Gummischlauches, die mit Gummifäden befestigt wurden.

Der Verlauf der Operationen war folgender. Es wurde das ganze Röhrensystem bis zu den Hähnen *m* und *h* mittels der an *E* angelegten Töpler'schen Pumpe längere Zeit schar

1) W. Hempel, Gasanalyse III. Aufl. p. 149. 1899.

2) Sämtliche Gashähne und Schliffe wurden mittels einer Wachs Vaselin-Mischung, die bekanntlich keine Dämpfe abgiebt, gedichtet.

3) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 158. 1901.

evacuirt, die Maquenne'sche Mischung bis zur Dunkelrotglut erhitzt und das sich daraus entwickelnde Gas zuerst mit einer gutwirkenden Stiefelluftpumpe, vor welcher eine Waschflasche mit concentrirter Schwefelsäure lag, später, als nur noch geringe Gasentwickelung vorhanden, mit der Töpler'schen Pumpe abgepumpt. Als nach etwa 2 Stunden keine merkliche Gasentwickelung mehr eintrat, wurden die Verbrennungsrohre *F* und *N* erhitzt (das erstere nicht zu stark, um lebhafte Sauerstoffentwickelung aus dem Bleichromat zu vermeiden) und wieder gepumpt, bis volles Vacuum vorhanden war. Jetzt wurde *E* abgeschlossen und das Gas 13 mal in der Pfeilrichtung durch den Apparat gedrückt.

Zu bemerken ist, dass das Rohhelium aus dem einen Gasometer vor den beschriebenen Operationen in einer Anordnung gereinigt war, die sich von der obigen nur dadurch unterschied, dass das Verbrennungsrohr *F* Kupferoxyd und *N* Bleichromat enthielt. Das Gas war so durch etwas Sauerstoff aus dem Bleichromat verunreinigt worden. Bei Beginn der endgültigen Reinigung befand es sich in der Gaspipette *M* und wurde mit dem Rohhelium aus dem anderen Gasometer zusammen gereinigt.

Am Schluss der Operationen war die 500 ccm fassende Gaspipette mit Helium gefüllt. Das in den Zuleitungen enthaltene reine Gas wurde durch den Hahn *K* in die Töpler'sche Pumpe genommen und von hier in kleine Glasgasometer gebracht.

### II. Analyse des Heliums.

Das Helium aus der Gaspipette wurde in einer Geissler'schen Röhre, die vor Einlassen des Heliums vollkommen grün erschien und nur die Quecksilberlinien zeigte, mit dem kleinen Spectralapparat des Institutes untersucht. Ich gebe die Lagen der vorhandenen Linien bei 7,5 mm Druck in Scalenteilen der Vergleichsscala an, deren 100. Scalenstrich auf die Natriumlinie eingestellt war. Darunter teile ich die entsprechenden Wellenlängen in Ångström'schen Einheiten mit.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 76,2 | (sehr schwach) | 82,6 | 100,5 | 113,7 | 124 | (leise Spur einer Bande) |
| 7057 | | 6678 | 5876 | 5461 | 5201 | |
| | 131,2 | 132,8 | 137,7 | 150,2 | 167,6 | |
| | 5049 | 5016 | 4922 | 4713 | 4472 | |

Rechts und links von der äusserst hellen gelben Heliumlinie (100,5) zeigten sich von 90 bis 110 eine Menge feiner gelber Linien, die jedenfalls durch Diffraction und Reflexion zu erklären sind.

5461 ist die dritte Quecksilberlinie. Nach der Tabelle von Liveing und Dewar[1]) entsprechen den angegebenen Linien folgende Gase (die in Klammern angegebenen Zahlen sind die dort angegebenen Wellenlängen):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7057 | ? (7058) | 5016 | He (5015,7) |
| 6678 | Ne (6678,4) | 4922 | He (4922,1) |
| 5876 | He (5875,9) | 4713 | Ne (4715,4710) |
| 5049 | He (5047,8) | 4472 | He (4471,6) |

Die Bedeutung der Linie 7057, die früher dem *Argon* zugeschrieben wurde, ist danach nicht bekannt. Zweifelhaft erscheint es mir, dass die rote Linie 6678 dem *Neon* angehören soll, weil sie sehr hell ist und bei scharfem Evacuiren bis zuletzt sichtbar bleibt, während *Neon* nur in kleinen Mengen in dem Gase vorhanden sein kann. Eine endgültige Entscheidung darüber wird sich erst geben lassen, wenn die durch Ramsay[2]) angekündigten Aufnahmen des Spectrums von *reinem Neon* von Baly veröffentlicht sein werden.

Bei 2,7 mm Druck erschien dasselbe Spectrum, nur etwas lichtschwächer.

*Das Helium enthielt also jedenfalls etwas Neon.* H, N und O waren sicher nicht vorhanden; Ar aus der Luft war durch die Anordnung der oben beschriebenen Apparate ausgeschlossen.

Zwei vor Anfang und nach Schluss der Reibungsversuche gemachte genaue Dichtebestimmungen (jede an zwei Waagen) ergaben bezogen auf O = 16:

(1) $$D_{He} = 2{,}106 \pm 0{,}009,$$

(2) $$D_{He} = 2{,}063 \pm 0{,}005,$$

woraus im Mittel:

$$D_{He} = 2{,}084.$$

Bezogen auf Wasser gleich 1 ist im Mittel:

$$D_{He} = 0{,}0001862.$$

---

1) G. D. Liveing u. J. Dewar, Proc. Roy. Soc. **67**. p. 467—475. 1901.

2) W. Ramsay u. M. Travers, Zeitschr. f. Physik. Chem. **35**. p. 634. 1900.

Die Dichte des reinen Neons ist nach Ramsay und Travers[1]) auf O = 16 bezogen:

$$D_{Ne} = 9{,}97$$

und die Dichte des reinen Heliums:

$$D_{He\ (rein)} = 1{,}98.$$

*Das Gas enthielt danach 1,25 Volumenprocente Neon.* Die Befreiung des Heliums von Neon wäre vielleicht mit Hülfe von flüssigem Wasserstoffe möglich gewesen. Ich musste jedoch vorläufig auf einen solchen Versuch verzichten, da die Universität Halle die dazu notwendigen Apparate nicht besitzt.

### III. Reibungsversuche mit Helium.

Der bei der Argonuntersuchung benutzte Reibungsapparat wurde unverändert beibehalten.[2]) Es galten also für alle Teile dieselben Constanten und Correctionen wie früher. Die Beobachtungsmethode war dieselbe wie bei den Versuchsreihen mit Argon. Die Manometer wurden kurz vor Beginn der Versuche neu graduirt; ihre Nulllagen waren nach deren Schluss nicht geändert. Auf Inrechnungsetzung der Temperaturänderungen der Manometer wurde verzichtet, da dadurch die Endresultate nicht geändert würden.

Als Gleitungscoefficient wurde die theoretisch gleichgrosse Weglänge in Rechnung gesetzt, die sich nach den Formeln der kinetischen Gastheorie[3]) aus $D_{He} = 0{,}000\,186\,2\ \eta_0'$ (ohne Berücksichtigung der Gleitung) $= 1871.10^{-7}$ als $L = 0{,}000\,027\,6$ cm ergiebt.

Um zu prüfen, ob der Apparat richtige Werte liefert, wurden vor wie nach der Versuchsreihe mit Helium je zwei Versuche mit trockener Luft angestellt. Es ergab sich im Mittel $\eta'.10^7 = 1790$ bei 12,9°, $= 1800$ bei 15,0°, was mit dem früher von mir bestimmten Werte $\eta'.10^7 = 1802$ bei 15,0° [4]) sehr gut übereinstimmt.

Was die Bezeichnungen der Tabelle anbetrifft, so verweise ich betreffs ihrer Bedeutung und ihres Zusammenhanges

1) l. c.
2) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 141 ff. 1901.
3) O. E. Meyer, Kinet. Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 56 u. 189. 1899.
4) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 157. 1901.

auf die Argonuntersuchung. Zur sofortigen Orientirung bemerke ich hier, dass $T'$ die Temperatur bedeutet, für welche der Reibungscoefficient ($\eta'$ ohne, $\eta$ mit Berücksichtigung der Gleitung) gültig ist. Hinter jeder Versuchsreihe habe ich den Relativwert bezogen auf trockene atmosphärische Luft angegeben.

Ich fand bei 15,0° $\eta_{He} = 1{,}086\,\eta_{Luft}$, während Rayleigh 0,96 als Relativwert angiebt. Sein Wert ist also um 10 Proc. zu klein, wie ich schon oben bemerkte. Rayleigh's Versuchsanordnung erklärt, wie seine Resultate über Argon beweisen, die mit den meinigen fast übereinstimmen, so grosse Fehler nicht. Es bleibt also nur übrig anzunehmen, dass das damals von Rayleigh benutzte Helium, über dessen Spectrum und Dichtigkeit er nichts angiebt, starke Verunreinigungen enthielt, die den Reibungscoefficienten kleiner machten. Unter der Annahme, dass nicht *Neon*, sondern *Argon* ($^1/_2$ Proc.) die Verunreinigung in dem von mir untersuchten Gase ist, ergiebt die Puluj'sche Formel[1]) für Gasgemische, dass der Reibungscoefficient des Gases etwa 1 Proc. grösser ist als der des *reinen Heliums*. Für *Neon* lässt sich die Rechnung nicht führen, weil sein Reibungscoefficient unbekannt ist; doch ist eine viel grössere Abweichung nicht zu vermuten. Ich glaube also annehmen zu dürfen, dass sich der Reibungscoefficient des *reinen Heliums* von dem von mir bestimmten um höchstens 1—2 Proc. unterscheidet.

Betreffs der Abhängigkeit der Reibung von Helium von der Temperatur ergiebt sich aus meinen Beobachtungen, falls man $\eta_\vartheta = \eta_0 (1 + \alpha\,\vartheta)^n$ setzt, für je zwei aufeinanderfolgende Temperaturen:

| $\vartheta$ | $\eta \cdot 10^7$ | $n$ |
|---|---|---|
| 15,3 | 1969 | 0,6852 |
| 99,6 | 2348 | 0,6771 |
| 184,6 | 2699 | |

Nach der Formel von Sutherland[2]) ergiebt die Methode der kleinsten Quadrate aus den drei beobachteten $\eta_\vartheta$

$$\eta_0 = 1891 \cdot 10^{-7}, \qquad C = 80{,}3.$$

1) O. E. Meyer, Kinet. Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 203. 1899.
2) O. E. Meyer, l. c. p. 168 u. 211.

Versuche mit Helium

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *R* | 15,3 | 16,6 | 3,027 | 11,028 | 74,954 | 2100 | 365,59 | 1955 | — | 30./III. | 2h 46m 12,5s |
| 2 | *L* | 15,6 | 16,9 | 2,981 | 11,003 | 74,994 | 2100 | 366,76 | 1954 | — | „ | 4 18 20,0 |
| 3 | *R* | 15,9 | 17,4 | 3,027 | 11,028 | 74,925 | 2100 | 368,13 | 1948 | — | „ | 5 26 15,5 |
| 4 | *L* | 15,8 | 17,6 | 2,981 | 11,003 | 74,960 | 1500 | 264,45 | 1938 | — | „ | 6 36 50,5 |
| 5 | *R* | 14,6 | 15,4 | 3,027 | 11,028 | 74,880 | 2100 | 367,91 | 1940 | — | 31./III. | 8 22 50,5 |
| 6 | *L* | 14,6 | 15,4 | 2,981 | 11,003 | 74,826 | 2100 | 370,16 | 1933 | — | „ | 9 34 44,0 |
| 7 | *R* | 15,5 | 14,2 | 3,027 | 11,028 | 75,559 | 2100 | 364,80 | 1943 | — | 3./IV. | 12 1 18,0 |
| 8 | *L* | 15,4 | 14,6 | 2,981 | 11,003 | 75,570 | 2100 | 368,01 | 1934 | — | „ | 3 6 51,0 |
| 9 | *R* | 15,3 | 14,7 | 3,027 | 11,028 | 75,508 | 2100 | 366,06 | 1941 | — | „ | 4 26 40,0 |
| | | 15,3 | — | 3,007 | 11,017 | 75,140 | — | — | 1942 | 1969 | | |

$\eta_{He} = 1{,}086 \cdot \eta_{Luft}$ bei 15,0°.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | *R* | 99,6 | 15,7 | 3,027 | 11,028 | 74,749 | 2400 | 270,56 | 2333 | — | 31./III. | 11h 21m 1,5s |
| 11 | *L* | 99,6 | 15,9 | 2,981 | 11,003 | 74,712 | 2400 | 274,43 | 2307 | — | „ | 12 41 16,0 |
| 12 | *R* | 99,6 | 16,6 | 3,027 | 11,028 | 74,621 | 2400 | 272,45 | 2324 | — | „ | 3 25 15,0 |
| 13 | *L* | 99,5 | 16,8 | 2,981 | 11,003 | 74,549 | 2400 | 275,19 | 2308 | — | „ | 5 0 50,5 |
| 14 | *R* | 99,6 | 16,4 | 3,027 | 11,028 | 74,817 | 2400 | 272,93 | 2318 | — | 1./IV. | 2 19 49,0 |
| 15 | *L* | 99,6 | 16,6 | 2,981 | 11,003 | 74,916 | 2400 | 276,31 | 2297 | — | „ | 3 42 0,0 |
| | | 99,6 | — | 3,004 | 11,016 | 74,727 | — | — | 2315 | 2348 | | |

$\eta_{He} = 1{,}063 \cdot \eta_{Luft}$ bei 99,7°.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | *R* | 183,6 | 14,9 | 3,027 | 11,028 | 76,034 | 3000 | 242,45 | 2656 | — | 2./IV. | 10h 34m 0,5s |
| 17 | *L* | 185,0 | 15,1 | 2,981 | 11,003 | 76,052 | 3000 | 242,63 | 2655 | — | „ | 11 54 40,5 |
| 18 | *R* | 185,1 | 15,2 | 3,027 | 11,028 | 76,110 | 3000 | 239,38 | 2685 | — | „ | 4 8 19,5 |
| 19 | *L* | 184,6 | 15,3 | 2,981 | 11,003 | 76,110 | 3000 | 243,33 | 2651 | — | „ | 5 31 27,5 |
| | | 184,6 | — | 3,004 | 11,016 | 76,077 | — | — | 2662 | 2699 | | |

$\eta_{He} = 1{,}047 \cdot \eta_{Luft}$ bei 182,9°.

Die Zusammenstellung der mit Hülfe dieser Werte berechneten $\eta$ mit den beobachteten ergiebt:

| $\vartheta$ | $\eta\,10^7$ beob. | $\eta\,10^7$ ber. |
|---|---|---|
| 15,3 | 1969 | 1967 |
| 99,6 | 2348 | 2353 |
| 184,6 | 2699 | 2697 |

Die Sutherland'sche Formel giebt also sehr gute Uebereinstimmung mit der Beobachtung.

Rayleigh's $n = 0{,}681$ stimmt mit den von mir bestimmten nahe überein. Dass es kleiner ist, wäre zu erwarten, weil bei Rayleigh's Anordnung mangelhafte Vorwärmung des Gases in der Capillare zu vermuten ist. Andererseits hatte Rayleigh bei dieser Bestimmung *vollkommen reines Helium* zur Verfügung; ich wage also meinen Wert nicht als zuverlässiger hinzustellen. $C$ (Sutherland) = 72,2 fällt bei Rayleigh etwas kleiner aus, weil es sich nur auf das Intervall 15—100° bezieht.

### IV. Eine auffällige Erscheinung bei der Transpiration von Gasgemischen.

Bei den vorliegenden Versuchen mit Helium ist eine starke, oft über 1 Proc. gehende Abweichung der einzelnen beobachteten Reibungscoefficienten voneinander auffällig, die aus einem Fehler im Apparat oder in den Beobachtungen nicht zu erklären ist. Denn einerseits zeigten die Vorversuche mit Luft solche Abweichungen nicht, andererseits blieben diese für He selbst bei sorgfältigster Beobachtung bestehen. Auch hatte der Apparat früher auf $^1/_3$ Proc. übereinstimmende Werte gegeben. Der Grund muss also in der Natur des untersuchten Gases liegen. Feuchtigkeit im Apparat war ausgeschlossen.

Ein Vergleich der Resultate aus den einzelnen Versuchen ergiebt folgende Gesetzmässigkeit.

Jeder erste, sowie jeder nach mehrstündigem Stehen des Apparates angestellte Versuch zeigt einen grossen Wert des Reibungscoefficienten, während aus den sich zeitlich direct anschliessenden Versuchen[1]) bis über 1 Proc. kleinere Werte resultiren. Diese letzteren sind nahezu untereinander gleich,

1) Das Gas wurde abwechselnd von rechts nach links ($R$) und von links nach rechts ($L$) gedrückt.

während in betreff der ersteren eine stetige Abnahme vom ersten Versuch an zu bemerken ist.

Diese Gesetzmässigkeit zeigt sich unzweifelhaft in den Versuchen 1—6 (hier etwas verwischt), 10—15 (hier besonders scharf) und 18 u. 19. Bei den herausfallenden Versuchen 7—9 und 16—17 können 7 und 16 nicht als erste Versuche nach längerem Stehen des Apparates angesehen werden, weil zuvor ein längeres Hinüberdrücken von Gas von links nach rechts nötig war.

In den mitgeteilten Versuchen zeigen nur solche einen hohen Wert, bei denen das Gas von rechts nach links durch den Apparat getrieben wurde. Es erklärt sich daraus, dass zufällig jeder erste Versuch nach längerem Stehen des Apparates in dieser Richtung erfolgte. Versuche, die ich zu einer (allerdings unzureichenden) Erklärung der angegebenen Erscheinung mit einem Gemisch von etwa 92 Proc. Stickstoff und 8 Proc. Wasserstoff anstellte, und bei denen dieselben Abweichungen hervortraten, zeigten die grösseren Werte der ersten Versuche auch bei umgekehrter Strömungsrichtung.

Beobachtungen ähnlicher Art, die zum Vergleich herangezogen werden könnten, scheinen nicht vorzuliegen. Hr. O. E. Meyer, dem ich hier für seine liebenswürdige Auskunft meinen besten Dank aussprechen möchte, teilte mir auf meine Anfrage nach etwaiger einschlägiger Literatur mit, dass ihm bei seinen zusammen mit Hrn. Springmühl angestellten Versuchen mit Luft eine Abnahme des Reibungscoefficienten bei Umkehrung der Strömungsrichtung aufgefallen sei[1]), jedoch nur bei einer Capillare. Er suchte deshalb auch den Grund für diese Abweichung in der Beschaffenheit der Capillare. Dass die vorliegende Erscheinung darin nicht ihren Grund haben kann, geht schon daraus hervor, dass die Vorversuche mit Luft, sowie frühere Versuche die erwähnten Abweichungen nicht zeigten. Im übrigen weiss sich Hr. Meyer ähnlicher Versuche nicht zu erinnern.

Eine ausreichende Erklärung dieser Erscheinung, die, wie schon erwähnt, in der Natur des Gases, oder vielleicht besser

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 148. p. 20—22. Vers. 1—7 und p. 26—29. Vers. 19—25. 1873.

Gasgemisches, ihren Grund haben muss, ist mir bisher nicht gelungen.

Die Constanthaltung des Druckes an dem zweiten Manometer besorgte in den meisten Fällen der Institutsmechaniker Hr. Böckel. Im übrigen bin ich in dieser Hinsicht den Herren Dr. Berndt, Dr. Heyse und cand. math. Lindemann zu Dank verpflichtet.

Besonders möchte ich Hrn. Prof. Dorn für die Anregung zu dieser Arbeit meinen besten Dank auch an dieser Stelle aussprechen.

Halle, Physikalisches Institut, 3. Juli 1901.

(Eingegangen 16. Juli 1901.)

PHYSIK LIBRARY
STOCK, LIBRARY OF
THE GRADUATE SCHOOL

# ANNALEN
DER
# PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN

**VIERTE FOLGE.**

BAND 6. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 311. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

**M. PLANCK**

HERAUSGEGEBEN VON

**PAUL DRUDE.**

LEIPZIG, 1901.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

*Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den vo- 12 Heften (= 3 Bänden) umfassenden Jahrgang 36 M.*

# Inhalt.


Seite

1. Peter Lebedew. Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes . . . . . 433
2. W. Voigt. Beiträge zur Elektronentheorie des Lichtes . . . 459
3. J. Koenigsberger. Ueber die Verwendung des Quadrantelektrometers zur ballistischen Messung der magnetischen Feldstärke und über die Susceptibilität des Wassers . . . . . 506
4. E. Wenzel. Beitrag zur Kenntnis der Volumen- und Dichtigkeitsänderungen von Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen 520
5. Max Reinganum. Zur Theorie der Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase . . . . . 533
6. Max Reinganum. Beitrag zur Prüfung einer Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase . . . . . 549
7. Leo Grunmach. Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung flüssiger Luft . . . . . 559
8. Robert Weber. Zur Sichtbarmachung der Deformation von Wechselströmen . . . . . 565
9. E. Aschkinass und W. Caspari. Ueber die Wirkung der Becquerelstrahlen auf Bacterien . . . . . 570
10. V. H. Veley und J. J. Manley. Ueber zwei einfache Methoden, Refractometerkreise zu calibriren . . . . . 575
11. H. Maurach. Ueber die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effectverlustes im Eisen von der Stärke der Magnetisirung . . . . . 580
12. Georg W. A. Kahlbaum. Glossen zu der selbstthätigen Quecksilberluftpumpe . . . . . 590
13. F. F. Martens. Ueber die Dispersion ultravioletter Strahlen 603
14. Max Kohl. Transportabler Apparat für Cavendish's Versuch über Massenanziehung . . . . . 641
15. F. Paschen. Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers. Entgegnung auf Ausführungen der Herren O. Lummer und E. Pringsheim . . . . . 646
16. A. Baur. Bemerkung zu der Mitteilung des Hrn. L. Lewin: „Zur Geschichte der Telegraphie“ . . . . . 659



Manuscripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude**, zu senden. Seine Adresse ist **Giessen**, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Citate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.



Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung *gestattet*.

# *...ber die Abhängigkeit der elektrolytischen ...führung und der elektromotorischen Kraft ...ibler Elemente von physikalischen Einflüssen;*

*von R. Gans.*

## I. Theoretischer Teil.

### § 1. Bezeichnungen und Kettenprocesse.

...ss die elektrolytischen Ueberführungszahlen von der ...ration und der Temperatur der Lösungen abhängen, ...eits durch Versuche von Hittorf[1]), Bein[2]) u. a. festworden.

...ir wollen die Abhängigkeit der elektrolytischen Ueber...g von physikalischen Parametern aus der Abhängigkeit ...motorischer Kräfte von den entsprechenden Parametern ...itteln suchen.

...vor wir daher an unsere eigentliche Arbeit gehen, ... wir die Kettenvorgänge von Elementen betrachten, ... eine theoretische Behandlung auf thermodynamischem ...ulassen, um ein für alle Mal die in dieser Arbeit be...Terminologie festlegen zu können.

...e *Elemente erster Art* bezeichnen wir die von Helm...) zuerst behandelten Concentrationsketten, welche fol...maassen zusammengesetzt sind: Die Anode und die ...de bestehen aus demselben Metall, als Flüssigkeiten ...alzlösungen dieses Metalles verwendet, die sich nur ...ihre Concentrationen unterscheiden, und zwar wird, wie ...hen werden, die verdünnte Lösung sich an der Anode ...n, während die concentrirtere an der Kathode sein wird.

---

...W. Hittorf, Pogg. Ann. **89.** p. 177. 1853; **98.** p. 1. 1856; **103.** ...; **106.** p. 337. 1859.

...W. Bein, Wied. Ann. **46.** p. 29. 1892.

...H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. **1.** p. 840. 1882 und ...m. **3.** p. 201. 1878.

Nernst[1]) nennt diese Ketten Elemente mit bezüglich des Kations umkehrbaren Elektroden, Ostwald[2]) bezeichnet die Elektroden als Elektroden mit beweglichem Kation.

Wählen wir die Concentrationen so wenig verschieden, dass die Ueberführungszahlen des Salzes in der Kathodenflüssigkeit sich für unsere Zwecke nicht wesentlich von denen der Anodenflüssigkeit unterscheiden, so ist der Kettenprocess beim Durchgang der Einheit der Elektricitätsmenge infolge der eigenen Spannung der, dass ein Aequivalent des Metalles von der Anode zur Kathode überführt ist, während $1-n$ Aequivalente des Salzes aus der Kathodenflüssigkeit zur Anodenflüssigkeit überführt worden sind, wenn $n$ die Ueberführungszahl des Kations bezeichnet.

Ein Beispiel der Elemente dieser Art ist

$$\mathrm{Zn} \;|\; \underset{h_1}{\mathrm{ZnSO_4}} \;|\; \underset{h_2}{\mathrm{ZnSO_4}} \;|\; \mathrm{Zn}.$$

$h$ bedeutet hier wie im Folgenden ein Maass der Concentration.

Als *Elemente zweiter Art* (nach Nernst: Elemente mit bezüglich des Anions umkehrbaren Elektroden, nach Ostwald: Elemente mit Elektroden mit beweglichem Anion) bezeichnen wir die Ketten von folgendem Typus:

$$\mathrm{Hg} \;|\; \mathrm{Hg_2SO_4}\text{ festes Salz} \;|\; \underset{h_1}{\mathrm{ZnSO_4}} \;|\; \underset{h_2}{\mathrm{ZnSO_4}} \;|\; \mathrm{Hg_2SO_4}\text{ festes Salz} \;|\; \mathrm{Hg}.$$

Der Vorgang beim Durchgang der Elektricitätsmenge 1 in Richtung des Kettenstromes ist folgender: Ein Aequivalent des Anions wird von der Kathode zur Anode transportirt, wo es sich mit dem metallischen Quecksilber zum depolarisirenden Salz vereinigt, während $n$ Aequivalente Salz von der concentrirteren (Anoden-)Flüssigkeit zur verdünnteren (Kathoden-) Flüssigkeit geschafft werden.

Als *Elemente dritter Art* bezeichnen wir ein System von zwei gegen einander geschalteten Ketten mit Flüssigkeiten verschiedener Concentration nach Art des Helmholtz'schen

1) W. Nernst, Theoretische Chemie, 2. Aufl. p. 648. 1898.

2) W. Ostwald, Lehrb. der allgemeinen Chemie 2. p. 817. 1893.

Zinkchlorid-Calomel-Elementes, welches folgendermaassen zusammengesetzt ist:

$$Zn \mid ZnCl_2 \mid Hg_2Cl_2 \text{ festes Salz} \mid Hg,$$

sodass unser System das Schema hat:

$$Zn \mid \underset{h_1}{ZnCl_2} \mid Hg_2Cl_2 \mid Hg \mid - \mid Hg \mid Hg_2Cl_2 \mid \underset{h_2}{ZnCl_2} \mid Zn.$$

Bei dieser Gegeneinanderschaltung ist das Resultat beim Durchgang der Elektricitätsmenge 1 in Richtung des Kettenstromes dasselbe, als ob ein Aequivalent des Metalles von der Anode des Systems zur Kathode überführt wäre, und als ob ein Aequivalent Salz aus der concentrirteren (Kathoden-)Flüssigkeit zur weniger concentrirten (Anoden-)Flüssigkeit transportirt wäre.

Schliesslich nennen wir *Elemente vierter Art*, die, welche nach dem Typus des Daniell'schen Elementes zusammengesetzt sind. Der Kettenvorgang ist der, dass die Anode ein Aequivalent ihres Metalles verliert, die Kathode ebensoviel vom ihrigen gewinnt, dass ein Aequivalent Salz aus der Kathodenflüssigkeit ausgetrieben wird und ebensoviel zur Anodenflüssigkeit hinzukommt.

Wir deuten den Vorgang an:

$$Zn \mid ZnSO_4 \mid CuSO_4 \mid Cu.$$

$$-1\,Zn \quad +1\,ZnSO_4 \quad -1\,CuSO_4 \quad +1\,Cu.$$

Diese Vorgänge sind im Sinne der Thermodynamik reversibel, da sie aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehen. Allerdings müssen wir von der irreversiblen Diffusion absehen, die wir durch geeignete Wahl der Gefässe (Capillarrohre) oder die Diffusion hemmende Einrichtungen (Diaphragmen) beliebig klein machen können. Ferner gehört die Entwickelung Joule'scher Wärme zu den irreversiblen Processen; diese ist aber dem Quadrat der unendlich klein anzunehmenden Stromstärke proportional, während die übrigen Energieleistungen der Stromintensität direct proportional sind, sodass jene gegen diese zu vernachlässigen ist.

**§ 2. Ableitung der allgemeinen Formel für die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von irgend einem Zustandsparameter.**

Bezeichnet $U$ die Energie, $S$ die Entropie des Systems, $dA$ die vom System geleistete Arbeit, so gilt die Gleichung

$$dA = -dU - TdS, \tag{1}$$

worin $T$ die absolute Temperatur bedeutet. $U$ und $S$ sind nach den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie Functionen der das System bestimmenden Parameter allein.

Wir nehmen $\delta A$ in der Form an

$$\delta A = \sum_i P_i \delta q_i + E\delta e, \tag{2}$$

wo $E$ die elektromotorische Kraft des Elementes, $\delta e$ die in Richtung des Kettenstromes hindurchgegangene unendlich kleine Elektricitätsmenge, $\sum_i P_i \delta q_i$ die unendlich kleinen frei verwandelbaren Energieleistungen ausser der elektrischen Energie bedeuten.

Nehmen wir die Ueberführungszahlen als variabel an, so ist der Zustand der Kette nicht mehr definirt durch die in bestimmter, als positiv zu bezeichnender Richtung durch das Element geflossene Elektricitätsmenge; wir wählen deshalb als unabhängige, das System bestimmende Parameter die absolute Temperatur $T$, die in der verdünnteren Flüssigkeit (bez. Anodenflüssigkeit bei Elementen vierter Art) hinzugekommene Salzmenge $s$ und ausserdem noch eine beliebige, aber endliche Zahl Zustandsparameter $x_k$.

Bezeichnen wir alle auf die concentrirteren Lösungen bezüglichen Grössen mit dem Index 1, die auf die verdünnteren bezüglichen mit 2, so gilt die Beziehung

$$\delta s_2 = -\delta s_1 = \delta s, \tag{3}$$

wenn wir die Salzmenge $s$ in Gramm-Aequivalenten messen.

Wir wollen vom Zustand der Elektroden und den durch ihre Veränderungen verursachten Energieumsätzen absehen.

Dann geht die Gleichung (1) in die Form über

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_i \left[ P_i \left( \frac{\partial q_i}{\partial T} \delta T + \frac{\partial q_i}{\partial s} \delta s + \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \delta x_k \right) \right] \\ \qquad + E \left( \frac{\partial e}{\partial T} \delta T + \frac{\partial e}{\partial s} \delta s + \sum_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \delta x_k \right) \\ \qquad = - \frac{\partial U}{\partial T} \delta T - \frac{\partial U}{\partial s} \delta s - \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \delta x_k \\ \qquad - T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \delta T + \frac{\partial S}{\partial s} \delta s + \sum_k \frac{\partial S}{\partial x_k} \delta x_k \right). \end{cases}$$

Alle Arbeitsgrössen sind für die Flüssigkeit 1 und für die Flüssigkeit 2 zu bilden und summirt zu denken.

Da die Variationen voneinander unabhängig sind, müssen die Gleichungen zwischen den einzelnen Coefficienten der Variationen bestehen.

Da Elektricitätsströmung immer gleichzeitig mit Salzüberführung verbunden ist und auch nur durch Salzüberführung veranlasst werden kann, so ist

$$\frac{\partial e}{\partial T} = 0, \qquad \frac{\partial e}{\partial x_k} = 0.$$

Ferner setzen wir

$$(5)\qquad \frac{\partial e}{\partial s} = k.$$

$k$ bedeutet bei Elementen erster Art $1/1 - n$, bei Elementen zweiter Art $1/n$, bei Elementen dritter und vierter Art ist $k = 1$.

Um die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von einem Zustandsparameter $x_k$ zu bestimmen, differentiiren wir die erste der beiden folgenden Gleichungen, die sich aus (4) ergeben, nach $x_k$, die zweite nach $s$:

$$(4a)\qquad \sum_i \left| P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right|_1^2 + k E = - \frac{\partial U}{\partial s} + T \frac{\partial S}{\partial s} \Big|_1^2,$$

$$(4b)\qquad \sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} + T \frac{\partial S}{\partial x_k} \right).$$

Hierin bedeutet

$$| A |_1^2 = A_2 - A_1.$$

Die Differentiationen ermöglichen die Elimination von $U$ und $S$ und ergeben:

$$\frac{\partial k E}{\partial x_k} = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right]_1^2. \tag{6}$$

Bezeichnen wir mit $E'$ speciell ein Element dritter Art derselben Zusammensetzung, so ist, da hier $k = 1$ ist, während die rechte Seite unverändert bleibt,

$$\frac{\partial k E}{\partial x_k} = \frac{\partial E'}{\partial x_k}. \tag{7}$$

Aus (4a) folgt durch Anwendung auf ein Element erster bez. zweiter Art und das entsprechende Element dritter Art

$$k E = E'. \tag{8}$$

Differentiation von (8) nach $T$ ergiebt

$$\frac{\partial k E}{\partial T} = \frac{\partial E'}{\partial T}. \tag{9}$$

Gleichung (8) hat James Moser[1]) zur Bestimmung von Ueberführungszahlen angewandt durch Messung der elektromotorischen Kraft eines Elementes erster Art und des entsprechenden dritter Art.

Wir können diese Gleichung oder besser Gleichung (7) bez. (9) benutzen, um die Abhängigkeit der Ueberführung von irgend einem Zustandsparameter $x$ zu bestimmen.

(7) bez. (9) ergiebt nämlich

$$k \frac{\partial E}{\partial x} + E \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial E'}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\frac{\partial E'}{\partial x} - k \frac{\partial E}{\partial x}}{E}. \tag{10}$$

Wir haben eine gute Controle für die Richtigkeit der Resultate, wenn wir einmal die Messungen mit einem Element erster und einem dritter Art machen, dann aber auch mit einem zweiter und einem dritter Art; denn so bestimmen wir einmal $\partial(1-n)/\partial x$, das andere Mal $\partial n/\partial x$, deren Summe Null ergeben muss.

1) James Moser, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) **92.** p. 652. 1886.

### § 3. Die Abhängigkeit der Ueberführungszahl und der elektromotorischen Kraft vom Druck.

In vielen Fällen wird die Benutzung von Formel (6) einfacher sein, da man dann nur die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft eines einzigen Elementes von dem betreffenden Parameter zu messen braucht. Es kommt dann nur darauf an, die rechte Seite der Gleichung in jedem speciellen Falle zu bestimmen.

Gleichzeitig wird sich die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft der entsprechenden Elemente dritter und vierter Art von diesem Zustandsparameter ergeben.

Z. B. wollen wir die Abhängigkeit der Ueberführungszahl vom Druck behandeln.

Wir setzen in Gleichung (6)

$$x_k = p.$$

Die unendlich kleine Arbeit $\sum_i P_i dq_i$ reducirt sich auf das eine Glied $p\,dv$, und so bekommen wir

$$(11) \qquad \frac{\partial kE}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial s}\left(p\frac{\partial v}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial v}{\partial s}\right)\Big|_1^2 = -\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_1^2.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich $\partial k/\partial p$, wenn $\partial E/\partial p$ gemessen ist, denn die rechte Seite können wir folgendermaassen ausdrücken:

Es ist

$$v = (w + s)\varphi,$$

wo $w$ die Masse des Wassers, $s$ die Masse des Salzes, $\varphi$ das specifische Volumen der Lösung ist. Setzen wir ferner als Concentrationsmaass

$$\frac{s}{w + s} = h,$$

so ist, da $w$ constant ist,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial h}(1 - h),$$

wo $\varphi$ natürlich eigentlich das specifische Volumen der Lösung beim Drucke $p$ ist; bei der geringen Compressibilität kann

man jedoch, wie auch Gilbaut[1]) es gethan hat, das specifische Volumen als vom Druck unabhängig ansehen, d. h. die Compressibilität vernachlässigen.

Für Elemente dritter und vierter Art ergiebt sich

$$\frac{\partial E'}{\partial p} = -\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_1^2. \tag{11a}$$

Die Gleichung (11a) findet sich bereits bei Duhem[2]) und bei Gilbaut[1]) und ist von letzterem ausser an anderen Elementen auch am Daniell'schen Element geprüft worden. Die Theorie stimmte mit der Erfahrung gut überein.

Da die Gleichung (11a) nicht allgemein gilt, sondern nur für Elemente dritter und vierter Art, so gelten die aus derselben von Duhem gezogenen Folgerungen auch nicht für Elemente erster und zweiter Art.

Duhem folgert (l. c.):

1. Wenn bei Stromdurchgang Volumenvergrösserung stattfindet, so nimmt die elektromotorische Kraft mit wachsendem Druck ab.

Wir können in diesem Falle nur schliessen: Die relative Aenderung der elektromotorischen Kraft bei Elementen erster (zweiter) Art durch den Druck ist kleiner als die relative Aenderung der Ueberführungszahl des Anions (Kations) mit dem Druck.

2. Wenn bei Stromdurchgang Volumenverkleinerung stattfindet, so nimmt die elektromotorische Kraft mit wachsendem Druck zu.

Für uns gilt dann nur: Die relative Aenderung der elektromotorischen Kraft ist grösser als die relative Aenderung der Ueberführungszahl.

3. Wenn bei Stromdurchgang keine merkliche Volumenänderung stattfindet, ist die elektromotorische Kraft merklich vom Druck unabhängig.

Für uns bedeutet das: Die relative Aenderung der elektromotorischen Kraft ist merklich gleich der relativen Aenderung der Ueberführungszahl.

Für Elemente dritter und vierter Art sind die Duhem'schen Sätze richtig.

---

1) H. Gilbaut, Compt. rend. **113**. p. 465. 1891.

2) P. Duhem, Le potentiel thermodynamique p. 117. 1886.

Niemöller[1]) hat auch einen Ausdruck für die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft vom Drucke abgeleitet, jedoch begeht er den Fehler, dass er das Volumen $v_0$, welches zum Drucke $p_0$ gehört, also eine Function von $s$ ist, bei der Differentiation nach $s$ als Constante betrachtet; dadurch ist das wesentlich in Betracht kommende Glied vernachlässigt.

Braun[2]) hat wohl zuerst die Aenderung der elektromotorischen Kraft einer Concentrationskette bei Druckerhöhung beobachtet und auch durch die Volumenänderung infolge des Kettenprocesses gedeutet. Er weist auch darauf hin, dass eine quantitative Verfolgung dieser Thatsache entscheiden lassen würde, ob und wie die elektrolytische Ueberführung sich mit dem Druck ändert.

Auf analoge Weise, wie oben die Abhängigkeit der Ueberführungszahl vom Druck bestimmt ist, kann man auch die Abhängigkeit von der Concentration ermitteln. Jedoch ist darauf zu achten, dass die beiden Lösungen des Elementes sich in ihren Concentrationen nur so weit unterscheiden, dass in diesem Intervall die Ueberführungszahl merklich denselben Wert hat. Wir wollen jedoch von der Entwickelung der hierauf bezüglichen einfachen Formeln absehen und sofort die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von der Temperatur betrachten.

### § 4. Die Abhängigkeit der Ueberführungszahl und der elektromotorischen Kraft von der Temperatur; die vervollständigte Helmholtz'sche Formel.

Um die Abhängigkeit der Ueberführungszahl von der Temperatur zu bestimmen, führen wir in (4) die Wärme $Q$ ein, d. h. wir setzen $T\,dS = dQ$, dann erhalten wir als Coefficienten von $\delta s$ und $\delta T$

$$k\,E + \sum_i \left| P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right|_1^2 = - \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right|_1^2 - \left| \frac{\partial Q}{\partial s} \right|_1^2, \tag{4a}$$

$$\sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} = - \frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\partial Q}{\partial T}. \tag{4c}$$

---

1) Niemöller, Wied. Ann. **18.** p. 429. 1883.

2) F. Braun, Zeitschr. f. physikal. Chem. **1.** (5) p. 270. Fussnote. 1887.

Differentiiren wir die erste Gleichung nach $T$, die zweite nach $s$, so erhalten wir durch Elimination von $U$

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial k E}{\partial T} = -\left|\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial s}\right) - \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial T}\right)\right|_1^2 \\ \qquad\qquad - \sum_i \left[\dfrac{\partial}{\partial T}\left(P_i \dfrac{\partial q_i}{\partial s}\right) - \dfrac{\partial}{\partial s}\left(P_i \dfrac{\partial q_i}{\partial T}\right)\right]_1^2. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir ausser elektrischer Energie nur Volumenenergie, so wird

$$\sum_i P_i . d q_i = p\, d v$$

und setzen wir $p = \text{const.}$, so ist

$$\sum_i \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial T}\right)\right]_1^2 = 0,$$

und wir erhalten

$$(12a)\qquad \frac{\partial k E}{\partial T} = -\left|\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)\right|_1^2.$$

Hierin bedeutet $|\partial Q/\partial s|_1^2$ die Wärmeentwickelung des Elementes, wenn ein Aequivalent Salz in der verdünnteren Flüssigkeit (bez. Anodenflüssigkeit bei Elementen vierter Art) sich bildet.

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}(w + s)\, c_p = -\left(c_p + (1 - h)\,\frac{\partial c_p}{\partial h}\right),$$

wo $c_p$ die specifische Wärme (bezogen auf 1 Aequivalent) bei constantem Druck bedeutet.

Für Elemente dritter bez. vierter Art ergiebt sich:

$$(12b)\qquad \frac{\partial E'}{\partial T} = -\left|\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)\right|_1^2.$$

Wir wollen jetzt noch die Helmholtz'sche Formel für den Fall ableiten, dass die Ueberführungszahl Function der Temperatur ist.

Wir gehen wieder von Gleichung (4) aus

$$(4a)\qquad k E + \sum_i \left|P_i \frac{\partial q_i}{\partial s}\right|_1^2 = -\left|\frac{\partial U}{\partial s}\right|_1^2 - T\left|\frac{\partial S}{\partial s}\right|_1^2,$$

$$(4c)\qquad \sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial T} = -\frac{\partial U}{\partial T} - T\frac{\partial S}{\partial T}.$$

Wir eliminiren $U$, indem wir (4a) nach $T$, (4b) nach $s$ differentiiren, und erhalten

$$(13) \quad -\frac{\partial k E}{\partial T} = \sum_i \left| \frac{\partial}{\partial s}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial T}\right) - \frac{\partial}{\partial T}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_1^2 - \left|\frac{\partial S}{\partial s}\right|_1^2.$$

Multipliciren wir (13) mit $T$ und subtrahiren (13) dann von (4a), so ergiebt sich

$$(14) \quad \begin{cases} k E - T\frac{\partial k E}{\partial T} = -\left|\sum_i P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s}\right|_1^2 \\ \qquad - T\sum_i \left|\frac{\partial}{\partial s}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial T}\right) - \frac{\partial}{\partial T}\left(P_i \frac{\partial q_i}{\partial s}\right)\right|_1^2. \end{cases}$$

Der erste Term rechts ist die Wärmetönung, welche sich aus den thermochemischen Daten als Differenz der Bildungswärmen berechnen lässt. Der zweite Term verschwindet, wenn wir nur Volumenenergien berücksichtigen und den Druck constant erhalten.

Nennen wir die Wärmetönung des chemischen Processes, für ein Aequivalent berechnet, $N$, so ist

$$(15) \quad E - T\frac{\partial E}{\partial T} - ET\frac{\partial \log k}{\partial T} = N$$

die vervollständigte Helmholtz'sche Formel.

Ebenso bedürfen alle Beziehungen, welche unter der Annahme constanter Ueberführungszahlen abgeleitet sind, bei denen also als eine unabhängige Variable anstatt der in bestimmter als positiv zu rechnender Richtung gewanderten Salzmenge die in dieser Richtung gewanderte Elektricitätsmenge eingeführt ist, einer Ergänzung.

## II. Experimenteller Teil.

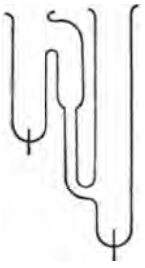
### § 5. Die Abhängigkeit der Ueberführungszahl vom Druck.

Um ein Beispiel zu geben für die Bestimmung der Abhängigkeit der Ueberführung von einem physikalischen Parameter, habe ich den Druckeinfluss auf die Ueberführungszahlen des Zinksulfats untersucht.

Als Element diente mir eine Concentrationskette von der Zusammensetzung

$$\mathrm{Zn} \mid \underset{h_1}{\mathrm{ZnSO_4}} \mid \underset{h_2}{\mathrm{ZnSO_4}} \mid \mathrm{Zn},$$

jedoch ersetzte ich das Zink der Elektroden durch elektrolytisch hergestelltes Zinkamalgam. Als Gefäss für das Element diente mir ein Glasgefäss, wie es in nebenstehender Figur dargestellt ist; dasselbe wurde von Karl Kramer in Freiburg hergestellt.



Das Element wurde in den Druckcylinder einer Cailletet'schen Pumpe von Ducretet in Paris gebracht. Der Leitungsdraht der einen Elektrode war isolirt durch den Rotgussdeckel des Cylinders nach aussen geführt, der Draht der anderen Elektrode war von innen mit dem Deckel selbst verbunden, sodass der Strom an diesem von aussen abgenommen werden konnte. Als Druckflüssigkeit wurde Oel benutzt.

Zur Dichtung der Pumpe trugen die Mechaniker J. und A. Bosch viel bei. Als Dichtungsmaterial erwiesen sich Scheiben aus Zinnlot als sehr brauchbar.

Die Messungen der elektromotorischen Kraft wurden nach der Dubois-Reymond'schen Compensationsmethode vorgenommen, als Nullinstrument diente ein Rubens'sches Galvanometer.

Nach einer Druckveränderung wurde so lange gewartet, bis die elektromotorische Kraft constant wurde, d. h. bis die thermischen Einflüsse infolge der Druckänderung sich ausgeglichen hatten. Erst dann erfolgte die endgültige Ablesung; die Resultate derselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| $p$ in Atm. | $E$ in 0,001 Volt | $\Delta E$ in 0,001 Volt | $\frac{\Delta E}{\Delta p}$ in $\frac{0{,}001 \text{ Volt}}{100 \text{ Atm.}}$ |
| 0 | 16,44 | | |
| | | 0,35 | 0,23 |
| 150 | 16,79 | | |
| | | 0,34 | 0,23 |
| 300 | 17,13 | | |
| | | 0,33 | 0,22 |
| 450 | 17,46 | | |
| | | 0,30 | 0,20 |
| 300 | 17,16 | | |
| | | 0,32 | 0,21 |
| 150 | 16,84 | | |
| | | 0,33 | 0,22 |
| 0 | 16,51 | | |

Die Messungen erfolgten bei 18° C. Columne I giebt den Ueberdruck in Atmosphären, Columne II die elektromotorische Kraft in Millivolt, Columne III die Differenzen der Zahlen in Columne II, Columne IV die Aenderung der elektromotorischen Kraft, gemessen in Millivolt, bei einer Druckerhöhung von 100 Atm.

Demnach stellt sich die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft dieses Elementes vom Druck durch die Formel dar:

$$E = 0{,}01644\,(1 + 0{,}000134\,p)\ \text{Volt}, \tag{16}$$

wo $p$ die Zahl der Atmosphären Ueberdruck bedeutet.

Wie Formel (11) p. 321 angiebt, brauchen wir noch die Grösse $|\partial v/\partial s|_1^2$. Nun ist, wie wir auf p. 322 gesehen haben,

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \varphi + (1 - h)\frac{\partial \varphi}{\partial h}.$$

Die Werte von $\varphi$ und $\partial\varphi/\partial h$ entnehmen wir Messungen von F. Kohlrausch[1]), welche in folgender Tabelle zusammengestellt sind. Die Concentrationen $h$ bedeuten die Anzahl Gramm wasserfreien Salzes in 1 g Lösung, die specifischen Gewichte sind bei 18° C. bestimmt, bezogen auf Wasser von 18° C.

| $h$ | Spec. Gew. $\frac{18°}{18°}$ | $\varphi\ \frac{18°}{18°}$ | $\frac{\Delta\varphi}{\Delta h}$ |
|---|---|---|---|
| 0,00 | 1,0000 | 1,0000 | |
| | | | −0,968 |
| 0,05 | 1,0509 | 0,9516 | |
| | | | −0,964 |
| 0,10 | 1,1069 | 0,9034 | |
| | | | −0,938 |
| 0,15 | 1,1675 | 0,8565 | |

Die specifischen Gewichte der hergestellten Lösungen wurden mit Hülfe der Mohr'schen Senkwaage gemessen und durch Interpolation aus obiger Tabelle die Concentrationen bestimmt. So ergab sich, wenn wir $s$ jetzt in Gramm messen:

| Lösung | Spec. Gew. $\frac{18°}{18°}$ | $h$ | $\varphi\ \frac{18°}{18°}$ | $\frac{\Delta\varphi}{\Delta h}$ | $\frac{\partial v}{\partial s}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0600 | 0,05813 | 0,9434 | −0,964 | 0,0354 |
| 2 | 1,0060 | 0,00589 | 0,9940 | −0,968 | 0,0317 |

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **6**. p. 40. 1879.

Also ist

$$\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_1^2 = -0{,}0037.$$

Ferner ist $q = (80{,}39/9654)$ das Aequivalentgewicht des Salzes.

Nach einer Interpolationsformel von Helmholtz[1]) ist, wenn der Index 0 angiebt, dass die betreffende Grösse für Atmosphärendruck gilt,

$$1 - n_0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \,.\, S^{-\alpha},$$

wo nach unserer Bezeichnungsweise $S = (1/h) - 1$ ist.

Für Zinksulfat giebt Helmholtz an:

$$\mathfrak{A} = 0{,}636, \quad \mathfrak{B} = 0{,}18511, \quad \alpha = 0{,}28636.$$

Berechnen wir $1 - n_0$ für beide Concentrationen und nehmen das Mittel, so erhalten wir

$$1 - n_0 = 0{,}699.$$

Aus Formel (11) p. 321

$$\frac{\partial k E}{\partial p} = -q \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_1^2$$

(Da wir jetzt $s$ in Gramm messen, müssen wir mit dem Aequivalentgewicht multipliciren) folgt durch Integration, wenn wir die rechte Seite nach dem Vorgehen von Gilbaut (vgl. p. 322) als vom Drucke unabhängig betrachten,

$$k E = k_0 E_0 - q \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_1^2 p.$$

Schreiben wir nach p. 327 (16)

$$E = E_0 (1 + \alpha p),$$

so wird

$$1 - n = (1 - n_0) \frac{1 + \alpha p}{1 - \frac{(1 - n_0) q \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_1^2}{E_0} p},$$

und da, wie wir sehen werden, der Coefficient von $p$ im Nenner sehr klein ist, haben wir genähert

$$1 - n = (1 - n_0) \left[1 + \left(\alpha + \frac{(1 - n_0) q \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_1^2}{E_0}\right) p\right].$$

1) H. v. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. **1.** p. 850. 1882. Die Interpolationsformel in der ursprünglichen Abhandlung Wied. Ann. **3.** p. 213 ist falsch.

Nun ergiebt sich

$$\frac{(1-n_0)\,q\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_2^1}{E_0} = 0{,}0000133,$$

wenn $p$ in Atmosphären gemessen wird.

So haben wir die Endformel

$$1 - n = 0{,}699\,(1 + 0{,}00012\,p).$$

Als Controle des Resultates hätte sich die entsprechende Messung mit dem Element zweiter Art

$$\mathrm{Hg} \;|\; \mathrm{Hg_2SO_4} \;|\; \underset{h_1}{\mathrm{ZnSO_4}} \;|\; \underset{h_2}{\mathrm{ZnSO_4}} \;|\; \mathrm{Hg_2SO_4} \;|\; \mathrm{Hg}$$

ergeben, doch erfolgte hier die Einstellung des Elementes in den Ruhezustand nach stattgefundener Druckänderung so langsam, dass man diese Erscheinung unmöglich durch Temperaturschwankungen erklären konnte. Wahrscheinlich wird die Abhängigkeit der Löslichkeit des Depolarisators $Hg_2SO_4$ vom Druck und von der Concentration des ausserdem noch anwesenden Salzes $ZnSO_4$ diese Unregelmässigkeiten hervorgerufen haben.

Piesch[1]) und Fink[2]) haben ausser an anderen Salzen auch am Zinksulfat die Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Druck bestimmt. Vernachlässigen wir die Aenderung des Dissociationsgrades und der Volumenconcentration gegen die Aenderung der Leitfähigkeit, so haben wir, wenn $\lambda$ die Leitfähigkeit bedeutet,

$$\frac{d\log\lambda}{dp} = \frac{d\log(u+v)}{dp}.$$

Die quantitativen Resultate von Piesch und Fink weichen erheblich voneinander ab, wählen wir die kleinere Zahl von Fink für die Aenderung der Leitfähigkeit, so wird ungefähr

$$\frac{d\log\lambda}{dp} = 0{,}02,$$

während wir gefunden haben

$$\frac{d\log\frac{v}{u+v}}{dp} = 0{,}00012,$$

1) B. Piesch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (IIa.) **103.** p. 784. 1894.

2) F. Fink, Wied. Ann. **26.** p. 481. 1885.

Daraus schliessen wir, dass die relative Aenderung der Ionenbeweglichkeiten $u$ und $v$ mit dem Druck in gleichem Sinne und ziemlich gleicher Grösse erfolgt. Uebrigens kann man aus der Aenderung der Leitfähigkeit und der Ueberführungszahl die Aenderung der Ionenbeweglichkeiten berechnen.

Diese Arbeit ist im physikalischen Institut der Universität Strassburg entstanden. Auch an dieser Stelle möchte ich nicht versäumen, meinen hochverehrten Lehrern, Hrn. Prof. Braun und Hrn. Prof. Cantor, für vielfache Anregungen und nützliche Ratschläge meinen besten Dank abzustatten.

Strassburg, Physik. Institut, Mai 1901.

(Eingegangen 18. Juli 1901.)

## 7. *Zur Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien;* *von J. Sauter.*

Aus den folgenden Betrachtungen soll hervorgehen, dass durch eine geeignete Combination und Modification einzelner bekannter Hypothesen ein relativ sehr einfaches und anschauliches dynamisches System aufgebaut werden kann, dessen leicht ableitbare Bewegungsgleichungen genau die Form der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden, isotropen, heterogenen Halbleitern aufweisen.

1. Im ganzen unendlichen Raum sei eine bewegte, mit Trägheit begabte Substanz continuirlich verbreitet, und diese Substanz befinde sich zeitweise in einem eigentümlichen Zwangszustand.

Es wird also jedes durch eine beliebige geschlossene Fläche $S$ begrenztes Volumen $v$ dieser Substanz vom übrigen umgebenden Teil derselben eine Kraftwirkung erleiden: auf jedes Oberflächenelement $dS$ dieses Volumens wird eine Kraft $\mathfrak{P}\,dS$ angreifen. Bezeichnet $O$ den Ort, an welchem das Element $dS$ sich befindet, und $n_a$ die Richtung der äusseren Normale desselben, so lässt sich die Vectorgrösse $\mathfrak{P}$ als Function von $O$ und $n_a$ betrachten. — Das über die ganze Fläche $S$ genommene Integral $\int \mathfrak{P}\,dS$ möge aus Analogie mit der Hydrostatik als „Auftrieb" bezeichnet werden.

Das Eigentümliche des betreffenden Zwanges bestehe nun darin, dass $\mathfrak{P}$ durch den Ausdruck $V\mathfrak{E}\mathfrak{N}_a$ darstellbar sei[1]), wo $\mathfrak{N}_a$ ein Vector von Richtung $n_a$ und von Tensor 1 ist und wo der Vector $\mathfrak{E}$ mit $O$ und mit der Zeit variiren mag, nicht aber mit $n_a$. $\mathfrak{P}$ sei daher senkrecht zu $n_a$ und zu $\mathfrak{E}$ gerichtet

1) Das Vectorproduct $V\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ hat als Tensor $A_1 A_2 \sin(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, wo $A_1$ und $A_2$ die Tensoren von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind, und als Richtung diejenige des ausgestreckten linken Armes eines in der Richtung von $\mathfrak{A}_1$ schwimmenden und in der Richtung von $\mathfrak{A}_2$ blickenden Beobachters.

und verschwinde für ein zu $\mathfrak{E}$ senkrechtes Element; man könnte sagen, $\mathfrak{P}$ sei eine zu $\mathfrak{E}$ transversale Schubspannung.

Aus dieser Hypothese[1]) ergiebt sich für den „Auftrieb"

$$\int V \mathfrak{E} \mathfrak{N}_a \,.\, dS = -\int \operatorname{curl} \mathfrak{E} \,.\, dv$$[2])

mittels einer bekannten Beziehung zwischen Oberflächen- und Raumintegralen.[3])

2. Addirt man daher (geometrisch) zur Grösse $-\operatorname{curl} \mathfrak{E}$, welche man als „Auftrieb pro Volumeneinheit" bezeichnen könnte, die (geometrische) Summe $\sum \mathfrak{F}$ der übrigen am Volumen Eins angreifenden Kräfte, und setzt man das Resultat gleich dem Producte aus Dichte und Beschleunigung am Orte $O$, so bekommt man die Hauptbewegungsgleichung der Substanz.

Wir wollen die Dichte mit $4\pi\mu$ und die Geschwindigkeit mit $(1/4\pi)\mathfrak{H}$ bezeichnen[4]), sodass die Bewegungsgrösse pro Volumeneinheit oder, was dasselbe ist, das pro Zeiteinheit und Flächeneinheit durch eine zur Bewegungsrichtung normale Fläche strömende Quantum $\mathfrak{B}$ der Substanz gleich $\mu\mathfrak{H}$ zu setzen sein wird, und die Beschleunigung gleich

$$\left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\nabla\right)\left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\right).$$[5])

Die betreffende Gleichung wird nun, unter den bis jetzt getroffenen Annahmen,

$$-\operatorname{curl}\mathfrak{E} + \sum\mathfrak{F} = \frac{\mu}{4\pi}(\mathfrak{H}\nabla)\mathfrak{H} + \mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt}.$$

---

1) Vgl. Lord Kelvin, Math. and phys. Papers **3.** p. 442. 1890.

2) Eine Definition des Vectors curl $\mathfrak{A}$, den man als „Transversalableitung des Vectors $\mathfrak{A}$" bezeichnen könnte, ist implicite in folgendem Satze enthalten: Das Product $f'$ curl $\mathfrak{A}$, wo $f'$ den Flächeninhalt der Projection einer unendlich kleinen ebenen geschlossenen Figur auf eine zu curl $\mathfrak{A}$ senkrechte Ebene bedeutet, hat als Tensor das Linienintegral $\int A \cos(\mathfrak{A}, ds)\, ds$ des Vectors $\mathfrak{A}$ über den ganzen Umfang der Figur, wenn letztere einem in der Richtung von curl $\mathfrak{A}$ blickenden Beobachter im Sinne des Uhrzeigers umkreist erscheint.

3) Vgl. A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität, p. 80. 1894.

4) Vgl. A. Sommerfeld, Wied. Ann. **46.** p. 139. 1892.

5) Der Vector $(\mathfrak{M}\nabla)\mathfrak{A}$ ist gleich $M$ mal die Ableitung des Vectors $\mathfrak{A}$ nach der Richtung von $\mathfrak{M}$.

Die Bewegung ist „continuirlich", wenn die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = -\, 4\pi \frac{d\mu}{dt}$$ [1])

stattfindet.

3. Betreffend den Bewegungszustand der Substanz sollen nun folgende Annahmen zutreffen:

a) die Dichte an jedem Orte $O$ sei von der Zeit unabhängig;

b) bei plötzlicher Aufhebung des Zwanges zu irgend einer Zeit dauere die Bewegung ununterbrochen ohne Veränderung der räumlichen Verteilung der Geschwindigkeiten weiter;

c) am Anfange, d. h. zur Zeit $t = -\infty$, sei überall $\mathfrak{H} = 0$ gewesen.

Nach den Annahmen a) und b) wäre also das System ein Cykel mit den Spannungen $\mathfrak{P}$ als „Kräfte, welche die cyklischen Coordinaten zu vergrössern streben".[2])

Annahme b) bedingt, dass für $\mathfrak{E} = 0$ das Glied $\mu(d\mathfrak{H}/dt)$ der Hauptgleichung von § 2 bei jedem Wert von $t$ verschwinde, d. h. dass jederzeit das Glied $\sum \mathfrak{F}$ gleich dem Gliede $\mu/4\pi(\mathfrak{H}\nabla)\mathfrak{H}$ sei und infolge dessen auch jederzeit die Beziehung

$$(\alpha) \qquad -\operatorname{curl} \mathfrak{E} = \mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt}$$

bestehe. Bildet man die *div* der beiden Seiten der Gleichung $(\alpha)$, so bekommt man nach Ersetzung von $\mu(d\mathfrak{H}/dt)$ durch $d\mathfrak{B}/dt$ gemäss Annahme a)

$$(\beta) \qquad \operatorname{div}\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) = 0,$$

---

1) Eine Definition des Scalaren div $\mathfrak{A}$, den man als „Longitudinalableitung des Vectors $\mathfrak{A}$" bezeichnen könnte, ist implicite in folgendem Satze enthalten: Das Product $v$ div $\mathfrak{A}$, wo $v$ den körperlichen Inhalt eines unendlich kleinen Volumens bedeutet, ist gleich dem Flächenintegral $\int A \cos(\mathfrak{A}, n)\, df$ des Vectors $\mathfrak{A}$ über die ganze Oberfläche des Volumens; hierbei ist unter $n$ die äussere Normale verstanden.

2) Vgl. L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes, I. Teil (1891), dritte Vorlesung; wird bei einem der beschriebenen Beispiele die Einwirkung auf die Kurbel aufgehoben, so bleibt die betreffende Rotation gleichförmig.

da *div curl* identisch verschwindet. Integrirt man die Gleichung ($\beta$) nach der Zeit, so ergiebt sich $\operatorname{div}\mathfrak{B} = \text{const.} = (\operatorname{div}\mathfrak{B})_{t=-\infty}$ und unter Berücksichtigung der Annahme c)

$$(\gamma) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Die Gleichungen ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$) lassen sich unter Einführung des Vectors

$$\mathfrak{A} = -\int_{-\infty}^{t} \mathfrak{E}\, dt$$

auf eine einzige,

$$\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \mathfrak{B},$$

reduciren.

Gleichung ($\gamma$) ergiebt sich auch, wenn in der Continuitätsbedingung (vgl. § 2) $d\mu/dt = 0$ gesetzt wird. Diese Bedingung ist daher erfüllt.

4. Der in § 1 definirte specielle Zwangszustand ist aber nur dann möglich, wenn die Kräfte, deren geometrische Summe $\sum \mathfrak{F}$ in § 2 eingeführt wurde, selbst in kleinen Volumenteilchen derart verteilt sind, dass ihre Zusammensetzung neben der „Resultirenden" $\sum \mathfrak{F}$ noch ein Kräftepaar liefert vom Momente $-2\mathfrak{E}$ pro Volumeneinheit[1]), denn die Zusammensetzung der Kräfte $\mathfrak{P}\,dS$ ergiebt, abgesehen von dem durch Ungleichförmigkeit in der räumlichen Verteilung von $\mathfrak{E}$ bedingten „Auftrieb", selbst bei gleichförmig verteiltem $\mathfrak{E}$ ein Kräftepaar vom Momente $+2\mathfrak{E}v$, welches nun durch ein gleich grosses, aber entgegengesetztes aufgehoben werden muss, damit inneres Gleichgewicht bestehe.

Diese charakteristische Eigenschaft des Zwanges lässt sich am einfachsten einsehen, wenn man das Volumenteilchen als Kreiscylinder mit zu $\mathfrak{E}$ paralleler Axe und dazu senkrechten Basisflächen annimmt; auf letzteren wird $\mathfrak{P}$ verschwinden, auf der Mantelfläche dagegen überall gleichen Tensor wie $\mathfrak{E}$ und die Richtung der Tangente an den Parallelkreis, in dem Sinne der Drehung des Uhrzeigers für einen in der Richtung von $-\mathfrak{E}$ blickenden Beobachter aufweisen; zwei zur Axe symme-

1) Als Richtung des Momentvectors wird diejenige bezeichnet, in welcher ein Beobachter zu blicken hat, um den Drehsinn des Kräftepaares gleich dem Drehsinn des Uhrzeigers zu finden.

trische Mantelflächenelemente $dS$ werden ein Kräftepaar vom Momente $2\varrho\mathfrak{E}dS$ liefern, wo $\varrho$ der Halbmesser des Cylinders ist; die Integration wird ergeben

$$2\varrho\mathfrak{E}\cdot\frac{2\pi\varrho h}{2},$$

wo $h$ die Höhe desselben ist.

Im folgenden Paragraph sollen nun Hypothesen aufgestellt werden, nach welchen ein Teil des Momentes $-2\mathfrak{E}$ durch die Bewegung der Substanz verursacht wird, indem der relativen Drehung derselben gegenüber gewissen Partikelchen ein Widerstandsmoment $2\mathfrak{W}$ pro Volumeneinheit entgegenwirkt. Wir werden deshalb setzen

$$-\mathfrak{E} = \mathfrak{L} - \mathfrak{W},$$

wo $\mathfrak{L}$ dem übrigen, „motorischen" Teile entspricht.

5. In allen Regionen des Raumes sei eine Unmenge kleiner Partikelchen verteilt, derart, dass auch in den kleinsten zu betrachtenden Raumteilen eine grosse Anzahl derselben sich befinde; die Dimensionen dieser Partikelchen seien klein im Verhältnis zu den gegenseitigen Abständen derselben. Jedes Partikelchen könne sich um irgend eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe drehen; keines könne aber eine fortschreitende Bewegung ausführen, d. h. die Mittelpunkte seien fest. Sich selbst überlassen würde jedes Partikelchen eine ganz bestimmte Orientation im Raume bez. eine gewisse Ruhelage einnehmen; für irgend eine andere Orientation bez. Lage wirke ein dem Ablenkungswinkel proportionales Kräftepaar entgegen; das Moment des letzteren möge „elastisches Moment" bezeichnet werden.[1]) Es finde eine Reibungswirkung zwischen der umgebenden erwähnten Substanz und den Partikelchen statt, indem auf dieser wie auf jenen ein der relativen Drehgeschwindigkeit proportionales „Reibungsmoment" wirke.

Greifen ausser den soeben erwähnten Kräften keine weiteren an einem Partikelchen an, so wird die Ablenkung desselben aus der Ruhelage einem Wirbel in der umgebenden Substanz zuzuschreiben sein; nimmt man nun noch an, dass jedes

1) Diese und die im darauf folgenden Satz ausgedrückten Hypothesen kann man als Modification einer Hypothese von A. Sommerfeld betrachten; vgl. Wied. Ann. **46**. p. 140. 1892.

Partikelchen massenlos sei, so müssen jederzeit das darauf wirkende „elastische Moment“ und das auf die umgebende Substanz wirkende „Reibungsmoment“ nach Grösse und Richtung einander gleich sein.

6. Es bezeichne nun $\frac{1}{2}\mathfrak{D}$ die Ablenkung[1]) eines Partikelchens aus seiner Ruhelage, $\frac{1}{2}\mathfrak{C}$ die Wirbelgeschwindigkeit der umgebenden Substanz, $\frac{1}{2}\mathfrak{R}$ die relative Drehgeschwindigkeit der letzteren gegenüber dem Partikelchen, so wird sein

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{R} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt},$$

wobei nach den Gesetzen der Hydrodynamik

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{C}.$$

Bezeichnet ferner $N$ die Anzahl Partikelchen pro Volumeneinheit in der betreffenden Region, $-(8\pi/kN)\mathfrak{D}$ das auf ein Partikelchen angreifende „elastische Moment“ (wo $k$ ein positiver Factor ist), $(2/CN)\mathfrak{R}$ das auf dieses Partikelchen angreifende „Reibungsmoment“ (wo $C$ auch ein positiver Factor ist), $2\mathfrak{M}/N$ ein anderes auf das Partikelchen angreifendes Moment, so ergiebt sich

$$\frac{4\pi}{k}\mathfrak{D} = \mathfrak{M} + \frac{1}{C}\mathfrak{R}$$

und für das Widerstandsmoment $2\mathfrak{W}$ auf die Volumeneinheit der Substanz

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{C}\mathfrak{R}.$$

---

Schreibt man $\mathfrak{E}_1$ anstatt $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{E}_2$ anstatt $\mathfrak{L} + \mathfrak{M}$, so bekommen die Gleichungen des beschriebenen dynamischen Systems dieselbe Form wie die Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien mit einer von Boltzmann benutzten Verallgemeinerung[2]):

1) Denkt man sich das Partikelchen aus seiner Ruhelage in die momentane Lage durch eine Drehung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe übergeführt, so ergiebt sich als Richtung des Vectors $\mathfrak{D}$ diejenige Richtung der Axe, nach welcher ein Beobachter zu blicken hat, um die Drehung im Sinne der Uhrzeigerdrehung zu finden; der Tensor von $\mathfrak{D}$ wird der absolute Wert des Drehwinkels sein.

2) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 84.

$$\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}, \qquad \operatorname{curl}\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{K} = C(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1), \qquad 4\pi\mathfrak{D} = k(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_2),$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}, \qquad \mathfrak{E} = -\frac{d\mathfrak{A}}{dt};$$

hierbei bezeichnet $\mathfrak{A}$ das „elektromagnetische Moment", $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction, $\mathfrak{C}$ die totale elektrische Strömung, $\mathfrak{D}$ die dielektrische Verschiebung, $\mathfrak{E}$ die innere elektrische Kraft[1]), $\mathfrak{E}_1$ die „galvanische" äussere elektrische Kraft, $\mathfrak{E}_2$ die „guerickische" äussere elektrische Kraft, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft, $\mathfrak{K}$ die galvanische Strömung, $C$ die specifische Leitungsfähigkeit, $k$ die Dielektricitätsconstante, $\mu$ die magnetische Permeabilität.

Es mag bemerkt werden, dass in der Elektrostatik die Differenz $\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1$, daher also die oben mit $\mathfrak{M}$ bezeichnete Grösse eine wesentliche Rolle spielt; die Differentialgleichung der Dichte $\varepsilon = \operatorname{div}\mathfrak{D}$ der „wahren Elektricität" lautet z. B.

$$k\frac{d\varepsilon}{dt} + 4\pi C\varepsilon = kC\operatorname{div}\mathfrak{M}$$

im homogenen Felde.[2])

Interessant mag noch die Bemerkung sein, dass die Bedingung $\mathfrak{E}_2 = 0$, welche zu der von Hertz benutzten Form[3]) der Maxwell'schen Gleichungen führt, der Annahme entspricht, die Drehkräfte $2\mathfrak{L}$ und $2\mathfrak{M}$ seien als Action und Reaction

---

1) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 110.

2) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 104.

3) Die sechs Hertz'schen Gleichungen lauten (vgl. Wied. Ann. 40. p. 577. 1890):

$$A\bar{\mu}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad A\bar{\varepsilon}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A\lambda(X - X'),$$
$$A\bar{\mu}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad A\bar{\varepsilon}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A\lambda(Y - Y'),$$
$$A\bar{\mu}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \qquad A\bar{\varepsilon}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A\lambda(Z - Z');$$

$X$, $Y$, $Z$ sind die Componenten von $\mathfrak{E}$; $L$, $M$, $N$ diejenigen von $\mathfrak{H}$; $X'$, $Y'$, $Z'$ diejenigen von $\mathfrak{M}$; ferner ist $A\bar{\mu} = \mu$, $A\bar{\varepsilon} = k$, $A\lambda = C$; das Coordinatensystem wäre ein „Hopfencoordinatensystem", d. h. einem in der Richtung der $y$-Axe schwimmenden und nach der Richtung der $x$-Axe blickenden Beobachter erscheine die $z$-Axe nach links gerichtet; $A$ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether.

zwischen den Partikelchen und der umgebenden Substanz auffassbar; es wäre dann $\mathfrak{L} = -\mathfrak{M}$.

Eine andere Vereinfachung ergiebt die Annahme $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$ bez. $\mathfrak{M} = 0$, nach welcher die Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ proportional variiren.[1])

Wollte man das beschriebene dynamische System so compliciren, dass es auch die Farbenzerstreuung in Licht nicht absorbirender Medien wenigstens qualitativ wiedergebe, so wäre die Einführung von Trägheit für die Partikelchen angezeigt.

Bern, Juni 1901.

1) Diese Vereinfachung ist in dem citirten Werk von Föppl durchgeführt.

(Eingegangen 23. Juni 1901.)

## 8. *Einfluss von Diaphragmen auf elektrische Dauerentladung durch Luft von Atmosphärendruck; von M. Toepler.*

In den Stromkreis einer vielplattigen Toepler'schen Influenzmaschine sei ein Schlagraum eingeschaltet, dessen Elektroden von einer Metallspitze und einer Halbleiterplatte (Schiefer, Basalt etc.) gebildet werden.[1]) *Das Fliessen der Elektricität durch den Schlagraum findet dann ununterbrochen nahezu continuirlich statt*, und zwar beobachtet man, wie früher nachgewiesen, für wachsende Stromstärke nacheinander das Auftreten von Glimmen, dann Büschel und Büschellichtbogen[2]); nur beim Uebergange einer Entladungsform in die nächstfolgende tritt eine zeitlich discontinuirliche Entladung, wie z. B. eine Reihe von Stossbüscheln oder Funken auf. Die Strömung findet bei Glimm- und negativer Büschelentladung auf breiter Bahn statt; ebenso in der Krone des positiven Büschels; im Stiele des letzteren und bei positivem oder negativem Büschellichtbogen erscheinen alle Stromfäden eng zusammengedrängt.

In Folgendem sei kurz der Einfluss, welchen Metallstücke oder Diaphragmen in den Schlagraum gebracht auf nahe continuirliche Entladung ausüben, geschildert. Speciell das Verhalten des Büschellichtbogens ist hierbei in mancher Hinsicht interessant; es wird daher vorwiegende Berücksichtigung finden.

I. Hält man während des nahe continuirlichen Elektricitätsströmens durch den Schlagraum ein isolirtes oder auch mit der Erde verbundenes Metallstück in die Strömungsbahn, so kann der Strom je nach der Stellung und Grösse des Metallkörpers ganz oder teilweise durch diesen hindurchgehen. Hierbei bleiben die beim Leiter vorbeiführenden Stromfäden

1) An Stelle einer vielplattigen Influenzmaschine könnte natürlich auch eine Accumulatorenbatterie oder Gleichstrommaschine von hinreichender Spannung als Stromquelle dienen.

2) Um schliesslich einen Flammenbogen zu erhalten, genügt der Strom einer 60plattigen Influenzmaschine noch nicht.

nach wie vor dem Auge sichtbar, was besonders leicht bei der Krone des positiven Dauerbüschels wahrzunehmen ist.

Für die durchgehenden Stromfäden wird das Metallstück zur Zwischenelektrode; für sie zerfällt der Schlagraum in zwei Hälften, welche dann bezüglich der in ihnen zur Ausbildung gelangenden Lichterscheinungen fast unabhängig voneinander sind. Besonders leicht zu beobachten und interessant ist dies in dem speciellen Falle, dass ein negativer Büschellichtbogen durch ein Metallstück in zweie geteilt ist.

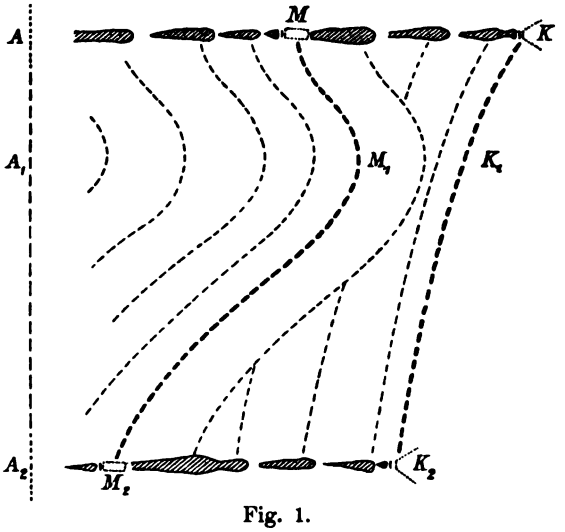



Fig. 1.

In Fig. 1 ist bei $AMK$ die Lichterscheinung angedeutet, wie man sie zwischen Anode $A$, Metallstück $M$ und Kathode $K$ bei einem Elektrodenabstande $AK$ von etwa 7 cm und etwa 2 Milliamp. beobachten kann. Beide Schlagraumhälften zeigen negative Büschellichtbogen; in $AM$ ist der positive Anteil fast völlig unterdrückt (Kennzeichen grosser Anodendunkelraum), in $MK$ gehört die eine Lichtschicht dem hier nicht gänzlich unterdrückten positiven Anteile zu.[1]) *Bei Bewegung von M*

1) Die Darstellung der Leuchtmassen und übrigen Lichter ist in den Figuren der vorliegenden Arbeit etwas schematisch gehalten; Photogramme von Büschellichtbogen finden sich in den Abh. d. naturw. Ges. Isis Dresden 1898 u. in Wied. Ann. **63.** p. 109. 1897 sowie **69.** p. 680. 1899.

*haften die Schichten des negativen Anteiles vom Schlagraume A M an M, ebenso die Schicht des positiven Anteiles in M K.* Durch die gestrichelten Linien ist angedeutet, welche Stellung die einzelnen Lichtschichten einnehmen, wenn z. B. die Kathode $K$ von $K$ über $K_1$ nach $K_2$ und gleichzeitig das Metallstück $M$ von $M$ über $M_1$ nach $M_2$ verschoben wird.

Besonders bemerkenswert ist die Thatsache, dass die Entladungsform in beiden Schlagraumteilen eine *verschiedene* sein kann (vgl. weiter unten Abschnitt VI).

II. Ein ähnliches Verhalten beobachtet man, wenn an Stelle des Metallzwischenstückes eine mit einer kleinen Oeffnung versehene Platte von Glimmer, Glas oder einem anderen Isolator in den Schlagraum parallel zur Halbleiterplatte einge-

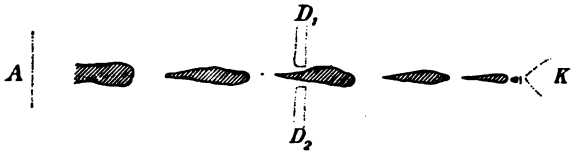



Fig. 2.

schoben wird. Die enge Oeffnung (ca. 2 mm Durchmesser) wirkt ganz analog wie das Metallstück, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier *alle* Stromfäden gezwungen sind, die Oeffnung zu durchsetzen; *die Oeffnung wird zur Zwischenelektrode.* Insbesondere beobachtet man auch hier, dass die Entladungsform beiderseits der Platte mit Oeffnung eine verschiedene sein kann; so kann z. B. positiver Büschellichtbogen einerseits, positiver Büschel andererseits und ebenso bei Stromumkehr diesseits negativer Büschellichtbogen, jenseits der Oeffnung negative Büschelentladung (vgl. Abschnitt VI) auftreten.

III. Ganz besonders interessant sind die Erscheinungen für den Fall, dass *beiderseits der Oeffnung Büschellichtbogen* zur Ausbildung kommen. In Fig. 2 ist der zu Fig. 1 analoge Fall dargestellt; $D_1$ $D_2$ bedeutet z. B. eine durchlochte Glimmerplatte. *In der Oeffnung bildet sich stets eine Leuchtmasse*; ihr spitzes Ende ist in allen Fällen der Anode zugekehrt. Bewegt man die Glimmerplatte, so haften, ganz wie bei Fig. 1 am

Metallstücke, so hier an der Oeffnung die Schichten des negativen Anteiles links und des positiven Anteiles rechts.

In Fig. 3a ist die Anordnung der Lichtteile in der Nähe eines Metallzwischenstückes, in Fig. 3b in der einer Oeffnung vergrössert abgebildet und zwar ist angenommen, dass beiderseits Büschellichtbogen zur Ausbildung gekommen ist. In Fig. 3a bedeutet $a$ das sogenannte blaue Kathodenlicht, $b$ das Anodenglimmlicht, $c$ das ziegelrote Licht, $d_1$ $d_2$ carminrote Leuchtmassen.[1])

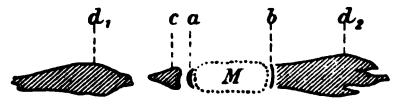


Fig. 3a.

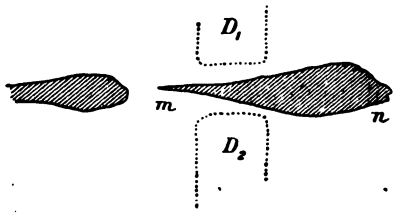


Fig. 3b.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Falle von Fig. 3a und 3b ist der, dass in Fig. 3b die Lichter $a$ und $b$ fehlen; $c$ und $d_2$ erscheinen zu einer einzigen Leuchtmasse $m\,n$ verschmolzen.

---

1) Die angegebene Färbung gilt für Stromstärken bis etwa 3 Milliamp. Eine Verringerung des Luftdruckes bis auf 10 mm Hg und weniger ändert die Färbung nicht wesentlich (vgl. Abh. Isis l. c.). In anderen Gasen als Luft (z. B. in $CO_2$) ist dagegen die Färbung der einzelnen Lichtteile eine andere.

Es sei ferner zur Orientirung darauf hingewiesen, dass nach früheren Untersuchungen (vgl. wieder Abh. Isis, l. c.) zwischen den Lichtern des Büschellichtbogens in freier Luft und den bekannten Lichterscheinungen in Geisslerröhren folgender Zusammenhang besteht. Das Licht $a$ entspricht dem sogenannten blauen Kathodenlichte, das Licht $b$ dem Anodenglimmlichte, das ziegelrote Licht $c$ fehlt meist in Geisslerröhren (oft dürfte es in der ersten Schicht der sogenannten Anodenlichtsäule wiederzufinden sein, welche bekanntlich vielfach ein von dem der übrigen verschiedenes Verhalten zeigt). Die Leuchtmassen $d_1$ und $d_2$ sind nicht etwa identisch mit den bekannten sogenannten Anodenlichtschichten; vielmehr ist die gesamte Anodenlichtsäule aufzufassen als eine *einzige* secundär wieder in kurze Schichten zerfallene Leuchtmasse. *Es ist nicht uninteressant, dass sich die Leuchtmassen $d_1$ $d_2$ . . ., wie vorliegende Mitteilung zeigt, hinsichtlich des Einflusses von Bahnverengerungen ganz ähnlich verhalten, wie es von den Anodenlichtschichten bekannt ist.*

Es scheint also, dass die Bildung der Lichter *a* und *b* und der zugehörigen Dunkelräume das Vorhandensein einer Metallelektrode voraussetzen. Ihr Auftreten ist daher wohl veranlasst durch die materielle Discontinuität beim Uebertritte der Elektricität von Luft in Metall einerseits, von Metall in Luft andererseits. Dagegen sind die Lichter *c* und $d_2$ schon dem normalen Fliessen der Elektricität durch einen Luftraum eigentümlich; sie stellen jedes gewissermaassen eine halbe Leuchtmasse dar.

Auch die Färbung der Lichtteile spricht für die Richtigkeit der ausgesprochenen Auffassung. Das Ende *m* der Leuchtmasse in der Oeffnung ist ziegelrot wie *c*, das Ende *n* dagegen carminrot wie $d_2$ gefärbt (bei Entladung durch gewöhnliche Luft). Ueberhaupt zeigt auch *jede* andere Leuchtmasse, z. B. $d_1$, in gleicher Weise in Richtung des Stromes carminrote Färbung, während ihr spitzes, der Anode zugekehrtes Ende ziegelrot erscheint.

IV. Dass sich in einer Oeffnung stets eine Leuchtmasse und zwar ohne wesentliche Deformation derselben (im Vergleiche zu ihrer Form in freier Luft) bildet, muss in der Natur des Strömungsprocesses in der Leuchtmasse und in ihrer Umgebung begründet sein. Die Stellung der Leuchtmasse in der Oeffnung wird derartig sein, dass die natürliche Entwickelung des Strömungsprocesses, wie er bei einer *freien* Leuchtmasse von selbst zur Ausbildung kommt, auch bei der Leuchtmasse in der Oeffnung möglichst erhalten bleibt. Die Annahme liegt also sehr nahe, dass bei jeder Leuchtmasse die Elektricitätsströmung in der Weise erfolgt, wie es die Pfeile in Fig. 4 andeuten.

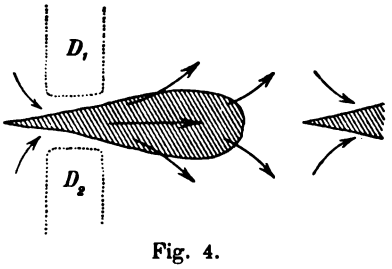


Fig. 4.

Beim Büschellichtbogen wechseln hiernach wahrscheinlich Strecken breiterer Strömungsbahn mit Bahnverengerungen periodisch ab; letztere liegen je in der Nähe des spitzen, der Anode zugekehrten Endes jeder Leuchtmasse.

V. Der Satz, dass eine Oeffnung in einer Isolatorplatte wie eine Zwischenelektrode wirkt, und dass sich in ihr stets eine Leuchtmasse bildet, gilt auch noch für recht *weite* Oeffnungen (von 1 cm Durchmesser und auch noch etwas mehr). In weiten Diaphragmenöffnungen kommt jedoch manchmal an Stelle einer einzigen Leuchtmasse ein Bündel von mehreren fadenförmigen Leuchtmassen zur Ausbildung.

Bemerkenswert war hierbei, dass eine *ruhige* stabile Schichtbildung meist nur dann eintrat, wenn auch schon ohne Diaphragma an dem Orte, wo die Oeffnung des Diaphragmas sich befand, eine Schicht zur Ausbildung gekommen wäre; andernfalls war die Schichtenbildung in der Regel höchst unstät. Während also enge Oeffnungen stets die Stellung einer Leuchtmasse in ihnen erzwingen, nimmt dieser Zwang bei immer weiteren Oeffnungen mehr und mehr ab, sodass die von der spitzen Elektrode ausgehende Ordnung der Lichtteile bis in die Oeffnung und schliesslich bei ganz weiten Oeffnungen durch sie hindurch zur Geltung kommt.

Ganz besonders auffallend ist die Thatsache, dass sich *Metallplatten* mit nicht zu kleiner Oeffnung ganz ähnlich wie Isolatorplatten verhalten. So bildete sich z. B. in der Kreisöffnung von 1 cm Durchmesser einer 0,5 cm dicken Kupferplatte eine Leuchtmasse; ja sogar in der Axe eines Gasrohrstückes (Eisen) von 1 cm Länge und 1 cm lichter Weite war eine Leuchtmasse dauernd existenzfähig!

Dieses auffallende Verhalten erklärt sich aus dem relativ kleinen Potentialgradienten längs eines Büschellichtbogens[1]); so wird es z. B. möglich sein, durch das Rohr *abcd* in Fig. 5 einen ursprünglich zwischen *A* und *B* bestehenden Büschellichtbogen von *B* und *C* nach *K* hindurchzuziehen, wenn nur die Spannungsdifferenz zwischen *B* und *C* kleiner bleibt, als zur *Neu*bildung eines Entladungsweges von *B* über *a* und *b* nach *C* nötig wäre.[2])

Bei Anwendung von *Glasrohren von mehreren Centimetern Länge* zeigt sich, dass immer in dem *der Anode zugekehrten*

1) M. Toepler, Wied. Ann. **66.** p. 672. 1898.

2) Es sei darauf hingewiesen, dass durch die angegebenen Thatsachen auch manche Beobachtungen an Kugelblitzen unserem Verständnisse näher gebracht werden.

*Ende* eine Schicht sich bildet und daselbst bei Rohr- oder Elektrodenverschiebung festgehalten wird.

Aehnlichen Einfluss wie die Oeffnung in einer Platte übt auch schon das Annähern eines Körpers, z. B. der Kante

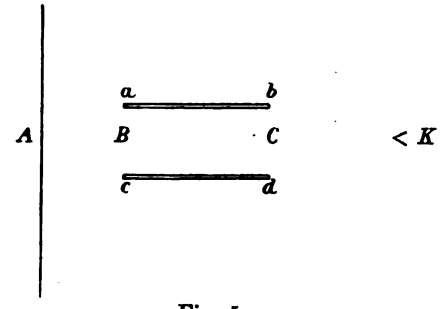



Fig. 5.

eines Isolators, des Endes eines Metalldrahtes etc. Speciell beim Büschellichtbogen veranlasst jeder hinreichend genäherte Körper auch in denjenigen Stromfäden, für welche er nicht zur Zwischenelektrode wird, das Auftreten einer etwas stromauf gelegenen am Körper haftenden Dunkelstelle.

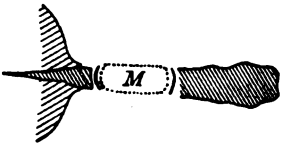



Fig. 6a.

VI. Bildet sich in einem der beiden Schlagräume, z. B. links vom Diaphragma, kein Büschellichtbogen, sondern *ein negativer Büschel*, so beobachtet man die in Figg. 6a und 6b vergrössert angegebene Entwickelung der Lichter. Die bei einem voll entwickelten negativen Büschel in der Büschelaxe erscheinende ziegelrote Lichtspitze ist nichts anderes als das Licht *c* in Fig. 3, d. h. sie ist wie dieses als halbe Leuchtmasse aufzufassen. Das bläuliche sie umgebende Büschellicht rührt von den im übrigen meist nicht sichtbaren stark nach der Kathode bez. der Oeffnung convergenten Stromfäden her (vgl. die Pfeile in Fig. 4). Bei sehr intensiven negativen Büscheln verschwinden sie schliesslich neben der immer intensiver werdenden centralen Lichtspitze, bei schwachen Büscheln ist andererseits

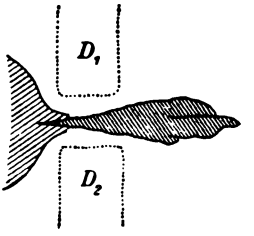



Fig. 6b.

die Strömungsdichte selbst im centralen Teile nicht gross genug zur Ausbildung der ziegelroten Lichtspitze.

Analog wie der blaue Lichtkegel des negativen Büschels zum ziegelroten centralen Lichte verhält sich die Krone des positiven Büschels zum Büschelstiele; nur ist zu bemerken, dass der lange Stiel *intensiver* positiver Büschel, wie man leicht beobachtet, meist von einer *Reihe* freilich nur unscharf gegeneinander abgegrenzter carminroter Schichten gebildet wird, von denen dann meist nur die letzte Schicht die von ihr endgültig divergirenden und nicht zu einer weiteren Leuchtmasse erneut zusammengefassten zahllosen bläulichen Stromfäden dem Auge sichtbar werden lässt.

Die Leuchtfäden lassen sich ihrerseits auch wieder auffassen als langgestreckte, aber nur unvollkommen ausgebildete Leuchtmassen.

*Alle Entladungsformen, in welche bei Stromverstärkung die positive oder negative Glimmentladung successive übergeht, erscheinen hiernach als zusammengesetzt aus einer mit zunehmender Stromstärke an Zahl wachsenden Reihe von mehr oder minder vollkommen ausgebildeten Leuchtmassen.*

Die in vorliegender Arbeit mitgeteilten Beobachtungen gelten, wie schliesslich nochmals hervorgehoben sei, für ein möglichst stationäres Elektricitätsfliessen durch den Schlagraum, d. h. für constante Stromzufuhr zu den Elektroden und kleine Elektrodencapacität; selbst in diesem Falle wird die Regelmässigkeit der Ausbildung der Lichterscheinungen sehr oft getrübt durch Unregelmässigkeiten in der Bildung des Stromes mitgerissener Luft. Bei stossweiser Entladung, wie sie z. B. mit Inductionsapparaten erhalten wird, treten überhaupt nur Entladungsformen auf, welche als höchst unvollkommen entwickelt zu bezeichnen sind.

Dresden, 30. Juli 1901.

(Eingegangen 31. Juli 1901.)

## *Das astigmatische Bild des horizontalen, ebenen Grundes eines Wasserbassins;*
## *von Ludwig Matthiessen.*

Es ist eine ziemlich bekannte Erscheinung und in verhiedenen Handbüchern der Physik wird man darüber behrt, dass leuchtende oder beleuchtete Objecte, welche unter ır Oberfläche des Wassers oder einer anderen brechenden lüssigkeit liegen, bei schiefer Incidenz der Lichtstrahlen in e oberste Niveaufläche dieser selbst und zugleich dem Auge s Beobachters genähert erscheinen. Zur theoretischen Beweishrung wurden auch Formeln abgeleitet, geometrische Conructionen gegeben oder die Gleichung der diakaustischen ırve hergeleitet, um die Function der Coordinatenverschieıng der Bildpunkte gegen die Objectpunkte zu bestimmen. chellbach hat das Verdienst für ein bestimmtes Brechungsırmögen der Flüssigkeit und für verschiedene Neigungen der licklinie des Auges gegen die Oberfläche der Flüssigkeit, die iakaustik und die scheinbare Verzerrung der Objecte auf ım Grunde mittels genauer rechnerischer Verhältnisse bildch veranschaulicht zu haben. Dessen ungeachtet leiden alle ese mathematischen und geometrischen Darstellungen an ım Mangel, dass sie das vorgelegte Problem nur zur Hälfte sen und damit einen wichtigen Teil der dioptrischen Vorıge im Unklaren lassen. Es ist nicht unbekannt, dass bei der Incidenz von dünnen Strahlenbüscheln, sei es an spiegeln- ın oder brechenden Flächen immer *zwei* Katakaustiken oder iakaustiken, also stets *zwei* Abbildungen von Punktreihen ebt, indem die Strahlenkegel die sogenannte tetraëdrische odification erleiden (Reusch, Kummer), also nicht geiegelte bez. gebrochene Bündel mit *einem* Bildpunkt (homoıntrische Kegel), sondern mit *zwei* getrennten, sich senkrecht euzenden Brennlinien und einer dazwischen liegenden Brennrecke bilden. Auch Schellbach hat diesen Umstand unachtet gelassen, indem er den primären Strahlenkegel in ıter Strahlenfächer zerlegt, welche in der Einfallsebene, dem

sogenannten Hauptnormalschnitt des brechenden elliptischen Flächenelementes liegen. Zerlegt man aber dies elliptische brechende Flächenelement in lauter zum Nebennormalschnitte parallele Streifen, und betrachtet die dioptrische Wirkung aller zu diesen Streifen gehörigen Strahlenfächer, so erhält man ein zweites ebenso helles und scharfes Bild, welches ebenfalls in der Blicklinie des Auges liegt und durch das andere völlig verdeckt wird.

Die analytische Bestimmung des Ortes des Bildpunktes für den Hauptnormalschnitt, also eine durch das Auge des Beobachters und das Einfallslot gelegte Ebene, wird abgehandelt bei Wüllner[1]) auf Grund einer Abhandlung von K. L. Bauer[2]), mit welcher gleichzeitig eine andere vom Verfasser[3]) erschien.

Während nun Engel und Schellbach in der ersten Tafel ihrer darstellenden Optik die scheinbaren Oerter und Deformationen der Bilder eines bestimmten Objectes für verschiedene Oerter des beobachtenden Auges und verschiedene Blicklinien zeichnen, wollen wir umgekehrt für ein festes Auge und variirende Blickrichtungen die Bildfläche, also die Bilder sämtlicher Elemente der Bodenfläche zu bestimmen suchen. Wir bestimmen für unseren Fall die Gleichungen der beiden astigmatischen Bildflächen, indem wir von den Reusch'schen Abscissengleichungen[4]) für Object- und Bildpunkte für die schiefe Incidenz in eine sphärische Fläche ausgehen. Dieselben lauten für den Nebennormalschnitt

$$\text{(I)} \qquad \frac{-r\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{x_0}+\frac{n\,r\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{x_2}=1,$$

für den Hauptnormalschnitt

$$\text{(II)} \qquad \frac{-r\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{\cos e_2^2}{x_0}+\frac{n\,r\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{\cos e_1^2}{x_1}=1,$$

worin $r$ den Krümmungsradius der brechenden Fläche, $e_1$ und $e_2$ Einfalls- und Brechungswinkel, $n$ ($<1$) den Index, $x_0$ den Abstand des Objectpunktes auf dem Strahle, $x_2$ und $x_1$ die beiden

1) Wüllner, Lehrb. d. Exp.-Phys. **4.** p. 93. 1899.

2) K. L. Bauer, Pogg. Ann. **153.** 1874; **154.** 1875.

3) L. Matthiessen, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. **19.** p. 178. 1874.

4) Reusch, Pogg. Ann. **130.** 1867.

Abstände der beiden Brennlinien auf dem Strahle bedeuten. Dabei liegt der Bildpunkt $B_2$, welcher zu $x_2$ gehört, stets auf der optischen Centrale des Objectpunktes $P_0$, welcher zu $x_0$ gehört.

Hat man zwei ebene Parallelflächen vor sich, also die brechende oberste Niveaufläche und die dazu parallele Grundfläche des Wasserbassins, so wird man diese beiden Flächen als zwei concentrische Kugelflächen von unendlich grossem Radius betrachten, also $r = \infty$ setzen dürfen. Dadurch wird für die Brennlinie $B_2$:

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{x_0} - \frac{n}{x_2} = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = n x_0 ;$$

für die Brennlinie $B_1$:

$$\text{(IV)} \quad \frac{\cos e_2^2}{x_0} - \frac{n \cos e_1^2}{x_1} = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = n x_0 \frac{\cos e_1^2}{\cos e_2^2} = x_2 \frac{\cos e_1^2}{\cos e_2^2}.$$

Kennt man also die Objectdistanz $x_0$, so findet man die Bilddistanz $x_2$ aus Gleichung (III), die Bilddistanz $x_1$ aus Gleichung (IV) durch viermalige Projection zwischen dem Einfalls- und dem Brechungswinkel.

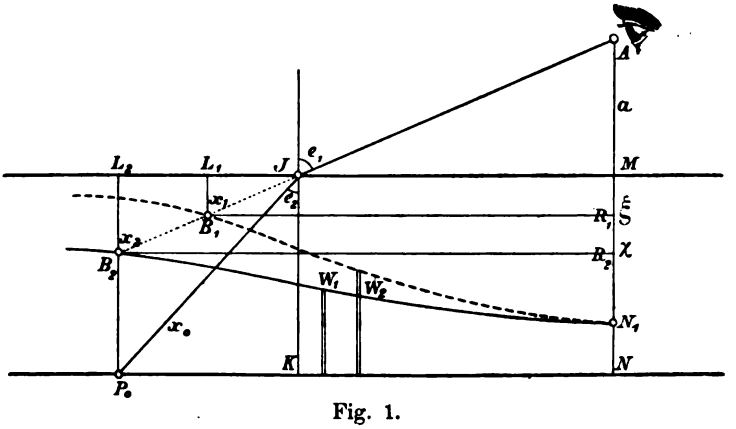



Fig. 1.

Wir wollen zunächst die Gleichung der II. Bildfläche ($B_2$) von dem Grunde des Gefässes bestimmen, also untersuchen, in welcher Gestalt unserem Auge der ganze horizontale Boden des Bassins erscheint. Da dieselbe eine Rotationsfläche ist, wird es genügen, die Durchschnittscurve eines verticalen Normalschnittes der obersten Niveaufläche zu betrachten (Fig. 1).

Es sei $MR_2 = x$ die Abscisse, $R_2B_2 = y$ die Ordinate des II. Bildpunktes oder der II. Brennlinie, $P_0$ der Objectpunkt auf dem Grunde $NK$, $JP_0 = x_0$ die Abscisse auf dem Strahle und $JB_2 = x_2$ die Abscisse des Bildpunktes auf dem Strahle. Ferner sei $JL_2 = u_2$, $a$ der Abstand des Auges $A$ von der Niveaufläche $JM$, $MN = d$ die wirkliche Tiefe des Bassins, $MN_1 = nd = b$ die scheinbare Tiefe, dann ist

$$x_2^2 = u_2^2 + x^2, \qquad n^2 = \frac{u_2^2 + x^2}{u_2^2 + d^2}, \qquad \frac{u_2}{y} = \frac{x}{x+a}.$$
$$x_0^2 = u_2^2 + d^2,$$

Daraus ergiebt sich

$$u_2^2 = y^2 \frac{x^2}{(x+a)^2} = \frac{n^2 d^2 - x^2}{1 - n^2} = \frac{b^2 - x^2}{1 - n^2};$$

und die gesuchte Gleichung der Bildcurve

$$\text{(V)} \qquad y\sqrt{1-n^2} = \frac{x+a}{x}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Es ist demnach der Normalschnitt der II. Bildfläche des Untergrundes eine gestreckte Conchoide. Die Bildcurve hat eine Asymptote und einen Wendepunkt und zwar für dieselbe Abscisse $x$, wie bei der Conchoide, deren Gleichung ist

$$y = \frac{x+a}{x}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Um den Wendepunkt zu finden, suchen wir die Differentialquotienten. Man erhält

$$\text{(VI)} \qquad \sqrt{1-n^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x^3 + a b^2}{x^2\sqrt{b^2 - x^2}}.$$

Daraus ergiebt sich die Asymptote $\partial y / \partial x = \infty$ für $x = 0$ und das horizontale Bodenflächenelement in $N_1$ für $x = b$. Weiter ist nun

$$\text{(VII)} \qquad \sqrt{1-n^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-(x^3 + 3ax^2 - 2ab^2)}{x^3(b^2 - x^2)}.$$

Der Wendepunkt $W$, vor welchem die Grundfläche concav, und hinter welchem sie weiter seitwärts convex erscheint, ist also bei

$$x^3 + 3ax^2 - 2ab^2 = 0.$$

Um die Ideen zu fixiren, nehmen wir an, es sei $n = {}^3/_4$ (Wasser), $a = 8$ cm, $d = 6{,}47$ cm, also $b = nd = 4{,}85$ cm, so

hat die Gleichung die einzige reelle Wurzel 3,687 cm, woraus sich $y = 15{,}1$ cm ergiebt.

Wir wollen noch die I. Bildfläche $B_1$ bestimmen. Es sei $MR_1 = \xi$ die Abscisse, $R_1 B_1 = \eta$ die Ordinate der ersten Brennlinie $B_1$; $JB_1 = x_1$ die Abscisse derselben auf dem Strahle. Ferner sei $JL = u_1$; alsdann ist

$$u_1 : \eta = \xi : (\xi + a),$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\cos e_1^2}{\cos e_2^2} = \frac{1 + \operatorname{tg} e_2^2}{1 + \operatorname{tg} e_1^2} = \frac{1 + (u_2 : d)^2}{1 + (u_2 : x)^2} = \frac{x^2}{b^2};$$

folglich wird

$$\eta \frac{\xi}{\xi + a} = u_1 = u_2 \frac{x^2}{b^2}.$$

Weiter ist

$$x : \xi = u_2 : u_1 = b^2 : x^2,$$

oder

$$x = (b^2 \xi)^{1/3}.$$

In Berücksichtigung der früheren gefundenen Relation

$$u_2 = \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{1 - n^2}}$$

findet man schliesslich die Gleichung der anderen Bildcurve $B_1$

$$\text{(VIII)} \qquad \eta \sqrt{1 - n^2} = \frac{\xi + a}{\xi} \xi^{2/3} \sqrt{b^{2/3} - \xi^{2/3}}.$$

Um sie auf eine Asymptote und einen Wendepunkt zu prüfen, bilden wir wieder den ersten und zweiten Differentialquotienten. Es ist

$$\text{(IX)} \qquad \sqrt{1 - n^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{-(\xi^{5/3} - \frac{2}{3} b^{2/3} \xi^{2/3} + \frac{1}{3} a b^{2/3})}{\sqrt{b^{2/3} \xi^{2/3} - \xi^{10/3}}}.$$

Die Curve hat ebenfalls eine Asymptote für $\xi = 0$ und ein Minimum. Weiter ist nun

$$\text{(X)} \qquad \sqrt{1 - n^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \frac{b^{2/3} \{\xi^{5/3} - 2 b^{2/3} \xi^{2/3} - 5 a \xi^{2/3} + 4 a b^{2/3}\}}{9 \xi^{7/3} (b^{2/3} - \xi^{2/3})^{3/2}}.$$

Der Wendepunkt ist demnach bestimmt durch eine Wurzel der Gleichung

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} \xi^{5/3} - 2 b^{2/3} \xi^{2/3} - 5 a \xi^{2/3} + 4 a b^{2/3} = 0, \\ a = 8{,}0 \text{ cm}, \quad b = 4{,}85 \text{cm}. \end{cases}$$

Die einzige brauchbare Wurzel ist $\xi = 2{,}9120$, und der simultane Wert von $\eta = 10{,}500$.

Wenn man nun nach der Methode von **Schellbach** umgekehrt wie bei dem obigen Probleme, den Objectpunkt $P_0$ als fest, das Auge dagegen als beweglich annimmt, so bewegt sich bei zunehmend schiefer Incidenz das Bild $B_1$ auf der Diakaustik von $N_1$ aufwärts, das Bild $B_2$ auf der Normalen $P_0 M$; dabei steht die Brennlinie $B_1$ senkrecht zur Einfallsebene,

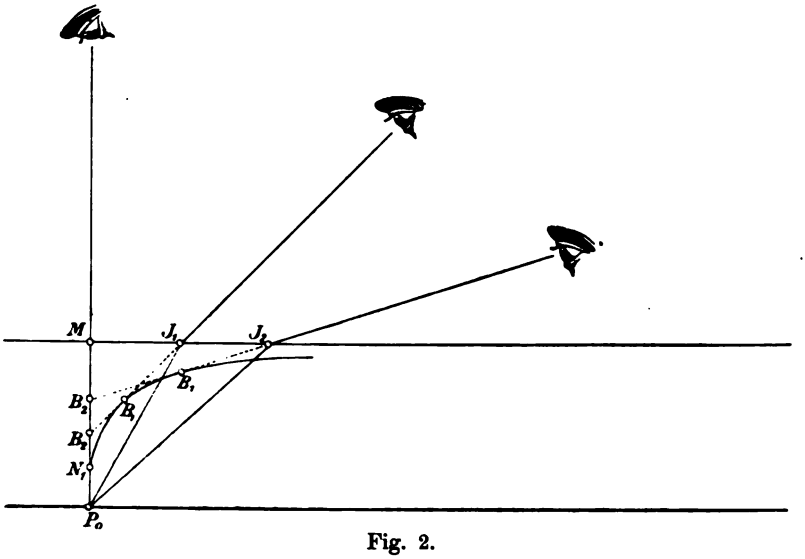



Fig. 2.

und die Brennlinie $B_2$ in der Einfallsebene; sie fällt überall zusammen mit der Normalen $P_0 M$; die Brennstrecke $MJ$ wird also bei einem horizontalen Austritt des Strahlenbüschels unendlich gross (Fig. 2). Betrachtet man das Bild mit einem Mikroskop von schwacher Vergrösserung, so erkennt man leicht, dass man dasselbe auf die beiden Bilder $B_1$ und $B_2$ verschieden einstellen muss, um die beiden sich im Raume kreuzenden Brennlinien scharf zu sehen.

Rostock, Physik. Inst., Juli 1901.

(Eingegangen 26. Juli 1901.)

## 10. *Beitrag zur Kenntnis der Spitzenentladung aus einem Teslapole;* von *E. Knoblauch.*

(Auszug aus der Rostocker Inaugural-Dissertation.)

Versuche mit den nach Tesla benannten Hochfrequenzwechselströmen haben gezeigt[1]), dass derartige Ströme, zu einer feinen Metallspitze geführt, eine dieser gegenüberstehende isolirt aufgestellte Metallplatte in Luft in näherer Entfernung stets positiv laden, während in grösserem Abstande die Platte stets negative Ladung zeigt.

In der einschlägigen Literatur[2]) werden zur Erklärung dieser höchst merkwürdigen Erscheinung verschiedene Meinungen ausgesprochen, sodass zur weiteren Aufklärung auf Veranlassung von Hrn. Prof. Wachsmuth die vorliegende Arbeit[3]) unternommen wurde.

Die Erscheinung setzt zunächst voraus, dass sowohl positive wie negative Elektricität aus der Spitze eines Teslapoles ausströmt, und dass, wie Hr. Himstedt in seiner Arbeit angiebt, die negative Elektricität eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen kann als die positive; ferner tritt die positive Elektricität in der Nähe in grösseren Mengen auf, während in weiterem Abstande die negative die Platte allein erreicht.

Um nun ein klares Bild von diesen Entladungserscheinungen erhalten zu können, wurde zuerst genau untersucht, in welchem Verhältnis das an der Spitze gemessene Potential zu dem der in verschiedenen Entfernungen aufgestellten Metallplatte steht. Ferner wurden eingehendere Versuche über den Grund der Umkehr des Ladungssinnes gemacht, indem mit verschieden-

1) F. Himstedt, Wied. Ann. **52.** p. 473. 1894; **68.** p. 294. 1899.

2) K. Wesendonck, Naturw. Rundsch. **10.** p. 401. 1895; A. Pflüger, Wied. Ann. **60.** p. 768. 1897.

3) Eine kurze Uebersicht der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit erschien in der Physikalischen Zeitschrift 2. Jahrgang Nr. 11 p. 165—166. 1900.

artig gestalteten Platten experimentirt wurde. Mit gutem Erfolge ist dann die Methode der Lichtenberg'schen Figuren in später näher zu beschreibender Weise angewendet worden.

Zur Erzielung der Hochfrequenzströme wurde während des ganzen Verlaufes der Arbeit die symmetrische Teslaanordnung gewählt, die auch Hr. Himstedt in seiner Arbeit anwandte (Fig. 1).

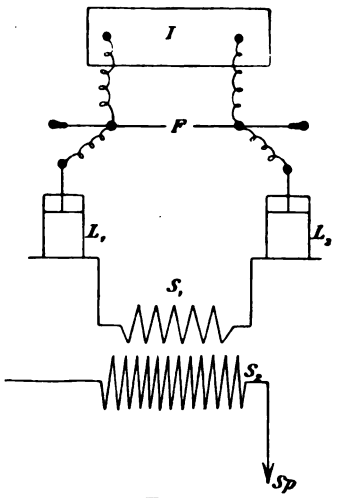



Fig. 1.

*I* Inductorium. *F* Funkenstrecke. $L_1$ und $L_2$ Leydener Flaschen. $S_1$ und $S_2$ primäre und secundäre Teslaspule. *Sp* strahlende Spitze.

Das Siemens'sche Inductorium wurde bei einer Betriebsspannung von 110 Volt mit Maschinenstrom von 3—4 Amp. gespeist. Ein mit Zinkstäben versehenes Funkenmikrometer diente als Funkenstrecke; das knatternde Geräusch der letzteren war bei etwa 17 mm Funkenlänge am stärksten, und die Ausstrahlung der Teslaspitze gab bei dieser die regelmässigsten Resultate. Zur Vermeidung des Ausbleibens der Funkenstrecke mussten die Zinkstäbe einer öfteren Reinigung unterzogen werden.

Die zu allen Versuchen benutzte Spitze war fest montirt in Hartgummi und auf einem mit Millimeterteilung versehenen Brett verschiebbar befestigt; die Spitze bestand aus einer in einen Messingdraht eingelöteten Stahlstecknadel; die Platte war isolirt auf dem Brettchen ihr gegenüber aufgestellt.

Bei den ersten Versuchen wurde sowohl Spitze wie Platte mit je einem statischen Voltmeter in Verbindung gebracht, dessen Ausschläge durch Umwechseln controllirt werden konnten. Eine genaue Ablesung an den Voltmetern zu erreichen, ist nicht leicht, und die Versuchsergebnisse sind mit Sicherheit schwer festzustellen gewesen; einerseits entstehen leicht durch momentanes Aussetzen der Funkenstrecke unregelmässige Ausschläge, andererseits setzte auch öfters durch die Spannungs-

schwankungen in der Centrale der Unterbrecher des Inductoriums aus. Um tadellose Resultate zu erhalten, musste ja nach den von Himstedt und anderen gemachten Erfahrungen die Spitze dauernd strahlen, um einen constanten Potentialwert zu erhalten; ferner musste aber auch die Ablesungszeit nach Möglichkeit gekürzt werden, da, wie auch schon gezeigt wurde, eine dauernd strahlende Spitze von ihrem Anfangspotential allmählich etwas einbüsst.

Messungen wurden wegen der schwankenden Werte zahlreich ausgeführt, und mit einiger Uebung gelingt es, die erhaltenen Resultate übereinstimmend zu bekommen.

In der nachstehenden Tabelle bedeutet $a$ den Abstand Spitze-Platte in Millimetern; $v_1$ das Spitzen-, $v_2$ das Plattenpotential. In diese Tabelle sind zwei Werte von $v_1$ und $v_2$, und von $v_1'$ und $v_2'$ eingereiht, die bei verschieden eingestellter Funkenstrecke erhalten und zum Vergleich nebeneinander gestellt wurden. Die Zahlen unter $v_1$, $v_2$, $v_1'$ und $v_2'$ bilden den absoluten Wert der Spannung in Volts $\times 10^2$, wie er an den Messinstrumenten abgelesen wurde.

| $v_1$ | $v_2$ | $v_1'$ | $v_2'$ | $a$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_1'$ | $v_2'$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3,4 | 3,4 | 0 | 8 | 7,1 | 7 | 7 | 17 |
| 1 | 1 | 3,2 | 2,4 | 1 | 8 | 7 | 7 | 6,7 | 18 |
| 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 8 | 6,8 | 7 | 6,2 | 19 |
| 0,2 | 1,7 | 4 | 2,8 | 3 | 8 | 6,5 | 7 | 5,9 | 20 |
| 0,1 | 1,5 | 3 | 2,8 | 4 | 8 | 6,2 | 7 | 5,5 | 21 |
| 0,1 | 1,2 | 2,5 | 2,2 | 5 | 8 | 6,3 | 7 | 5 | 22 |
| 0,2 | 1,7 | 2,2 | 1,7 | 6 | 8 | 5,8 | 7 | 4,4 | 23 |
| 1 | 1,8 | 2,2 | 1,8 | 7 | 8 | 5 | 7 | 3,7 | 24 |
| 1,2 | 1,4 | 2,7 | 2 | 8 | 8 | 4,6 | 7 | 3,2 | 25 |
| 1,8 | 1,8 | 2,7 | 2 | 9 | 8 | 3,8 | 7 | 2,8 | 26 |
| 2,3 | 2,8 | 2,7 | 2,7 | 10 | 8 | 3 | 7 | 2,2 | 27 |
| 4,5 | 5 | 3 | 2,8 | 11 | 8 | 2,1 | 7 | 1,6 | 28 |
| 8,5 | 7 | 6 | 7 | 12 | 8 | 1,8 | 7 | 1,4 | 29 |
| 9 | 7,5 | 9 | 8,7 | 13 | 8 | 1,4 | 7 | 1,4 | 30 |
| 8 | 7,7 | 8,5 | 8 | 14 | 8 | 1,2 | 7 | 1,2 | 35 |
| 8 | 7,2 | 8 | 7,7 | 15 | 8 | 0,8 | 7 | 0,5 | 40 |
| 8 | 7,2 | 7,5 | 7,5 | 16 | | | | | |

Auf der dann folgenden Skizze (Fig. 2) findet man Platten- und Spitzenpotential in Volts als Function des Plattenabstandes

aufgetragen. Es ist dabei zu bemerken, dass das augenscheinlich plötzliche Maximum bei beiden Curven an der Stelle eintritt, an der das directe Funkenspiel Spitze-Platte erlischt. Es erreichen an dieser Stelle beide Potentiale ihren maximalen Wert, und, während das Spitzenpotential constant bleibt, klingt das Plattenpotential allmählich ab.

Der Verlauf der Curve des Spitzenpotentials erklärt sich vielleicht so, dass beim Funkenspiel die auf der Spitze angesammelte Elektricitätsmenge einen hohen Spannungswert nicht erreichen kann, da fortdauernd durch die Funken eine heftige

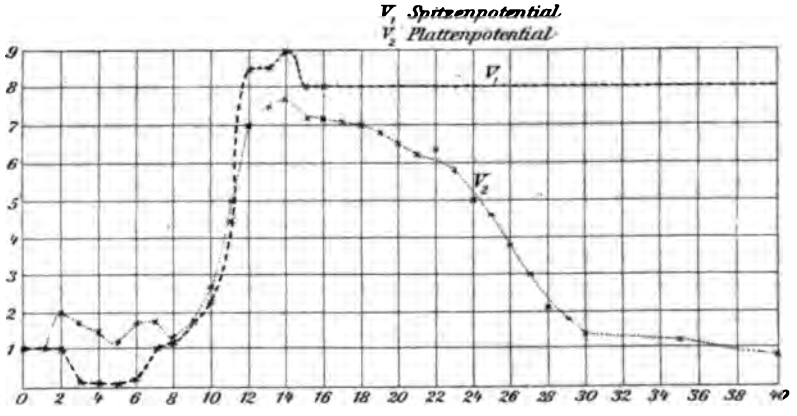



Fig. 2.

Entladung eintritt. Klingt dagegen das Funkenspiel allmählich ab, so treten natürlich Maximalwerte auf, da nun die Spitze immer so lange geladen wird, bis die Ausstrahlung aus ihr an die Luft erfolgen kann. Interessant ist nun, dass auch das Plattenpotential in demselben Augenblick seinen Maximalwert erreicht, wie das der Spitze. Man muss daher annehmen, dass die strahlende Elektricität im Gegensatz zu dem Funkenübergang auf der Platte gewissermassen einen Ansammlungswert der Spannung bewirkt, der natürlich an der Stelle unmittelbar hinter dem Aufhören des Funkenspiels seinen Maximalwert erreichen muss.

Eigentümlich und unerklärt bleibt aber der Abfall des Spitzenpotentials sofort hinter seinem Maximum auf den dann dauernd constant bleibenden Wert.

Genauere Messungen mit den Voltmetern auszuführen, war leider nicht möglich, da dieselben nur bis 100 Volt hinabgehen. Als Maximalwert des Plattenpotentials konnte bei passender Regulirung der Funkenstrecke im 14 mm-Abstande Spitze-Platte eine Spannung von 3800 Volt gemessen werden.

Zu den folgenden Untersuchungen wurde ein Thomsonsches Quadrantenelektrometer benutzt, welches durch Verlängerung der bifilaren Aufhängung möglichst empfindlich gemacht war; durch sorgfältige Reinigung der Isolation der Quadrantenpaare wurde eine dauernde Nulllage gesichert.

Der Nadel wurde mit einer Zamboni'schen Säule hohe Ladung zugeteilt, ein Quadrantenpaar zur Erde abgeleitet, das andere mit der Platte verbunden.

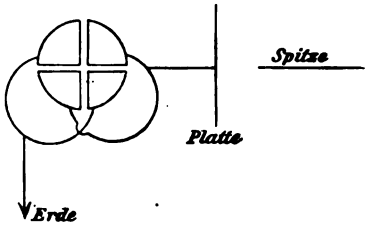



Fig. 3.

Durch Projection eines im Spiegel des Instrumentes aufgefangenen Glühlampenfadens auf eine Scala wurde eine Beobachtung der Ausschläge unter gleichzeitiger Verschiebung der Spitze ermöglicht, sodass man ohne Gehülfen die Ausschläge des Spiegels beobachten konnte.

Die in der Arbeit von Hrn. Himstedt gefundene Umkehr der positiven in die negative Ladung wurde in sicherer Weise erhalten; die Versuche gelangen sogar mit Hülfe eines Bohnenberg'schen Elektroskops in der einfachsten Weise. Der leerlaufende Teslapol lag hierbei nicht unter Oel, sondern etwas abgebogen frei in der Luft; Störungen dadurch konnten nicht beobachtet werden.

Am besten lassen sich diese Experimente ausführen, wenn man bei etwa 6 cm Spitzenabstand mit der Strahlung beginnt, dann vorsichtig und langsam die Spitze der Platte nähert. Man kann deutlich beobachten, wie bei etwa 4 bis

5 cm Abstand die Nadel des Instrumentes in lebhafte Zuckungen gerät, einmal positive, einmal negative Ladung zeigen will, um dann nach positiver Seite definitiv auszuschlagen.

Der nächstliegende Gedanke war nun, zu untersuchen, ob zwischen der Plattengrösse und dem Sinn der Ladung irgend ein Zusammenhang besteht. Zu diesem Zweck wurden Platten von 18, 8, 3 und 1 cm Durchmesser hintereinander angewendet; es zeigte sich aber immer dieselbe Erscheinung; die neutrale Zone, wenn man die Stelle so nennen kann, bei der die Ladung weder ausgesprochen positiv noch negativ ist, lag stets an derselben Stelle und die erste positive Ladung konnte stets bei dieser Versuchsanordnung bei 40—42 mm festgestellt werden.

Ein jetzt im abgedunkelten Experimentirzimmer angestellter Versuch zeigte, dass in der Entfernung von 40 mm gerade noch aus der Spitze Glimm- oder Büschelentladungen auf die Platte übergingen, und man kam nun zu der Annahme, dass hierdurch die Platte ihre positive Ladung erhalten muss.

Wenn es jetzt gelänge, diese Büschelentladungen zu verhindern, direct auf die Platte überzugehen, so könnte es vielleicht möglich sein, die negative Ladung auch bei näherer Entfernung dauernd auf einer Platte zu erhalten. Um dies nun zu erreichen, wurden Versuche mit kreisrund ausgeschnittenen Zinkplatten angestellt.

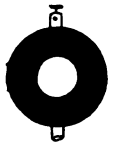


Fig. 4.

Die Zinkplatten hatten einen Durchmesser von 18 cm und enthielten Ausschnitte von 11 (10 ... bis 2 cm herab) Durchmesser (Fig. 4).

Jetzt gelang es nun thatsächlich, eine Platte mit nur negativer Ladung zu versehen. Im Dunkeln kann man deutlich sehen, dass dann auch keine Büschelentladungen direct auf die Platte mehr übergehen, sondern der Strahlenbüschel befindet sich in dem Ausschnitt der Platte; es scheint also aus dem Teslapole positive und negative Elektricität gleichzeitig auszuströmen, so zwar, dass die positive Ausstrahlung gewissermassen mantelförmig von der negativen umgeben wird.

(Diese mantelförmigen Entladungsvorgänge gelang es bei späteren Versuchen noch auf andere Weise experimentell nachzuweisen.)

**Versuchsreihe mit ausgeschnittenen Platten.**

$l_1$, $l_2$, $l_3$ sind drei nebeneinander ausgeführte Messungen und bedeuten für die Lage der Umkehrpunkte den Abstand Spitze-Platte in Millimetern; $a$ stellt den Durchmesser der ausgeschnittenen Kreise in Centimetern dar:

Tabelle der Umkehrpunkte.

| $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $a$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 40 | 40 | 0 | 39 | 36 | 37 | 5 |
| 35 | 30 | 35 | 2 | 27 | 20 | 19 | 6 |
| 35 | 40 | 40 | 3 | 20 | 18 | 21 | 7 |
| 40 | 40 | 39 | 4 | 10 | 12 | 11 | 8 |

Wird der Ausschnitt grösser als 8 cm, so erhält die Platte überhaupt keine positive Ladung mehr.

Aus den vorliegenden Messungen ergiebt sich: Je grösser der Ausschnitt ist, um so näher rückt der Umkehrpunkt des Ladungssinnes an die Spitze heran bez. umgekehrt, je kleiner der Ausschnitt wird, desto weiter liegt der Punkt der ersten positiven Ladung von der Spitze ab.

Um in einfacher experimenteller Weise zur Erklärung dieser Erscheinungen weiteres Material zu bieten, wurde jetzt die Methode der Lichtenberg'schen Staubfiguren gewählt. Die weiter unten folgenden Versuche stiessen zuerst auf hartnäckige Schwierigkeiten, die vor allem dem hohen Feuchtigkeitsgrad der Luft von 60—72 Proc. durch die Nähe der Ostsee zuzuschreiben waren.

Zu Hülfe kam die Arbeit von K. Antolik,[1]) in der eine vorzügliche Methode zur Herstellung von Lichtenberg'schen Figuren beschrieben ist.

Als die Luft durch Annäherung der Wintermonate zum Experimentiren geeigneter wurde, gelang es auch in der einfachsten Weise solche Figuren herzustellen; doch ist ihr Charakter ein anderer, und es soll darum von diesen erst später die Rede sein.

---

1) K. Antolik, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. p. 5. 1891/92.

Es folgen zunächst Versuche nach der Methode von K. Antolik:

Ein grosser Glaskolben von 10 *l* Inhalt wurde mit warmem Wasser von ca. 60° C. gefüllt und isolirt auf einer Glasplatte vor die strahlende Spitze gesetzt. Hr. Antolik empfiehlt in seiner Arbeit, dem Kolben von innen her eine kleine elektrische Ladung zu geben, da dann die Figuren in viel grösseren Dimensionen und ausgesprochener Schönheit zu stande kommen.

Die Versuchsanordnung war nun etwa die folgende (Fig. 5):

Mit einer Influenzmaschine *J* wurde unter Zwischenschaltung eines Funkenmikrometers *F* eine bestimmte abgezählte Funkenzahl durch eine eingelegte Messingkette *K* in das

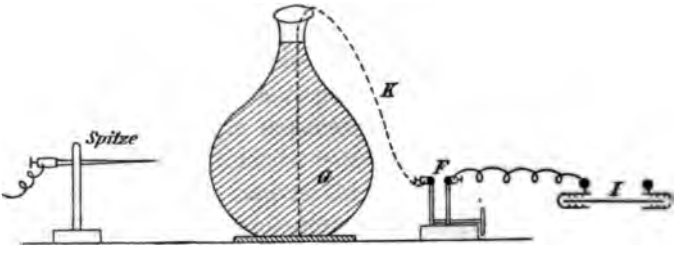



Fig. 5.

Innere des Kolbens *G* abgegeben. Durch die Innenladung wirkte der Kolben wie ein Condensator. Zur Erzielung von guten brauchbaren Figuren ist es nötig, den Kolben vor jeder Bestäubung sorgfältig mit Alkohol zu reinigen.

Da ein Fixiren der Figuren in der sonst üblichen, wohl zuerst von v. Bezold angegebenen Weise des Abklatschens mit schwarzem Seidenpapier, welches mit Gummilösung bestrichen wird, durch die Kugelform des Kolbens unmöglich gemacht war, und zur Herstellung einer fortlaufenden Serie von Lichtenberg'schen Figuren in verschiedenem Spitzenabstande ein solches Fixiren notwendig wurde, musste zur photographischen Methode geschritten werden.

Um das auf einem gewöhnlichen blanken Glaskolben sich stets bildende Spiegelbild zu entfernen, musste der Kolben auf einer Hälfte durch Schleifen mittels Schmirgels mattirt werden. Dem blossen Auge am deutlichsten sichtbar werden die

Lichtenberg'schen Figuren auf dem Glaskolben, wenn das Wasser in ihm leicht gefärbt wird, etwa mit einigen Tropfen Tinte. Bei der photographischen Aufnahme zeigte sich aber, dass das Rot der aus dem Schwefel-Mennigepulver erhaltenen Figuren auf die photographische Platte wenig einzuwirken vermag; aus diesem Grunde wurde daher der Kolben mit etwas Milch weiss gefärbt, sodass sich das Rot auf dem weissen Untergrunde etwas kräftiger abheben konnte. Zum Bestäuben wurde Schwefel-Mennigepulver zu gleichen Teilen angewendet, mit diesem wurden zweifellos die besten Resultate gewonnen, nachdem auch das Dreipulvergemisch, angegeben von Hrn. A. Bürker[1]), ausprobirt worden war. Für die einzelnen Aufnahmen war es notwendig, dass der Kolben vom photographischen Apparat eine constante Entfernung hatte, um einen Vergleich der Dimensionen der einzelnen Figuren zu ermöglichen. Dies wurde so erreicht, dass der Kolben in eine dem Apparat gegenübergestellte Holzecke geschoben wurde.

Die Lichtenberg'schen Figuren wurden nun in einer fortlaufenden Reihe von 2 zu 2 mm in folgender Weise hergestellt. Die Influenzmaschine wurde langsam angedreht, so dass jedesmal 10 Funken von 10 mm Länge übergingen, dann wurde der Primärkreis der Teslaanordnung eingeschaltet, und 15 Secunden der Kolben der Spitzenstrahlung ausgesetzt. Bei der Ladung mit der Influenzmaschine ist *wohl* darauf zu achten, dass sich die Maschine nicht während einer Versuchsdauer umladet, da dies eine Störung in dem Charakter der Figuren hervorrufen kann. Jetzt erfolgte das Bestäuben mit Schwefel-Mennigepulver, nachdem jedesmal das Innere des Kolbens mit der Hand durch Berührung der Kette zur Erde abgeleitet war. Nach 1 bis 2 Minuten wurde dann der Kolben vor den Apparat gesetzt und die Aufnahme erfolgte.

Nach einigen misslungenen Versuchen kam man empirisch dazu, mit dem Fortnehmen des Kolbens nach der Bestäubung einige Zeit zu warten, da dann das Pulvergemisch besser anzuhaften scheint.

Die folgenden Figuren zeigen solche Aufnahmen: Fig. 6 in 0 mm, Fig. 7 in 2 mm Abstand Spitze-Kolben. Der innere

1) A. Bürker, Ann. d. Phys. 1. p. 474. 1900.

Kranz positiven Charakters war prächtig ausgebildet, in Kreisform herum sind deutlich negative Ringe sichtbar. Die offenbar negativen Scheiben im Innern des positiven Kranzes rühren wohl vom directen Funkenspiel her, denn sie verschwinden, sobald dieses erlischt (vgl. auch Figg. 10—13).

Weitere Beispiele für eine solche Serie sind in Figg. 10—15 bei wachsendem Abstande gegeben. Ihre Herstellung geschah

Fig. 6.

aber ohne Glaskolben und wird erst weiter unten beschrieben (vgl. p. 366).

Auf der jetzt folgenden Skizze findet man eine solche Serie von Figuren in ihren Umrissen aufgetragen. Der grosse Halbkreis deutet in $\frac{1}{2}$ Naturgrösse hierbei den Kolben an, während die einzelnen Curven, $a\,b$, $a\,c$, $a'\,b'$, $a'\,c'$ etc. immer die Verbindung der strahlenden Spitze mit dem Durchmesser der negativen Kreise $b\,c$, $b'\,c'$ etc. der Lichtenberg'schen Figuren bilden (vgl. Fig. 8). Die Lage der strahlenden Spitze

rch die Punkte $a$, $a^1$, $a^2$ etc. gegeben; die Spitze ist mer um die passende Millimeterzahl verschoben gedacht. Ausstrahlung der Spitze bildet also einen Kegel, dessen immer stumpfer wird, je mehr man der Spitze einen and nähert. Dabei scheint auf der glatten Oberfläche bens ein Gleiten der Entladungserscheinungen vor sich

Fig. 7.

n, so zwar, dass der Strahlenkegel sich gewissermassen Wandung des Kolbens anzuschmiegen sucht, denn selbst ngente, an die Kugelschale gelegt, würde z. B. von $a^3$ en Punkt $b^3$ treffen können.

ter der Kugelschale in Fig. 8 sind die Durchmesser der Kolben erhaltenen Lichtenberg'schen Figuren durch e Gerade dargestellt, deren Abstand voneinander dem igen Spitzenabstand entspricht. Die Endpunkte der sind durch eine Curve verbunden, die bei ca. 15 mm

Spitzenabstand ein Maximum erreicht, welches beim Abklingen des directen Funkenspieles eintritt; nach diesem findet eine fortschreitende Zunahme der Dimensionen der Figuren statt, denn nach 40 mm Spitzenabstand war der äussere negative Kreis nicht mehr auf dem Kolben sichtbar.

Je weiter man den Kolben von der Spitze entfernt, desto mehr scheint der ausstrahlende Kegel sich symmetrisch nach

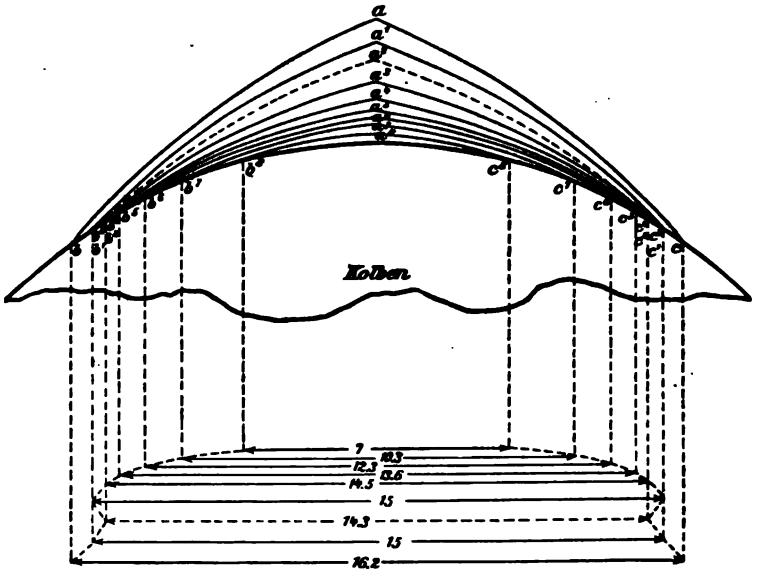



Fig. 8.

beiden Seiten auszubreiten. Hr. Warburg hat in einer jüngst erschienenen Arbeit[1]) auf diesen Strahlungskegel bei statischer Spitzenstrahlung hingewiesen, er sagt dort: „Bei der Spitzenstrahlung ist das Stromgebiet nahezu ein Kegel, dessen Spitze in der geladenen Spitze liegt . . .“

Einen Versuch, den Strahlungskegel auf directem Wege zu fixiren, um eventuell auch bei ganz freier Strahlung mit seinem Winkel bekannt zu werden, findet man in der folgenden Fig. 9.

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 2. p. 295. 1900.

Hier wurde die ausstrahlende Spitze unmittelbar vor die photographische Camera gesetzt und nachdem die Funkenstrecke absolut abgedunkelt war, exponirt. Das Bild zeigt die Strahlungsspitze mit einem Lichthauch umgeben, aus dem heftige Büschelentladungen stattfinden; am äussersten Teil der Spitze sieht man den Strahlungskegel unter einem Winkel von ca. 120° deutlich ansetzen.

Fig. 9.

Bei den jetzt folgenden Untersuchungen wurde auf die Anwendung der Kolbenmethode verzichtet, und eine auf der Rückseite mit Stanniol belegte, sauber polirte Hartgummiplatte benutzt. Zu diesen Versuchen gehören die Figg. 10—15, und Fig. 17.

In ähnlicher Weise wie mit dem Kolben wurden Figuren gewonnen[1]), indem nämlich die Rückseite der Hartgummiplatte, also die Stanniolbelegung, mit Hülfe der Influenzmaschine und einer dazwischen geschalteten Funkenstrecke mit einer dichten Ladung versehen wurde. In den so erhaltenen Figuren konnte nichts Neues gefunden werden, nur dass auf dem Glase selben die Figuren schöner und regelmässiger erschienen waren. Im übrigen findet bei der angewendeten Vergrösserung des Abstandes von 4 zu 4 mm Spitze-Hartgummiplatte ebenfalls eine allmähliche Zunahme der Dimensionen der Figuren statt; diese Figuren wurden mit schwarzem Seidenpapier abgeklatscht, und sind wohl deshalb interessant, weil sie leidlich die Farben der so entstandenen Figuren zeigen.

Frühere Versuche ohne die Ladung mit der Influenzmaschine auf einer Hartgummiplatte auch in weiterem Abstande Spitze-Platte Lichtenberg'sche Figuren zu erhalten, waren fehlgeschlagen, doch kam die trocknere Jahreszeit zu Hülfe, um auch diese Versuche gelingen zu lassen.

Hr. Himstedt hat in seiner Arbeit[2]) wohl solche Versuche schon gemacht, da er dort angiebt:

„Erzeugt man Lichtenberg'sche Figuren mit dem Pole eines Inductoriums, so erhält man je nach dem benutzten Pole

1) Dieselben sind in der Dissertation reproducirt.
2) F. Himstedt, Wied. Ann. 52. p. 481. 1894.

oder je nach der Stromrichtung positive oder negative Figuren. Bei der Teslaspule dagegen erhält man stets positive Figuren."

Die folgende Serie von Figuren (Figg. 10—15) zeigt, dass man ohne weiteres die Figuren nicht rein positiv nennen kann;

Fig. 10. 0 mm.

Fig. 11. 4 mm.

Fig. 12. 8 mm.

Fig. 13. 14 mm.

die ersten Figuren beweisen vielmehr, dass aus einem Teslapole thatsächlich positive und negative Elektricität gleichzeitig ausströmt; die zuerst erhaltenen Figuren ähneln denjenigen, die man bei der oscillirenden Entladung einer Leydener Flasche

erhält, der man eine Spitze anhängt. Die Spitze wurde immer von 2 zu 2 mm weiter von der Platte entfernt und dann eine neue Figur gebildet[1]); man erhält dann so lange den Charakter der oscillirenden Leydener Flaschenentladung, bis das directe Funkenspiel aufhört und nur noch starke Büschelentladungen ausströmen; dann erst wird der Charakter der Lichtenberg'schen Figuren ein rein positiver; die folgenden Figuren zeigen ein langsames Abklingen der positiven Ladung.

Die Versuche, in weiterer Entfernung etwa nur negative Ladung zu erhalten, sind nicht sicher gelungen, da die Hart-

Fig. 14. 18 mm.

Fig. 15. 22 mm.

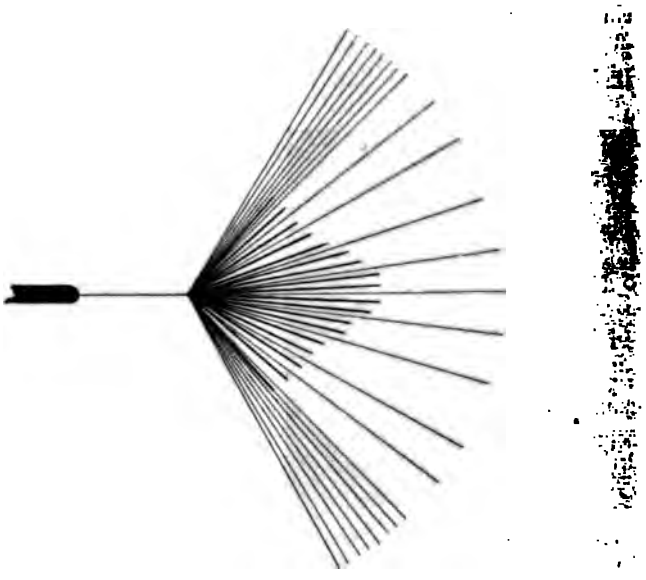
gummiplatte, ohne Ladung mit Schwefel-Mennigepulver bestreut, fast dasselbe Bild zeigte, wie nach der Ladung.

Jedenfalls lässt sich aus diesen Versuchen der sichere Schluss ziehen, dass die positiven Ladungen auf der früher benutzten Metallplatte nur durch die Büschelentladungen erhalten wurden; die gewonnenen positiven Figuren zeigen aber ausserdem, dass die positive Elektricität in der Verlängerungslinie der Spitze am kräftigsten zu wirken vermag, da in dieser Richtung noch positive Ladungsteilchen auf die Platte gelangen, während für die nicht centralen Teilchen die Kraft zur Erreichung der Hartgummiplatte nicht mehr auszureichen scheint.

1) In der Dissertation ist die vollständige Serie der Figuren reproducirt.

Diese Versuchsresultate stehen in gutem Einklange mit denen, die früher erhalten wurden mit den ausgeschnittenen Platten, bei denen bei kleiner werdendem Innenkreis der Punkt der ersten positiven Ladung sich immer weiter von der Spitze entfernt.

Das Bild einer strahlenden Teslaspitze muss man sich nach den vorliegenden Experimenten etwa, wie Fig. 16 zeigt, vorstellen.



——— positive Entladung — — — negative Entladung

Fig. 16.

Die positive Ausstrahlung, in der Figur durch stärkere Linien markirt, klingt nach den Seiten zu allmählich ab und zeigt ihr Maximum in der Verlängerungslinie der Spitze bei ca. 40—42 mm Abstand; dem gut im Dunklen ausgeruhten Auge ist die positive Büschelentladung sichtbar; die negative Ausstrahlung gruppirt sich in der Hauptsache um die positive herum, bleibt zwar dem Auge unsichtbar, wirkt aber noch auf eine vor die Spitze gesetzte Metallplatte in einem Abstand vom 75—100 cm.

In Fig. 17 ist eine Lichtenberg'sche Figur von ausgesprochener Schönheit in $^1/_2$ Naturgrösse gezeigt; diese ent-

and dadurch, dass der leerlaufende Teslapol mit der Stanniol-elegung der Hartgummiplatte verbunden wurde, während der ndere Pol an die etwa 1 cm davon entfernte, isolirt auf-estellte Spitze geführt wurde; interessant ist es, dass die harakteristik dieser Figur der von Fig. 10 entspricht.

Fig. 17.

Um die Gleichzeitigkeit der positiven und negativen Aus-strahlung zu zeigen, hat Hr. Himstedt in seiner Arbeit[1]) der ausstrahlenden Spitze gegenüber eine isolirte Metallplatte von 20 cm Durchmesser aufgestellt, die mit einem Ausschnitt

1) F. Himstedt, l. c. 68. p. 300. 1899.

versehen war. Hinter dieser Metallplatte stellte er eine zweite auf; ihre Abstände liessen sich dann, wie auch eigene Versuche zeigten, so reguliren, dass die erste Scheibe positive, die zweite negative Ladung erhält.

Da es mir nun gelang, eine solche mit einem Ausschnitt versehene Platte in jeder Entfernung nur mit negativer Ladung zu versehen, so müsste in diesem Fall eine hinter der ersten stehende zweite isolirte Platte von den Büschelentladungen der Spitze getroffen werden und positive Ladung zeigen; diese Versuche gelangen nicht, selbst bei Anwendung von noch grösseren Ausschnitten. Man muss nämlich, um der Platte positive Ladung zu erteilen, diese auf mindestens 40 mm der Spitze nähern; es erhielt dann aber auch die erste Platte positive Ladung, da ja der Strahlungswinkel bei Annäherung einer Platte stumpfer wird, und so die erste Platte ebenfalls treffen muss.

In der That wird wohl, wie Hr. Himstedt weiter in seiner Arbeit ausführt, die negative Elektricität sich weiter in den Raum fortzupflanzen vermögen wie die positive; ob dies aber in der Verschiedenheit ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder an dem Charakter der Ausströmungserscheinungen selbst liegt, scheint mir nur noch eine offene Frage zu bleiben.

Versuche, das sichtbare Strahlenbündel mit Hülfe eines kräftigen elektromagnetischen Feldes abzulenken, um eventuell auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten schliessen zu können, sind nicht gelungen. Um eine Ablenkbarkeit zu erhalten, müssten die Strahlen etwa durch zwei hintereinander aufgestellte Blenden geführt werden, wie bei den entsprechenden Versuchen mit Kathoden- und Becquerelstrahlen verfahren wurde; dies gelang nicht, andererseits gelangen auch Versuche nicht mit Lichtenberg'schen Figuren, die ihre Form durch das einwirkende Magnetfeld verändern könnten.

### Kurze Uebersicht der Hauptresultate.

1. *Eine Teslaspitze* hat kein constantes Potential, wenn man ihr in variirtem Abstande eine Metallplatte gegenüberstellt. Ihre Maximalspannung zeigt sie in dem Augenblick, in dem

das directe Funkenspiel Spitze-Platte abklingt; kurz darauf wird das Potential erst constant.

2. *Das Potential* der der Spitze gegenüberstehenden Metallplatte erhält seinen Maximalwert an gleicher Stelle.

3. *Die positive Ladung,* welche die einer Spitze gegenübergestellte Platte erhält, stammt aus den sichtbaren Büschelentladungen der Spitze.

a) Verhindert man das Auftreffen dieser Büschelentladungen auf die Platte dadurch, dass man die Platte in geeigneter Weise ausschneidet, so lässt sich dieselbe selbst in nächstem Abstande niemals mit positiver Ladung versehen.

b) Die Figg. 10—15 zeigen, dass, solange auf eine Hartgummiplatte von der Spitze Büschelentladungen auftreffen, sich positive sternförmige Lichtenberg'sche Figuren ausbilden.

4. *Eine Teslaspitze* strahlt positive und negative Elektricität gleichzeitig aus.

a) Beim Funkenspiel Spitze-Platte bilden sich Lichtenberg'sche Figuren aus, die den Charakter einer oscillirenden Leydener Flaschenentladung haben, die negative Ladung befindet sich flächenförmig in der Mitte, während sich die positive sternförmig um diese gruppirt.

b) Stellt man nach Himstedt eine mit einem Ausschnitt versehene Platte so auf, dass sie positive Ladung erhält, und eine zweite in regulirtem Abstande hinter diese, so erhält diese negative Ladung.

5. *Die Ausstrahlung* aus der Spitze geschieht in Form eines Kegels, dessen äusserer Mantel ausschliesslich negative Elektricität und dessen Inneres vorwiegend positive Büschelentladungen enthält.

(Hierbei ist wohl zu beachten, dass diese Thatsache nur für die Strahlung gilt, nicht aber für die directen Funkenentladungen.)

6. *Der Winkel,* den die strahlende Elektricität bildet, vergrössert sich bei Annäherung einer Platte, er beträgt bei freier Strahlung in Luft ca. 120°.

7. *Die positive Elektricität* scheint in der Verlängerungslinie der Spitze am kräftigtsten zu wirken, da die letzten posi-

tiven Ladungen auf der Hartgummiplatte sich dicht um di
gruppiren. Vgl. Fig. 16.

Am Schlusse danke ich herzlichst sowohl meinem ho
verehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. Wachsmuth für die A
regung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Ratschläge,
auch dem Director des physikalischen Institutes Hrn. P
Dr. Matthiessen für das freundliche Interesse, das er
stets entgegengebracht hat.

(Eingegangen 31. Juli 1901.)

## 11. *Symbolische Integrale der elektromagnetischen Gleichungen, aus dem Anfangszustand des Feldes abgeleitet, nebst Andeutungen zu einer allgemeinen Theorie physikalischer Operatoren;*

*von Ludwig Silberstein.*

Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in einem vollkommen isolirenden Medium, von der Dielektricitätsconstanten $K$ und der magnetischen Permeabilität $\mu$, können in der Form

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A K \dfrac{\partial E}{\partial t} = & \operatorname{curl} M, \\ A \mu \dfrac{\partial M}{\partial t} = - & \operatorname{curl} E \end{cases}$$

geschrieben werden, falls man unter $A$ das bekannte Verhältnis der Einheiten, unter $t$ die Zeit, unter $E$ und $M$ die resultirende elektrische, bez. magnetische Kraft (als Vectoren) versteht, die zur Zeit $t$ in einem beliebigen Punkte des Feldes herrscht. Ist das Medium isotrop, so sind $K$ und $\mu$ einfache Multiplicatoren; ist es hingegen krystallinisch, so haben $K$ und $\mu$ die Bedeutung von linearen Vectoroperatoren. Im übrigen kann das betrachtete Dielektricum homogen oder heterogen sein und die Zahlenwerte von $K$ und $\mu$ können im allgemeinen an gewissen Flächen discontinuirlich werden, sofern es sich um Körper handelt, die in einem gemeinsamen Medium tauchen oder aber um Körper von verschiedener Beschaffenheit, die sich miteinander im Contact befinden. Es sei jedoch vorausgesetzt, dass sämtliche Körper, sowie auch das dieselben umgebende Medium selbst, wenigstens in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Gebietes, unbeweglich sind und gar keine elektrische Leitfähigkeit besitzen.

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an, dass für irgend einen Zeitpunkt $t_0$ und für alle Punkte des betrachteten Raumgebietes die elektrische Kraft $E_0$ und die magnetische $M_0$ gegeben sind, und es werden diese Vectoren für alle Punkte dieses Gebietes für irgend einen anderen Zeitpunkt $t$ gesucht,

welcher dem Augenblicke $t_0$ vorangeht oder auf denselben folgt; in anderen Worten: man kennt den gegenwärtigen Zustand eines elektromagnetischen Feldes und wolle daraus seine Vergangenheit und Zukunft herleiten.

Sind die Kräfte $E$, $M$ (immer als Vectoren aufgefasst) und deren Ableitungen nach der Zeit $E'$, $E''$, ... $E^{(n)}$ etc., $M'$, $M''$, ... $M^{(n)}$ sämtlich endliche und stetige Functionen der Zeit[1]), wenigstens innerhalb des betrachteten Raumgebietes und für das ganze Zeitintervall $t_0 - t$ (die Grenzen $t_0$, $t$ mitbegriffen), so können wir den Taylor'schen Lehrsatz anwenden, und indem wir (ohne Schaden für die Allgemeinheit der Untersuchung) $t_0 = 0$ setzen, erhalten wir

$$(1) \qquad E_t = E_0 + \frac{t}{1!} E_0' + \frac{t^2}{2!} E_0'' + \frac{t^3}{3!} E_0''' + \ldots,$$

$$(2) \qquad M_t = M_0 + \frac{t}{1!} M_0' + \frac{t^2}{2!} M_0'' + \frac{t^3}{3!} M_0''' + \ldots.$$

Von den Grössen, welche in diesen unendlichen Reihen auftreten, sind direct, ausser der Zeit $t$, nur die anfänglichen Vectoren $E_0$, $M_0$ selbst bekannt; setzt man jedoch voraus, dass wenigstens in dem betrachteten Gebiete und während der ganzen Zeitepoche $0 - t$ die elektromagnetischen Gleichungen (I) gültig sind, so kann man ohne weiteres sämtliche Derivirten $E_0^{(i)}$, $M_0^{(i)}$ durch die Kräfte $E_0$, $M_0$ selbst ausdrücken.

In der That, leitet man diese Gleichungen nach der Zeit ab und berücksichtigt man, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{curl} = \operatorname{curl} \frac{\partial}{\partial t},$$

so ergeben sich leicht die nötigen Grössen:

$$(3) \quad \begin{cases} E_0' = +\frac{1}{AK} \operatorname{curl} M_0, & M_0' = -\frac{1}{A\mu} \operatorname{curl} E_0, \\ E_0'' = -\frac{1}{AK \cdot A\mu} \operatorname{curl}^2 E_0, & M_0'' = -\frac{1}{A\mu \cdot AK} \operatorname{curl}^2 M_0, \\ E_0''' = -\frac{1}{(AK)^2 \cdot A\mu} \operatorname{curl}^3 M_0, & M_0''' = +\frac{1}{(A\mu)^2 \cdot AK} \operatorname{curl}^3 E_0, \\ E_0^{(4)} = +\frac{1}{(AK)^2 \cdot (A\mu)^2} \operatorname{curl}^4 E_0, & M_0^{(4)} = +\frac{1}{(A\mu)^2 \cdot (AK)^2} \operatorname{curl}^4 M_0, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

1) welche auch den sonstigen Bedingungen der Entwickelbarkeit in ganze Potenzen genügen.

die Regel zur Bildung eines $E_0^{(\iota)}$, $M_0^{(\iota)}$ von beliebiger Ordnung ist aus dieser Zusammenstellung ohne weiteres zu ersehen. (Unter *curl*$^\iota$ $R$ ist das Resultat der an $R$ $\iota$ mal nacheinander ausgeführten Operation „curl" zu verstehen.)

Setzt man nun die Ausdrücke (3) etc. in die betreffenden Reihenentwickelungen (1), (2) ein und bezeichnet das Product $A^2 \mu K$ mit $1/\mathfrak{v}^2$, d. h. setzt man den absoluten Wert von $\mathfrak{v}$ gleich

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{+\sqrt{A^2 \mu K}}, \tag{4}$$

so erhält man

$$E_t = \left[E_0 - \frac{(\mathfrak{v}\,t)^2}{2!}\operatorname{curl}^2 E_0 + \frac{(\mathfrak{v}\,t)^4}{4!}\operatorname{curl}^4 E_0 - \frac{(\mathfrak{v}\,t)^6}{6!}\operatorname{curl}^6 E_0 + \ldots\right]$$
$$+ \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \left[\frac{\mathfrak{v}\,t}{1!}\operatorname{curl} M_0 - \frac{(\mathfrak{v}\,t)^3}{3!}\operatorname{curl}^3 M_0 + \frac{(\mathfrak{v}\,t)^5}{5!}\operatorname{curl}^5 M_0 - \ldots\right],$$

$$M_t = \left[M_0 - \frac{(\mathfrak{v}\,t)^2}{2!}\operatorname{curl}^2 M_0 + \frac{(\mathfrak{v}\,t)^4}{4!}\operatorname{curl}^4 M_0 - \ldots\right]$$
$$- \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \left[\frac{\mathfrak{v}\,t}{1!}\operatorname{curl} E_0 - \frac{(\mathfrak{v}\,t)^3}{3!}\operatorname{curl}^3 E_0 + \frac{(\mathfrak{v}\,t)^5}{5!}\operatorname{curl}^5 E_0 - \ldots\right],$$

oder — symbolisch —:

$$\left\{\begin{array}{l} E_t = \left\{1 - \dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})^2}{2!} + \dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})^4}{4!} - \ldots\right\} E_0 \\ \quad + \left(\dfrac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \left\{\dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})}{1!} - \dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})^3}{3!} + \ldots\right\} M_0, \end{array}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} M_t = \left\{1 - \dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})^2}{2!} + \dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})^4}{4!} - \ldots\right\} M_0 \\ \quad - \left(\dfrac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \left\{\dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})}{1!} - \dfrac{(\mathfrak{v}\,t\,.\operatorname{curl})^3}{3!} + \ldots\right\} E_0, \end{array}\right. \tag{6}$$

worin (wie kaum zu bemerken nötig) die $\{\}$ die Bedeutung zusammengesetzter *Operatoren* besitzen, welche auf die bezüglichen Vectoren $E_0$, $M_0$ zu appliciren sind. Diese Operatoren enthalten die in Betracht kommende Zeit $t$, dann $\mathfrak{v}$, welches die Dimensionen einer Geschwindigkeit hat (und als „Fortpflanzungsgeschwindigkeit" bekannt ist) und eine Grösse (Quantität) im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist (unabhängig davon, dass allgemein, d. h. für ein anisotropes Medium, $\mu$ und $K$ keine Quantitäten oder Multiplicatoren, sondern Vectoroperatoren sind) und schliesslich den „*curl*", welcher bereits ein ziemlich complicirter Operator ist und deren

Dimensionen (symbolisch gesprochen) die eines Linienintegrals dividirt durch einen Flächeninhalt, d. h. also die einer reciproken Länge sind: $[\mathrm{curl}] = [l^{-1}]$; dies alles ist in den zusammengesetzten Operatoren $\{\ \}$ in (5) und (6) in der Combination $\varphi = \mathfrak{v}\, t\, \mathrm{curl}$ enthalten, welche die Dimension Null hat, von der Wahl der Einheiten der Zeit und der Länge also sicher unabhängig ist und insofern einer *reinen* (unbenannten) Zahl verglichen werden kann, trotzdem sie — allgemein zu reden — nicht eine Grösse, sondern ein Operator ist.

Dessen ungeachtet möchte ich vorschlagen (mit der grösstmöglichen Vorsicht) zwei Operatoren einzuführen, die noch complicirter als $\varphi = \mathfrak{v}\, t\, \mathrm{curl}$, und zwar *aus* demselben (oder — wenn man will — aus einem *beliebigen* Operator $\varphi$, dem jedoch die „Dimensionen" einer *reinen* Zahl zukommen) zusammengesetzt sind, nämlich die Operatoren: $\{\cos(\varphi)\}$ und $\{\sin(\varphi)\}$, welche aus $\varphi$ so gebildet seien, als wäre $\varphi$ ein gewisser Winkel, welche wir aber — unabhängig von jedem geometrischen Begriffe — durch die beiden wohlbekannten unendlichen Reihen

$$\{\cos(\varphi)\} = \left\{1 - \frac{(\varphi)^2}{2!} + \frac{(\varphi)^4}{4!} - \ldots\right\}, \tag{7}$$

$$\{\sin(\varphi)\} = \left\{\frac{(\varphi)}{1!} - \frac{(\varphi)^3}{3!} + \frac{(\varphi)^5}{5!} - \ldots\right\}, \tag{8}$$

definirt haben wollen, zu denen man dann Zuflucht nehmen wird, so oft man befürchten sollte, den Operatoren $\{\cos(\varphi)\}$, $\{\sin(\varphi)\}$ Eigenschaften zuzuschreiben, welche den Eigenschaften der entsprechenden trigonometrischen Functionen analog wären.

Führt man nun diese beiden Operatoren ein, so kann man den Gleichungen (5) und (6) eine ziemlich elegante Form verleihen, indem man nämlich schreibt:

$$E_t = \{\cos(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, E_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, M_0, \tag{A}$$

$$M_t = \{\cos(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, M_0 - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, E_0. \tag{B}$$

Die so gefundenen Formeln liefern uns den elektrischen Vector $E_t$ und den magnetischen $M_t$, für den Augenblick $t$ und für einen beliebigen Punkt des betrachteten Gebietes, und zwar ausgedrückt (wiewohl auch in symbolischer Weise) durch

die Vectoren $E_0$, $M_0$, — die für den Augenblick $t = 0$ und für den betrachteten Punkt mit seiner nächsten Umgebung bekannt sind, — und durch die Länge des Zeitintervalles $t$. In gewissen Fällen kann der Operator „*curl*" zu einem gewöhnlichen Multiplicator desjenigen Vectors werden, an dem die Operation auszuführen ist; alsdann erhalten die Operatoren $\{\}$ der Formeln (A), (B) die Bedeutung gewöhnlicher trigonometrischer Functionen von einem Argument, welches proportional mit der Zeit $t$ ist. Ist aber dies nicht der Fall, so müssen sie, wie oben gesagt, als zusammengesetzte Operatoren behandelt werden. Oft ist zwar „curl" kein Multiplicator, hingegen ist es aber $curl^2$, sagen wir $\text{curl}^2 = n^2$; alsdann wird der symbolische Cosinus einfach gleich $\cos(n\,\mathfrak{v}\,t)$, — da er nur die geraden Potenzen von *curl* enthält, — während man wegen der Bedeutung von $\{\sin(\mathfrak{v}\,t\,.\,\text{curl})\}$ auch in diesem Falle zu der unendlichen Reihe (8) recurriren muss. Jedenfalls aber (wenn blos die anfänglichen Vectoren $E_0$, $M_0$ als Functionen des Ortes gegeben sind) wird man die entsprechenden Operationen immer ausführen können, indem man, im schlimmsten Falle, auf ihre ursprüngliche, in (7) und (8) gegebene Bedeutung zurückkommen wird.

Die Fundamentaleigenschaften der Operatoren $\{\cos(\varphi)\}$, $\{\sin(\varphi)\}$, wo — in unserem Falle — $\varphi$ eine Abkürzung für $\mathfrak{v}t\,.\,\text{curl}$ ist, kann man ohne weiteres finden, indem man sich die entsprechenden Eigenschaften der ihnen in einem gewissen Sinne correspondirenden trigonometrischen Functionen erinnert, oder (um sicherer vorzugehen) indem man sie aus den Reihen (7) und (8) ableitet. So sieht man z. B. sofort, dass

$$\{\cos(-\varphi)\} = \{\cos(\varphi)\}, \tag{9}$$

$$\{\sin(-\varphi)\} = -\{\sin(\varphi)\} \tag{10}$$

ist, wenn $\varphi$ entweder deshalb das Vorzeichen wechselt, dass man $-t$ (anstatt $+t$) nimmt, oder weil die anfängliche Verteilung der Vectoren sich dahin änderte, dass man anstatt $+curl$ zu setzen hat $-curl$. — Quadrirt man die Reihen (7) und (8), summirt die Resultate und sammelt man die Coefficienten einer jeden Potenz von $\varphi$, so findet man, dass die Factoren einer jeden Potenz von $\varphi$ identisch Null sind und

dass nur der Factor 1 der nullten Potenz stehen bleibt, und damit wird dann die Eigenschaft

$$\{\cos(\varphi)\}^2 + \{\sin(\varphi)\}^2 = 1 \tag{11}$$

bewiesen, die in unserem Falle den folgenden Sinn hat: Führt man an irgend einem Vector $R$ zweimal hintereinander die Operation $\{\cos(\varphi)\}$ und dann — an demselben Vector $R$ — zweimal hintereinander die Operation $\{\sin(\varphi)\}$ aus, so erhält man zwei Vectoren $R_1$ und $R_2$, deren geometrische Summe (Resultante) mit dem ursprünglichen Vector $R$ identisch ist (d. h.: $R_1 = \{\cos(\varphi)\}^2 R$ und $R_2 = \{\sin(\varphi)\}^2 R$ sind die Seiten eines Parallelogrammes, wovon $R$ die Diagonale ist). In dieser Weise könnte man auch, aus den Reihen (7) und (8), sämtliche anderen Fundamentaleigenschaften der in Rede stehenden Operatoren und ihre gegenseitigen Beziehungen herleiten.

Es wird aber vielleicht nicht ohne Interesse sein, wenn wir hier bemerken, dass gewisse (wenn nicht alle) Eigenschaften dieser Operatoren in einer viel einfacheren und lehrreichen Weise aus ihrem wahren physikalischen Sinne selbst abgeleitet werden können, d. h. aus dem Umstande, dass, wenn man sie in einer gewissen (in den Formeln (A), (B) angegebenen) Weise auf dasjenige applicirt, was sich auf den gegenwärtigen Zustand des elektromagnetischen Feldes bezieht und denselben definirt ($E_0$, $M_0$), sie uns dessen Vergangenheit oder Zukunft ($E_t$, $M_t$, $t \gtrless 0$) liefern. Um z. B. die Beziehung (11) zu erhalten, können wir folgende Betrachtung anstellen: wenn unsere Operationen, auf dasjenige ($E_0$, $M_0$) applicirt, was sich auf den gegenwärtigen Zustand bezieht ($t = 0$), uns den Zustand ($E_t$, $M_t$) des Systems in irgend einem anderen (früheren oder späteren) Augenblick ($t$) liefern, so muss man, wenn man an diesem letzteren Zustand dieselben Operationen mit geändertem Vorzeichen von $t$ ausführt, wieder auf den ursprünglichen Zustand zurückkommen. Uebersetzt man dieses Raisonnement in die Sprache der Formeln und wendet die Beziehungen (9) und (10) an, so erhält man in der That:

$$E_0 = \{\cos(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, E_t - \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, M_t,$$

$$M_0 = \{\cos(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, M_t + \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(\mathfrak{v}\, t\,.\,\mathrm{curl})\}\, E_t,$$

und wenn man nun hierin $E_t$, $M_t$ [wie in (A), (B)] durch $E_0$, $M_0$ ausdrückt:

$$E_0 = \{\cos(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}^2\,E_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2}\cdot\{\cos(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\{\sin(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\,M_0$$
$$-\left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2}\cdot\{\sin(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\{\cos(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\,M_0 + \{\sin(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}^2\,E_0,$$

und analog für $M_0$;

man ersieht ohne weiteres, dass

$$\{\cos(\,)\}\{\sin(\,)\} = \{\sin(\,)\}\{\cos(\,)\}$$

ist, sodass das zweite und dritte Glied rechts sich gegenseitig aufheben und man das Resultat

$$[\{\cos(\varphi)\}^2 + \{\sin(\varphi)\}^2]\,E_0 = E_0$$

erhält; das analoge Ergebnis folgt, wenn man die auf $M_0$ bezügliche Formel in eben derselben Weise entwickelt.

In ähnlicher Weise könnte man für die in Frage stehenden Operatoren z. B. auch die Correlative der bekannten trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\varphi_1\,.\,\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\,.\,\cos\varphi_1,$$
$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\,.\,\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,.\,\sin\varphi_2$$

beweisen, indem man nämlich einmal von $t=0$ direct zu $t=t_1+t_2$, das andere Mal aber von $t=0$ zu $t=t_1$ und dann von $t_1$ zu $t_1+t_2$ übergehen und die beiden so gewonnenen Resultate einander gleichsetzen würde; so könnte man auch andere, mehr oder weniger complicirte Processe ausfindig machen, um viele andere Eigenschaften der besagten Operatoren zu erhalten, analog den Beziehungen, die für die trigonometrischen Functionen, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, gültig sind.

Aus den Definitionen (7) und (8) folgt für irgend einen Vector $R$, der eine Function des Ortes, von der Zeit jedoch unabhängig ist (wie z. B. $E_0$ oder $M_0$), und für $\varphi = \mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\cos(\varphi)\}\,R = -\,\mathfrak{v}\,.\,\{\sin(\varphi)\}\,\mathrm{curl}\,R,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\sin(\varphi)\}\,R = \quad\mathfrak{v}\,.\,\{\cos(\varphi)\}\,\mathrm{curl}\,R;$$

wendet man diese Derivationsregeln auf die in (A), (B) gegebenen Ausdrücke von $E_t$, $M_t$ an und substituirt $\mathfrak{v}^2 = 1/A^2\mu K$,

so findet man ohne weiteres die elektromagnetischen Differentialgleichungen (I) verificirt.

Da $\{\cos(0)\} = 1$ und $\{\sin(0)\} = 0$ ist, so schliesst man aus (A), (B) unmittelbar, dass, wenn curl $E_0 = 0$ und curl $M_0 = 0$, für jedes positive oder negative $t$: $E_t = E_0$, $M_t = M_0$ ist, d. h.: ist die Verteilung der elektrischen und der magnetischen Kraft in irgend einem Teile des betrachteten Gebietes auch nur in einem einzigen Augenblicke irrotational, so war und wird *dieser* Teil des Feldes immer unveränderlich, d. h. für alle Zeiten, welche zusammen mit jenem Augenblicke zu derselben Epoche der Continuität und der Gültigkeit der Gleichungen (I) gehören; oder in anderen Worten: die Irrotationalität (von $E$, $M$), sei es auch nur für einen einzigen Zeitmoment einer Epoche von besagtem Charakter, bildet die *hinreichende* Bedingung für die Unveränderlichkeit eines beliebigen Teiles des Feldes für die ganze Dauer der Epoche und unabhängig von dem Sachverhalt in anderen (nicht angrenzenden) Gebieten des Feldes. Das dies auch die *notwendige* Bedingung ist, folgt ohne weiteres aus den Gleichungen (I) selbst.

Im Besonderen (wenn nämlich überall $E_0 = M_0 = 0$ ist) folgt aus dem oben Gesagten, dass weder ein elektrisches, noch ein magnetisches, noch auch ein elektromagnetisches (rotationales oder irrotationales) Feld in irgend einem Augenblicke einer Epoche von besagtem Charakter geschaffen werden können, und dass also die Schöpfung (Erzeugung) eines jeden dieser Felder notwendigerweise eine Verletzung der elektromagnetischen Gleichungen (I) oder der Stetigkeitsbedingungen (wenn nicht der ersteren und der letzteren zugleich) involvirt, und auf diese Weise das Ende *einer* und den Anfang einer anderen, neuen „Epoche" markirt.

Aber auch wenn $E_0$ und $M_0$ nur in einem gewissen, beliebig grossen oder beliebig kleinen Gebiete des betrachteten Raumes gleich Null sind, folgt aus (A), (B), dass $E_t$, $M_t$ beständig gleich Null sein müssen, sodass ohne Verletzung der genannten Bedingungen nicht einmal eine „Fortpflanzung" der elektrischen und magnetischen Kräfte von Gebieten, wo sie bereits existiren, zu solchen, wo sie noch gar nicht vorhanden sind, vor sich gehen kann. In der That hat man auch in

iesem Falle beim Uebergang von den ersteren zu den letzteren legionen eine Discontinuitätsfläche (oder ein System solcher lächen); es werden also hier, nach Gleichung (I), die Deri- irten von $E$ oder von $M$ oder von allen beiden Kräften, in ezug auf die Zeit genommen, unendlich werden können, so- ass es für diejenigen Punkte, die in oder unendlich nahe an esen Flächen liegen, nicht erlaubt ist, den Taylor'schen tz anzuwenden und unsere Formeln (A), (B) an diesen Stellen so ihre Gültigkeit verlieren; die Fortpflanzung elektromagne- scher Zustände implicirt in *diesem Falle* die Existenz einer lchen Unstetigkeitsfläche auch in den nachfolgenden Zeit- omenten und also eine Verletzung der Stetigkeitsbedingungen den aufeinanderfolgenden Stellen auch derjenigen Region, ) ursprünglich keine elektrischen und magnetischen Kräfte rken, d. h. eine Fortbewegung der ursprünglichen Dis- ntinuitätsfläche selbst, mit oder ohne Deformation derselben. ehnliche Bemerkungen über die „Fortpflanzung" könnte man rigens auch in Bezug auf die Theorien der Deformationen d Oscillationen in elastischen Körpern und vieler anderen scheinungsklassen machen.)

Diese Schwierigkeiten[1]) bleiben wohl aus, sobald die Be- ngungen der Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des be- chteten Raumgebietes erfüllt sind; aber auch in diesem lle kann man die „Fortpflanzung" der elektromagnetischen stände aus unseren Formeln (A), (B) nicht direct heraus- en; dies geschieht jedoch aus einem Grunde, welcher eben e charakteristische Eigenschaft dieser Lösungen [(A), (B)] det; in der That sehen wir in ihnen die (elektromagnetische)

1) In den diesbezüglichen Fällen kann man die Unstetigkeitsfläche Grenzfall einer sogenannten (continuirlichen) Uebergangsschicht be- chten, was auch z. B. dann geschieht, wenn man (für ebene oder irische Wellen) die Function einer (einzigen) geometrischen Variabeln, che eine discontinuirliche Anfangsverteilung ausdrückt, in eine Fourier'- e Reihe:

$$f_{(n)}(x) = \sum_{1}^{n}{}_k [a_k \sin(k\,p\,x) + b_k \cos(p\,k\,x)]$$

wickelt und die actuelle discontinuirliche Function $f(x)$ als den *Limes* stetigen Function $f_{(n)}(x)$ betrachtet

$$\left(f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_{(n)}(x)\right).$$

Vergangenheit und Zukunft in einem jeden individuellen Punkte durch den gegenwärtigen Zustand ausgedrückt, welchen wir in eben demselben Punkte und in seiner nächsten Umgebung (was zur Ausführung der Operation „curl" nötig ist) vorfinden, ganz unabhängig aber davon, was in anderen Stellen des Raumes geschieht oder früher geschehen ist. Um die Fortpflanzung elektromagnetischer Zustände in Evidenz zu bringen und die Geschwindigkeit der Fortpflanzung[1]) numerisch zu finden, müsste man die Lösungen (A), (B) in gehöriger Weise umformen, was in gewissen Fällen eine leichte Aufgabe ist; es wäre übrigens vielleicht überflüssig, hier daran zu erinnern, dass es im allgemeinen, d. h. in einem beliebigen elektromagnetischen Felde, nicht erlaubt ist, ohne weiteres *davon* zu sprechen, was in den allereinfachsten Fällen, z. B. für ebene oder kugelförmige Wellen, den Namen und den Charakter einer Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Kräfte annimmt.—

Die Formeln (A), (B) eignen sich gut für die beinahe unmittelbare Herleitung gewisser allgemeiner Theoreme, die mir neu zu sein scheinen, und deren Herleitung auf anderem Wege nicht leicht sein dürfte, mir aber jedenfalls unbekannt ist.

Betrachtet man nämlich zwei vom gegenwärtigen gleich abstehende Augenblicke, d. h. also: einen $(-t)$ in der Vergangenheit, den zweiten $(+t)$ in der Zukunft, und alle beide in ein und derselben Epoche der Continuität und der Gültigkeit der Gleichungen (I), so erhält man — auf Grund von (9) und (10) —:

$$(12)\qquad \begin{cases} E_{+t} + E_{-t} = 2\,\{\cos(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\,E_0, \\ E_{+t} - E_{-t} = 2\left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2}\cdot\{\sin(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\,M_0, \end{cases}$$

und analog

$$(13)\qquad \begin{cases} M_{+t} + M_{-t} = 2\,\{\cos(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\,M_0, \\ M_{+t} - M_{-t} = 2\left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\cdot\{\sin(\mathfrak{v}\,t\,.\,\mathrm{curl})\}\,E_0, \end{cases}$$

d. h.: die (geometrische) *Summe* der $\overset{\text{elektrischen}}{\text{magnetischen}}$ Kräfte, die in einem Punkte des Feldes zu zwei verschiedenen und beliebig

1) Welche bekanntlich in denjenigen Fällen, in welchen man von einer solchen sprechen darf, gleich $\mathfrak{v} = 1/A\sqrt{K\mu}$ wird.

gewählten Zeiten vorgefunden werden, hängt nur ab von der Verteilung der $\frac{\text{elektrischen}}{\text{magnetischen}}$ Kraft im mittleren Zeitpunkte, während die (geometrische) *Differenz* der $\frac{\text{elektrischen}}{\text{magnetischen}}$ Kräfte, die in zwei beliebigen Augenblicken wirken, nur von der Verteilung der $\frac{\text{magnetischen}}{\text{elektrischen}}$ Kraft im mittleren Augenblick in der Umgebung des betrachteten Punktes abhängt.

Als Specialfall dieses Theorems erhalten wir (indem wir nämlich curl $E_0 = 0$ oder curl $M_0 = 0$ setzen) den folgenden Satz: Ist in einem Augenblick $t_0$ die Verteilung der elektrischen Kraft (um einen Punkt herum oder in irgend einem Gebiete von endlicher Ausdehnung) irrotational, so ist die Summe der elektrischen Kräfte (Vectoren) für zwei andere von $t_0$ gleich abstehende Zeitmomente, — einem früheren und einem späteren, — der Grösse und Richtung nach gleich der doppelten elektrischen Kraft, die im Augenblicke $t_0$ herrscht:

$$E_{t_0+t} + E_{t_0-t} = 2\,E_{t_0} \text{ (falls curl } E_0 = 0);$$

in *demselben* Falle sind die magnetischen Kräfte in zwei von $t_0$ gleich abstehenden Zeitmomenten, einem früheren und einem späteren, der Richtung und Grösse nach einander gleich:

$$M_{t_0+t} = M_{t_0-t} \text{ (falls curl } E_0 = 0).$$

Einen ganz analogen Satz erhalten wir, wenn anstatt der elektrischen die magnetische Kraft irrotational verteilt ist. — Ist aber, in irgend einem Gebiete, zu gleicher Zeit sowohl die Verteilung der elektrischen als auch die der magnetischen Kraft irrotational, so kommen wir auf den schon oben erwähnten Fall zurück, in welchem der betreffende Teil des Feldes, in einer ganzen „Epoche" von besagtem Charakter, überhaupt unveränderlich bleibt. —

(*Specialfall.*) Ist die anfängliche Verteilung der Kräfte dadurch gekennzeichnet, dass die Beziehungen

$$\text{curl } E_0 = f \,.\, E_0, \quad \text{curl } M_0 = g \,.\, M_0 \tag{14}$$

bestehen, wo $f$ und $g$ *scalare Grössen* sind und — allgemein zu reden — Functionen des Ortes sein können, so wird der Operator „curl" einfach zu einem scalaren Multiplicator desjenigen Vectors, an welchem die Operation auszuführen ist,

d. h. also gleich $f$, sofern man die Operation an $E_0$, und gleich $g$, insofern man sie an dem Vector $M_0$ auszuführen hat, sodass unsere zusammengesetzten Operatoren $\{\cos(\varphi)\}$, $\{\sin(\varphi)\}$ sich in diesem Falle auf einfache trigonometrische Functionen reduciren, mit denen man die Vectoren $E_0$, $M_0$ scalar zu multipliciren hat, und die allgemeinen Formeln (A), (B) übergehen in:

$$E_t = E_0 \,.\, \cos(f\,\mathfrak{v}\,t) + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot M_0 \,.\, \sin(g\,\mathfrak{v}\,t), \tag{15}$$

$$M_t = M_0 \,.\, \cos(g\,\mathfrak{v}\,t) - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot E_0 \,.\, \sin(f\,\mathfrak{v}\,t); \tag{16}$$

für ein isotropes Medium sind $\mu$ und $K$ scalare Coefficienten, sodass sowohl $E_0$ als auch $M_0$ (welche Vectoren sind) in (15) und (16) mit einfachen Scalaren multiplicirt auftreten, die vom Ort abhängen und periodische Functionen der Zeit sind; die betreffenden Perioden sind

$$T_e = \frac{2\pi}{\mathfrak{v}\,.\,f}, \quad T_m = \frac{2\pi}{\mathfrak{v}\,.\,g} \tag{17}$$

und können also für verschiedene Punkte des Feldes verschiedene Werte haben; die betreffenden Schwingungszahlen sind

$$n_e = \frac{\mathfrak{v}}{2\pi} f, \quad n_m = \frac{\mathfrak{v}}{2\pi} g; \tag{18}$$

führt man diese letzteren in (15), (16) ein, so hat man:

$$E_t = E_0 \,.\, \cos(2\pi n_e t) + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot M_0 \,.\, \sin(2\pi n_m t), \tag{19}$$

$$M_t = M_0 \,.\, \cos(2\pi n_m t) - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot E_0 \,.\, \sin(2\pi n_e t). \tag{20}$$

In dem betrachteten Falle sind also die Kräfte $E_t$ und $M_t$ zu jeder Zeit Resultanten je zweier Vectoren, von welchen ein jeder einfach harmonische Schwingungen von der Frequenz $n_e$ bez. $n_m$ ausführt; ein jeder dieser Teilvectoren behält seine Richtung ungeändert (nicht aber seinen Sinn); die resultirenden Kräfte $E_t$, $M_t$ erfahren aber nicht nur Intensitätsänderungen, sondern im allgemeinen (d. h. wenn die anfänglichen Vectoren $E_0$, $M_0$ nicht zufällig einander parallel sind) auch *Richtungs*änderungen.

Die Frequenzen $n_e$, $n_m$ können zwar Functionen des Ortes sein, jedoch nicht ganz willkürliche; da nämlich

$$\mathrm{div}\,.\,\mathrm{curl}\,R = 0$$

ist (für irgend einen Vector $R$), so müssen als Consequenz von (14) überall die Bedingungen $\operatorname{div}(f E_0) = 0$, $\operatorname{div}(g M_0) = 0$, d. h.

$$\operatorname{div}(n_e \,.\, E_0) = 0, \quad \operatorname{div}(n_m \,.\, M_0) = 0 \tag{21}$$

erfüllt sein; führt man z. B. die orthogonalen Coordinaten $x$, $y$, $z$ ein und bezeichnet mit $X$, $Y$, $Z$ die rechtwinkligen Componenten der elektrischen, mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die der magnetischen Kraft, so kann man die letzteren Bedingungen schreiben:

$$\text{(21a)} \quad \begin{cases} 0 = n_e \,.\, \operatorname{div} E_0 + \left( X_0 \dfrac{\partial n_e}{\partial x} + Y_0 \dfrac{\partial n_e}{\partial y} + Z_0 \dfrac{\partial n_e}{\partial z} \right), \\ 0 = m_e \,.\, \operatorname{div} M_0 + \left( \alpha_0 \dfrac{\partial n_m}{\partial x} + \beta_0 \dfrac{\partial n_m}{\partial y} + \gamma_0 \dfrac{\partial n_m}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Ist die anfängliche Verteilung sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Kraft *solenoidal*, d. h.

$$\operatorname{div} E_0 = \operatorname{div} M_0 = 0,$$

so reducirt sich (21a) auf:

$$\text{(22)} \quad \begin{cases} 0 = X_0 \dfrac{\partial n_e}{\partial x} + Y_0 \dfrac{\partial n_e}{\partial y} + Z_0 \dfrac{\partial n_e}{\partial z}, \\ 0 = \alpha_0 \dfrac{\partial n_m}{\partial x} + \beta_0 \dfrac{\partial n_m}{\partial y} + \gamma_0 \dfrac{\partial n_m}{\partial z}, \end{cases}$$

d. h.: im *Anfangszustand* liegen sowohl die elektrischen wie die magnetischen Kräfte in den *Flächen constanter Frequenz* der Schwingungen der entsprechenden Teilvectoren, d. h. in den Flächen

$$n_e = \text{const.} \quad \text{bez.} \quad n_m = \text{const.}$$

Für *beliebige Zeiten* $t$ folgt nun aus (19) und (20):

$$\text{(23)} \quad \begin{cases} \operatorname{div} E_t = \operatorname{div} E_0 \,.\, \cos(f \mathfrak{v}\, t) + \left(\dfrac{\mu}{K}\right)^{1/2} \!\!. \operatorname{div} M_0 \,.\, \sin(g \mathfrak{v}\, t) \\ \qquad - \mathfrak{v}\, t \,.\, \sin(f \mathfrak{v}\, t) \,.\, \left[ X_0 \dfrac{\partial f}{\partial x} + Y_0 \dfrac{\partial f}{\partial y} + Z_0 \dfrac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \qquad + \mathfrak{v}\, t \,.\, \left(\dfrac{\mu}{K}\right)^{1/2} \!\!. \cos(g \mathfrak{v}\, t) \,.\, \left[ \alpha_0 \dfrac{\partial g}{\partial x} + \beta_0 \dfrac{\partial g}{\partial y} + \gamma_0 \dfrac{\partial g}{\partial z} \right] \\ \text{und eine analoge Gleichung für } \operatorname{div} M_t; \end{cases}$$

wenn also $\operatorname{div} E_0 = \operatorname{div} M_0 = 0$ ist und die änfänglichen Vectoren $E$, $M$ in den betreffenden Flächen $f = \text{const.}$, $g = \text{const.}$ liegen, so hat man auch für ein beliebiges $t$: $\operatorname{div} E_t = 0$,

$\operatorname{div} M_t = 0$, d. h. eine solenoidale Verteilung der beiden Kräftearten; die Ausdrücke

$$X_t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Y_t \frac{\partial f}{\partial y} + Z_t \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \sin(g\,\mathfrak{v}\,t) \cdot \left[\alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

und der analoge für

$$\alpha_t \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \beta_t \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma_t \frac{\partial g}{\partial z}$$

sind aber im allgemeinen *von Null verschieden*, sodass die elektrischen und magnetischen Kräfte *nicht immer* in den Flächen constanter Frequenz: $f = \text{const.}$, $g = \text{const.}$ liegen, sondern dieselben periodisch verlassen und zu ihnen periodisch wiederkehren. Nur wenn $f = g$ oder — allgemeiner — wenn $f$ eine Function von $g$ allein ist, sodass die beiden Flächenschaaren in eine einzige Schaar zusammenfallen, hat man auch für jedes $t$:

$$X_t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + + = 0, \qquad \alpha_t \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + + = 0,$$

d. h. es liegen in *diesem* Falle die Kräfte $E_t$, $M_t$ *dauernd* in den Flächen constanter Schwingungsfrequenz. —

Die Dichte der elektrischen, bez. der magnetischen Energie ist für ein isotropes Medium durch $\frac{1}{2} K E^2$, bez. $\frac{1}{2} \mu M^2$ gegeben; bezeichnet man mit $\mathsf{E}_t$ die Dichte der elektromagnetischen Energie, die in irgend einem Punkte des Feldes zur Zeit $t$ herrscht:

$$E_t = \tfrac{1}{2}(K E_t^2 + \mu M_t^2), \tag{24}$$

so erhält man für den betrachteten Fall (in welchem die Bedingungen (14) für die anfängliche Verteilung erfüllt sind), indem man die Gleichungen (15) und (16) quadrirt und mit ein scalares Product bezeichnet:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_t = {} & \tfrac{1}{2} K E_0^2 \cdot \cos^2(f\,\mathfrak{v}\,t) + \tfrac{1}{2} \mu M_0^2 \cdot \sin^2(g\,\mathfrak{v}\,t) \\ & + (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \sin(g\,\mathfrak{v}\,t) \cdot \cos(f\,\mathfrak{v}\,t) \\ & + \tfrac{1}{2} \mu M_0^2 \cdot \cos^2(g\,\mathfrak{v}\,t) + \tfrac{1}{2} K E_0^2 \cdot \sin^2(f\,\mathfrak{v}\,t) \\ & - (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \sin(f\,\mathfrak{v}\,t) \cdot \cos(g\,\mathfrak{v}\,t),\end{aligned}$$

oder

$$\mathsf{E}_t = \mathsf{E}_0 + (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \cdot \sin[(g - f)\,\mathfrak{v}\,t], \tag{25}$$

wo $\mathsf{E}_0$ den anfänglichen Wert der elektromagnetischen Energiedichte bedeutet. Aus dieser bemerkenswerten Formel ersehen

wir ohne weiteres, dass in dem betrachteten Specialfalle die Energiedichte $\mathsf{E}_t$ überall *periodische* Aenderungen erfährt, deren Periode $T = 2\pi/\mathfrak{v}(g-f)$ in verschiedenen Punkten des Feldes verschieden sein kann; die Amplitude des in der Zeit veränderlichen Teiles von $\mathsf{E}_t$ ist proportional

$$|E_0 M_0| \text{ oder } E_0 . M_0 . \cos(E_0, M_0);$$

bilden in irgend einem Punkte die Kräfte $E_0$, $M_0$ miteinander einen rechten Winkel, so bleibt ebendaselbst die Energiedichte unveränderlich: $\mathsf{E}_t = \mathsf{E}_0$; dasselbe findet auch statt, falls $f = g$ ist, in welchem Falle auch die resultirenden elektrischen und magnetischen Kräfte [vgl. (15), (16)] zu einfachen periodischen Functionen der Zeit werden. —

Einen einfachen Ausdruck findet man in diesem Falle auch für den sogenannten (Poynting'schen) „elektromagnetischen Energiefluss", dessen Dichte (Intensität pro Flächeneinheit) durch das mit $A$ dividirte *Vectorproduct* von $E$ und $M$ gegeben ist:

$$F_t = \frac{1}{A} V E_t M_t; \tag{26}$$

erinnert man sich der Regeln für die Vectorproducte:

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -V\mathfrak{B}\mathfrak{A}, \quad V\mathfrak{A}\mathfrak{A} = 0,$$

$$V(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}+\mathfrak{D}) = V\mathfrak{A}\mathfrak{C} + V\mathfrak{A}\mathfrak{D} + V\mathfrak{B}\mathfrak{C} + V\mathfrak{B}\mathfrak{D},$$

so erhält man aus (15) und (16) ohne Schwierigkeit:

$$F_t = [\cos(f\mathfrak{v}t).\cos(g\mathfrak{v}t) + \sin(f\mathfrak{v}t).\sin(g\mathfrak{v}t)]\frac{V E_0 M_0}{A},$$

oder

$$F_t = F_0 . \cos[(f-g)\mathfrak{v}t]; \tag{27}$$

es ist also auch der Vector $F_t$, der die Dichte des Energieflusses darstellt, eine periodische Function der Zeit, von derselben Periode wie $\mathsf{E}_t$, die elektromagnetische Energiedichte; ist $f = g$, so hat man dauernd $F_t = F_0$, d. h. einen unveränderlichen Energiefluss.

---

Kehren wir jetzt zu dem allgemeinen Fall, in welchem die anfängliche Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte in *irgend einer* Weise gegeben ist, wieder zurück. Eliminirt man aus dem Gleichungssystem (I) den Vector $M$,

bez. den Vector $E$, und bezeichnet mit dem Symbol $D$ die Derivation nach der Zeit $t$, so erhält man

$$\text{(Ia)} \qquad \frac{1}{\mathfrak{v}^2} D^2 E = -\operatorname{curl}^2 E, \quad \frac{1}{\mathfrak{v}^2} D^2 M = -\operatorname{curl}^2 M,$$

oder aber die Aequivalenz der beiden Operatoren

$$\text{(28)} \qquad \mathfrak{v}^2 . \operatorname{curl}^2 = -D^2,$$

insofern die betreffenden Operationen an $E$ oder an $M$ auszuführen sind. Der Operator $D$ implicirt die *Zeit* und kann folglich nicht ausgeführt werden an etwas, was sich nur auf einen einzigen Zeitmoment bezieht, wie z. B. $E_0$ oder $M_0$; dank der Beziehung (28) wird dieser Operator einem anderen äquivalent, welcher nur den Begriff des *Raumes* (der räumlichen Verteilung) implicirt (und den man deshalb vielleicht einen rein „geometrischen" Operator nennen könnte), und *kann* sehr wohl an einem Vector ausgeführt werden, von dem man bloss die augenblickliche Verteilung kennt; bezeichnet man das in *diesem Sinne aufgefasste* $D$ mit $D_{(\varphi)}$, so kann man [nach (28)] symbolisch schreiben:

$$\text{(29)} \qquad i D_{(\varphi)} = \pm \mathfrak{v} . \operatorname{curl}, \text{ wo } i = +\sqrt{-1} \text{ ist.}$$

Führt man nun dieses Symbol in die zusammengesetzten Operatoren $\{\ \}$ der Formeln (A), (B) ein, so kann man sie schreiben:

$$\text{(30)} \qquad \begin{cases} E_t = \{\cos(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, E_0 \pm \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} . \{\sin(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, M_0 , \\ M_t = \{\cos(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, M_0 \mp \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} . \{\sin(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, E_0 ; \end{cases}$$

aus den Gleichungen (I) folgt aber, in symbolischer Schreibweise:

$$\text{(31)} \qquad \begin{cases} M_0 = A\,K \frac{D_{(\varphi)}}{\operatorname{curl}} E_0 = \mp i . A\,K\,\mathfrak{v} . E_0 , \\ E_0 = -A\,\mu . \frac{D_{(\varphi)}}{\operatorname{curl}} M_0 = \pm i\,A\,\mu\,\mathfrak{v} . M_0 , \end{cases}$$

und da

$$\left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} . A\,K\,\mathfrak{v} = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} A\,\mu\,\mathfrak{v} = 1$$

ist, so können wir die Formeln (30) schreiben:

$$E_t = \{\cos(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, E_0 + i\{\sin(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, E_0 ,$$
$$M_t = \{\cos(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, M_0 + i\{\sin(i\,t\,D_{(\varphi)})\}\, M_0 ,$$

oder kürzer

$$\text{(32)} \qquad \frac{E_t}{M_t} = \left\{\cos(-i\,t\,D_{(\varphi)}) + i \sin(-i\,t\,D_{(\varphi)})\right\} \frac{E_0}{M_0} ;$$

d. h.: führt man die zusammengesetzte Operation $\{\ \}$ an $E_0$, bez. an $M_0$ aus, so erhält man $E_t$ bez. $M_t$, — wohlverstanden — mit einer Zweideutigkeit, die dem Umstande zuzuschreiben ist, dass der Operator $D_{(\omega)}$, nach (29), *zwei* verschiedene Bedeutungen hat; um die Wahl zwischen den möglichen Eventualitäten zu entscheiden, genügt also die Kenntnis von $E_0$ (bez. $M_0$) *allein* nicht, vielmehr muss man ausserdem noch ein Datum haben, z. B. $M_0$ oder den Anfangswert der Ableitung $E'$, oder den Wert von $E$ für einen anderen Zeitmoment, ausser demjenigen für $t = 0$ etc., d. h. im ganzen *zwei* Data, in Uebereinstimmung mit dem Umstande, dass die Gleichung (Ia) für $E$ (und ähnlich die für $M$), als Differentialgleichung aufgefasst, in Bezug auf die Zeit von der *zweiten* Ordnung ist. Hält man diese Bemerkung fest, so kann man sich auch der Form (32) der Lösungen bedienen.

Die Definition der Operatoren $\{\cos(\varphi)\}$, $\{\sin(\varphi)\}$ — wo $\varphi$ in unserem Falle eine Abkürzung für $-itD_{(\omega)}$ ist — ist schon oben gegeben worden; da nun diese definirt sind, können wir jetzt einen Schritt weiter machen und einen anderen aus ihnen zusammengesetzten Operator mittels der Definition

$$\{e^{i\varphi}\} = \{\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\} \tag{33}$$

einführen, indem wir uns nämlich von der analogen Formel leiten lassen, welche für eine Exponentialfunction gilt, deren Exponent $\varphi$ eine Quantität im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist. (Vgl. sämtliche analogen Bemerkungen, die oben bei Gelegenheit der Einführung der Operatoren $\{\cos(\varphi)\}$ und $\{\sin(\varphi)\}$ gemacht wurden.)

Wendet man nun diesen neuen Operator auf Gleichung (32) an und setzt also $\varphi = -itD_{(\omega)}$, so erhält man

$$E_t = \{e^{tD_{(\omega)}}\}E_0\,, \quad M_t = \{e^{tD_{(\omega)}}\}M_0\,; \tag{C}$$

eine jede dieser Formeln ist nun nichts anderes, als ein symbolischer Ausdruck des Taylor'schen (oder Mac-Laurin'schen) Satzes, insofern man nämlich symbolisch schreiben kann:

$$\left\{\begin{aligned}\psi_t &= \psi_0 + \frac{t}{1!}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 + \cdots \\ &= \left\{1 + \frac{(tD)}{1!} + \frac{(tD)^2}{2!} + \cdots\right\}\psi_0 = \{e^{tD}\}\psi_0\,;\end{aligned}\right. \tag{34}$$

wir wiederholen aber, dass ähnliche Ausdrücke nur dann einen gewissen Sinn haben, wenn der Operator (Derivator) $D$ *in terminis* von anderen Operationen und zwar *solchen* („geometrischen") bekannt ist, die sich *ausführen lassen, wenn nur die anfängliche Verteilung* ($\psi_0$) der Quantität $\psi$ selbst gegeben ist, d. h. wenn $D$ den Charakter eines $D_{(\psi)}$ bekommt (vgl. oben).

Umgekehrt könnte man aus dem symbolischen Ausdruck des Taylor'schen Satzes offenbar die früher gegebenen Formeln für $E_t$, $M_t$ ableiten; in der That, setzt man hierin für $D$ den Operator $D_{(\psi)} = \mp i\mathfrak{v}.\mathrm{curl}$ [vgl. (29)], so erhält man $E_t$ durch $E_0$ und $M_t$ durch $M_0$ ausgedrückt, und zwar mit einer Zweideutigkeit des Vorzeichens bei den Gliedern $\{\sin(\ )\}$, die jedoch aufgehoben wird, sobald man die Beziehungen (31) einführt, wobei dann auch zugleich die Formeln (A), (B) sich ergeben, in denen $E_t$, $M_t$ — nunmehr ohne Zweideutigkeit — sowohl durch $E_0$ wie auch — gleichzeitig — durch $M_0$ ausgedrückt erscheinen.

---

Jener exponentielle Charakter der symbolischen Formeln, wie z. B. der oben betrachteten und mit Hülfe des Taylor'schen Satzes abgeleiteten, scheint mir von einer viel allgemeineren Natur als dieser Satz selbst und zwar dem Begriffe eines jeden Operators inherent zu sein, mit dessen Hülfe man zur Kenntnis der Vergangenheit und der Zukunft gelangt, wenn man die bezüglichen Operationen daran ausführt, was sich auf den gegenwärtigen Sachverhalt bezieht.

Es sei $\psi$ eine Function der Zeit und des Ortes, welche den Zustand der Dinge in jedem Augenblicke und in jedem Punkte eines gewissen Raumgebietes beschreibt oder definirt, und $H$ sei ein Operator, mit dessen Hülfe man den Wert von $\overset{(t_2-t_1)}{\psi}$ (für irgend einen dieser Punkte) für den Zeitpunkt $t_2$ aus seinem Werte für den Zeitpunkt $t_1$ erhält, d. h.:

$$\psi_{t_2} = \underset{(t_2-t_1)}{H}\,\psi_{t_1}, \tag{35}$$

oder, indem man $t_1$ als Anfang der Zeit betrachtet und den anderen in Rede stehenden Augenblick mit $t\,(t \gtrless 0)$ bezeichnet:

$$\psi_t = \underset{t}{H}\,\psi_0. \tag{36}$$

Dann wird der Operator $\underset{t}{H}$ für die entsprechende Klasse von Erscheinungen charakteristisch sein. Nehmen wir nun an, dass er diese seine Eigenschaft für sämtliche Augenblicke der Zeit oder wenigstens für diejenigen, welche zu einer gewissen Epoche gehören, und für sämtliche Punkte des betrachteten Gebietes beibehält, so wird der Operator $\underset{t}{H}$ auf Grund dieser seiner physikalischen Bedeutung die beiden folgenden Fundamentaleigenschaften haben:

1. Führt man die Operation $\underset{+t}{H}$ an $\psi_0$ und dann an dem auf diese Weise erhaltenen $\psi_t$ die Operation $\underset{-t}{H}$ aus, so muss man auf den ursprünglichen Zustand der Dinge, d. h. auf $\psi_0$ wieder zurückkommen, und man hat also:

$$\left\{\underset{-t}{H}\right\}\left\{\underset{+t}{H}\right\}\psi_0 = \psi_0,$$

was in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\left\{\underset{-t}{H}\right\} = \left\{\underset{+t}{H}\right\}^{-1}. \tag{37}$$

2. Geht man von $t = 0$ aus einmal unmittelbar zum Zeitmoment $t$ über, das andere Mal aber von $t = 0$ zu $t = \tau_1$, dann von $t = \tau_1$ zu $t = \tau_1 + \tau_2$ etc., und endlich von

$$t = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{n-1} \text{ zu } \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{n-1} + \tau_n = t$$

über, so muss man in den beiden Fällen zu ein und demselben Zustand, d. h. zu dem für den Zeitmoment $t$ geltenden gelangen, und man hat folglich:

$$\left\{\underset{(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n)}{H}\right\} = \left\{\underset{\tau_n}{H}\right\}\ldots\left\{\underset{\tau_2}{H}\right\}\left\{\underset{\tau_1}{H}\right\}, \tag{38}$$

und im Besonderen, für $n$ gleiche Zeitintervalle $t$:

$$\left\{\underset{nt}{H}\right\} = \left\{\underset{t}{H}\right\}^n. \tag{39}$$

Dies sind nun aber eben die Eigenschaften der exponentiellen Functionen (mit einem zu $t$ proportionalen Exponenten), und wiewohl es sich in unserem Falle (allgemein zu reden) nicht um eine Quantität, d. h. nicht um einen Multiplicator der Grösse $\psi$, sondern um eine beliebige *Operation* $H$ handelt, die an $\psi$ auszuführen ist und die Zeit $t$ als eine Art Parameter enthält, so können wir dennoch, auf Grund der charak-

teristischen Eigenschaften (37) bis (39) dem Operator $H$ die Exponentialform verleihen:

$$\left\{\frac{H}{t}\right\} = \{e^{tF}\}, \tag{40}$$

wo $F$ ein anderer Operator ist, der in einer bestimmten Weise mit $H$ zusammenhängt, der aber nun *nicht* mehr die Zeit enthält.

In dieser letzteren Aequivalenz haben wir nicht einen blossen rein formalen Ausdruck, sondern eine Form, welche eben die wesentlichste physikalische Eigenschaft und Bedeutung aller derjenigen Operatoren abspiegelt, die von der Gegenwart uns zur Kenntnis der Vergangenheit und der Zukunft führen.

Der Taylor'sche Satz kann, von diesem Gesichtspunkte aus, als ein sehr specieller Fall derjenigen Wahrheit betrachtet („betrachtet" *nicht* etwa bewiesen) werden, die in Formel (40) enthalten ist, und in der That, wenn die Grösse $\psi$, an der man die bezüglichen Operationen auszuführen hat, sämtlichen Bedingungen, die für die Gültigkeit des Taylor'schen Satzes erfordert werden, Genüge leistet, erlangt der Operator $F$ die Eigenschaft

$$(1 + \tau F)\psi_0 = \operatorname*{Lim}_{\tau=0}[\psi_\tau],$$

oder

$$F = \operatorname*{Lim}_{\tau=0}\left[\frac{\psi_\tau - \psi_0}{\tau}\right],$$

und er wird also zu einem Derivator $D$ (oder $D_{(\psi)}$, vgl. oben).

---

Analog können wir uns einen Operator $K$ vorstellen, welcher an dem Werte $\psi_0$ von $\psi$ in einem beliebig gegebenen Punkte $O$ ausgeführt (für welchen Punkt man $\psi$ für alle Augenblicke kennt, die zu einem gewissen Zeitintervall gehören) uns den Wert von $\psi$ für einen beliebigen anderen Punkt ($P$) eines gewissen Raumgebietes liefert; drückt man diese Voraussetzung durch die Schreibweise

$$\psi_P = \left\{\frac{K}{O,P}\right\}\psi_0 \tag{41}$$

aus, so kann man aus dem physikalischen Sinne des Operators $K$ seine, denen von $H$ analoge Eigenschaften herleiten, und zwar:

$$\left\{\frac{K}{O,P}\right\} = \left\{\frac{K}{P,O}\right\}^{-1}, \tag{42}$$

$$\left\{\frac{K}{O,P}\right\} = \left\{\frac{K}{O,P_1}\right\}\left\{\frac{K}{P_1,P_2}\right\}\cdots\left\{\frac{K}{P_n,P}\right\}, \tag{43}$$

wo $P_1, P_2, \ldots P_n$ eine Gruppe beliebiger Punkte (die im Grenzfall auch ein Continuum oder eine Linie werden kann) bedeuten, die zusammen mit den Punkten $O$ und $P$ in demselben Gültigkeitsgebiete der Eigenschaften von $K$ situirt, sonst aber ganz willkürlich angeordnet sind.

Ist, im Besonderen, der Operator $K$ unter der Form

$$\left\{\frac{K}{\overline{OP}}\right\} = \{K\}_R \tag{44}$$

bekannt und gegeben, wo $R$ den „Schritt" oder den *Vector* $\overline{OP}$ bedeutet, so können die obigen Eigenschaften [(42), (43)] dadurch ausgedrückt werden, dass man schreibt:

$$\{K\}_{+R} = \{K\}_{-R}^{-1} \tag{45}$$

und, wenn $R$ die Resultante von $n$ Vectoren $R_1, R_2, \ldots R_n$ ist:

$$\{K\}_{R_1+R_2+\ldots+R_n} = \{K\}_{R_n}\{K\}_{R_{n-1}}\ldots\{K\}_{R_2}\{K\}_{R_1}, \tag{46}$$

was im besonderen Falle von $n$ der Richtung und Grösse nach untereinander gleichen Vectoren in

$$\{K\}_{nR} = \{K\}_R^n \tag{47}$$

übergeht; diese Aequivalenz, welche in erster Linie für ein ganzzahliges $n$ gilt, kann (mit einem leichten Raisonnement) auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden, d. h. auf den Fall, wo $n$ gleich einer beliebigen, jedoch scalaren Grösse ist. — Auch hier können wir also eine exponentielle Form aufstellen:

$$\{K\}_R = \{e^{RG}\}, \tag{48}$$

wo $G$ ein anderer Operator ist, der dem $K$ in einer gewissen Weise entspricht, der aber weder den Vector $R$ noch auch irgend etwas anderes enthält, was sich auf die relative Lage der beiden Punkte $O$, $P$ und die Kennzeichnung deren Differenz beziehen würde. — Führt man z. B. die drei Einheitsvectoren $i, j, k$ (in üblicher Bezeichnung) und drei entsprechende Scalargrössen $x$, $y$, $z$ (rechtwinklige Coordinaten), sodass $R$ die Form

$$R = ix + jy + kz \tag{49}$$

annimmt, so kann man anstatt (48) schreiben:

$$\{K\}_R = \{e^{x\cdot G_x}\}\{e^{y\cdot G_y}\}\{e^{z\cdot G_z}\}, \tag{50}$$

wo $G_x$, $G_y$, $G_z$ für $iG$, $jG$, $kG$ gesetzt worden sind.

In einem ganz speciellen Falle, wenn nämlich die Grösse $\psi$, an welcher die betrachteten Operatoren auszuführen sind, den bekannten Bedingungen der Stetigkeit etc. Genüge leistet, erhalten die Operatoren $G_x$, $G_y$, $G_z$ die Bedeutung *partieller Derivatoren* (der Function $\psi$) in Bezug auf $x$, $y$, $z$ und die obige Formel (50) geht in einen symbolischen Ausdruck des Taylor'schen Satzes für eine Function von drei Variabeln über:

$$\psi_{x,y,z} = \{e^{x \cdot D_x}\}\{e^{y \cdot D_y}\}\{e^{z \cdot D_z}\}\psi_{0,0,0}. \tag{51}$$

Anstatt des Vectors $R$ könnte man übrigens eine andere Grösse einführen, um — in dem Operator $K$ — ein Correlativ für den Uebergang von einem Punkte des betrachteten Gebietes zu einem anderen Punkte zu haben.

---

Durch gleichzeitige Anwendung eines Operators von der Art $H$ und eines Operators von der Art $K$ (wenn nämlich zwei solche Operatoren für die Erscheinungen gelten, die sich in einem gewissen Raumgebiete innerhalb eines gewissen Zeitintervalls abspielen) kann man von dem Zustande $\psi_{O,t_0}$, der im Punkte $O$ zur Zeit $t_0$ (die wir z. B. als $t = 0$ ansehen können) herrscht, zu dem Zustande $\psi_{P,t}$ übergehen, den man in einem anderen Punkte $P$ und zu einer anderen (früheren oder späteren) Zeit $t$ finden würde. Man erhält nämlich zuerst

$$\psi_{O,t} = \left\{\begin{matrix} H \\ t \end{matrix}\right\}\psi_{O,t_0} = \{e^{tF}\}\psi_{O,t_0} \tag{52}$$

und dann

$$\psi_{P,t} = \left\{\begin{matrix} K \\ R \end{matrix}\right\}\psi_{O,t} = \left\{\begin{matrix} K \\ R \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} H \\ t \end{matrix}\right\}\psi_{O,t_0} = \{e^{RG}\}\{e^{tF}\}\psi_{O,t_0}, \tag{53}$$

oder auch zuerst $\psi_{P,t_0}$ aus $\psi_{O,t_0}$ und dann $\psi_{P,t}$ aus $\psi_{P,t_0}$; sollen die beiden Resultate identisch sein, so muss sich die Reihenfolge der auszuführenden Operationen ändern lassen, ohne eine Aenderung des Endresultates herbeizuführen, d. h. es muss sein:

$$\left\{\begin{matrix} K \\ R \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} H \\ t \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} H \\ t \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} K \\ R \end{matrix}\right\}. \tag{54}$$

Benutzt man für die beiden Operatoren die Formen (40), (48), so kann man die symbolischen Exponentialausdrücke nach der analogen für gewöhnliche Exponentialfunctionen geltenden Regel zusammenziehen und also (53) schreiben:

$$\psi_{P,t} = \{e^{R \cdot G + t \cdot F}\}\psi_{O,t_0}. \tag{54'}$$

Diese Form eignet sich direct zur Auffassung der sogenannten „Fortpflanzung" von Zuständen. Wenn nämlich im Punkte $P$ zur Zeit $t$ derselbe Zustand herrscht, der in einem anderen Punkte $O$ zu einer früheren Zeit $t_0$ (z. B. $t_0 = 0$) herrschte, so sagt man, dass der Zustand sich von $O$ bis $P$ in der Zeit $t$ „fortgepflanzt" hat; im allgemeinen kann man dabei die Frage nach dem *Wege* der Fortpflanzung ganz unberührt lassen. Das Obige können wir ausdrücken, indem wir schreiben:

$$\psi_{P,t} = \psi_{O,t_0},$$

oder:

$$\{e^{R.G+t.F}\} = 1, \tag{55}$$

oder auch (was aber ebenfalls bloss als symbolische Aequivalenz angesehen werden muss)

$$R\,G + t\,F = 0, \tag{56}$$

wo $R$ einen ganz bestimmten Vector und $t$ eine ganz bestimmte Zeitdauer bedeutet, die miteinander in der oben angenommenen Beziehung stehen.

Wenn sich der Zustand von $O$ nach $P$ auch wirklich nach der Länge des Vectors $R = O\,P$ fortpflanzt, so folgt dann aus (56), dass das Symbol

$$\{\mathfrak{v}\} = -\left\{\frac{F}{G}\right\} = -\{F\}\{G\}^{-1} \tag{57}$$

demjenigen entspricht, was man gewöhnlich *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* zu nennen pflegt. Es ist aber klar, dass dies nur dann auch eine wirkliche *Geschwindigkeit* der Fortpflanzung von Zuständen sein wird, wenn der symbolische Operator $\{F/G\}$, indem er an der die betreffenden Zustände definirenden Grösse $\psi$ ausgeführt wird, sich so verhält, als wäre er ein einfacher Multiplicator dieser Grösse selbst. Ist dies aber nicht der Fall, so kann man höchstens von einer Fortpflanzung mit gleichzeitiger Deformation (wie es z. B. die Dämpfung der Wellen ist), nicht aber von einer *reinen* Fortpflanzung der unversehrten Zustände sprechen.

---

Die Anwendung der Formel (48) für den Operator $K$ (analog der Gleichung (40) für $H$) und der Formel (54) für die Combination dieser beiden Operatoren auf die Lösungen

vieler specieller Probleme ist so naheliegend und die Durchführung der betreffenden Lösungsmethode so einfach, dass ich es für überflüssig halte, mich hierüber an dieser Stelle zu verbreiten; und was die Anwendung der Formel (40) (für $H$) anbelangt, will ich mich (ausser dem oben behandelten Falle eines vollkommen isolirenden Mediums) auf die Andeutung beschränken, dass man für einen *Halbleiter*, von der Leitfähigkeit $\lambda$, anstatt der Gleichung (Ia) eine etwas complicirtere Beziehung, und zwar (wie wohl bekannt):

$$\mu A^2\{K D^2 + \lambda D\} E = -\operatorname{curl}^2 E,$$

oder die Aequivalenz

$$D^2 + \frac{1}{\mathfrak{D}} D = -\mathfrak{v}^2 . \operatorname{curl}^2 \tag{58}$$

hat, wo $\mathfrak{D}$ die sogenannte „Relaxationszeit" ($\mathfrak{D} = K/\lambda$) ist, eine neben der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, für die gegebene Substanz charakteristische Grösse; man hat also in diesem Falle für den Operator $D$, welcher in $E_t = \{e^{tD}\} E_0$ vorkommt, den symbolischen Ausdruck:

$$D = -\frac{1}{2\mathfrak{D}} \pm \sqrt{\frac{1}{4\mathfrak{D}^2} - \mathfrak{v}^2 . \operatorname{curl}^2}, \tag{59}$$

sodass die betreffende Formel für $E_t$ die Gestalt bekommt:

$$\left\{\begin{aligned} E_t &= e^{-\frac{t}{2\mathfrak{D}}} \cdot \left\{ e^{\pm i t \sqrt{\mathfrak{v}^2 . \operatorname{curl}^2 - \frac{1}{4\mathfrak{D}^2}}} \right\} E_0 \\ &= e^{-\frac{t}{2\mathfrak{D}}} \cdot [\{\cos(t\sqrt{\ })\} E_0 \pm i\{\sin(t\sqrt{\ })\} E_0]; \end{aligned}\right. \tag{60}$$

um über die Wahl des Vorzeichens zu entscheiden, muss man ausser $E_0$ noch etwas, z. B. $M_0$ oder $E_0'$, etc., kennen; in einem ganz speciellen Falle, in welchem nämlich die anfängliche Verteilung der Kräfte eine solche ist, dass der Operator *curl* einem Multiplicator der Kräfte, mit welchen man operirt, äquivalent wird, drückt die Formel (60) *gedämpfte* elektromagnetische Wellen oder Schwingungen aus, die nämlich um so schneller gedämpft werden, je kürzer die Relaxationszeit $\mathfrak{D}$ ist.

Man erhält einen noch allgemeineren Fall, als ihn das Problem der Halbleiter bietet, wenn man annimmt, dass der

Operator $\mathfrak{D}$ durch eine symbolische Gleichung von einem beliebigen Grade $n$ gegeben ist:

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D = F', \tag{61}$$

wo $F'$ ein „geometrischer" Operator ist, wie z. B. *curl* oder *curl*$^2$ etc., und wo die Coefficienten $a$ entweder Constanten oder Functionen des Ortes sind.

Man könnte sich übrigens noch viel allgemeinere und complicirtere Fälle vorstellen, als es der letztere ist, nämlich solche, in welchen man zwischen dem Operator $D$ und einem „geometrischen" Operator, wie der oben mit $F'$ bezeichnete, *irgend eine* Beziehung gegeben hat.

---

Die Operatoren $\left\{\begin{matrix} H \\ t \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} K \\ O, P \end{matrix}\right\}$, deren Definition in (36) und (41) gegeben ist, erschöpfen natürlich den allgemeinen Begriff eines „Operators" nicht, und man könnte sich leicht andere Operatoren vorstellen, die sich der fundamentalen Eigenschaften [(37) und (38) bez. (42) und (43)] von $\{H\}$ und $\{K\}$, deren physikalische Bedeutung durch die Exponentialform ausgedrückt ist, nicht erfreuen. Für das Studium der Naturerscheinungen scheinen mir aber von fundamentaler Wichtigkeit eben diese beiden Klassen von Operatoren ($H$, $K$) zu sein, die ich *„physikalische Operatoren"* zu nennen vorschlagen möchte, indem ich mir in ihrer Definition ihre oben entwickelten Eigenschaften bereits involvirt denke. Eine jede Klasse von natürlichen Erscheinungen, oder wenigstens von solchen, die überhaupt eine quantitative Behandlung zulassen, würde hiernach durch die bezüglichen physikalischen Operatoren charakterisirt sein und das wissenschaftliche Studium der Naturerscheinungen würde in ausgedehnten Untersuchungen über die Eigenschaften dieser Operatoren bestehen, in Untersuchungen, welche auf Beobachtung basiren und vom Experiment genährt werden.

Bologna, Juni 1901.

(Eingegangen 30. Juli 1901.)

## 12. *Ueber den photoelektrischen Effect in der Nähe des Funkenpotentiales;* *von H. Kreusler.*

(Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation.)

Die 1887 von Hertz[1]) entdeckte Wirkung des ultravioletten Lichtes auf Funkenentladungen beruhen, wie Warburg[2]) gezeigt hat, auf der Herabminderung der sogenannten Verzögerungsperiode durch Strahlen kurzer Wellenlänge, die auf die Kathode der Funkenstrecke treffen. Die Wirkung ist unabhängig von der Substanz der Elektroden; nur beim Eisen vermutet Hertz eine etwas grössere Empfindlichkeit gegenüber anderen Metallen.

In gewissem Gegensatze hierzu steht das von Hallwachs[3]) beobachtete Phänomen der lichtelektrischen Zerstreuung, wonach negativ elektrisirte Leiter im ultravioletten Licht ihre Ladung allmählich verlieren. Der Hallwachs'sche Effect weist im Gegensatz zum Hertz'schen bedeutende, durch das Material des geladenen Leiters bedingte Unterschiede auf. So reagiren die Alkalimetalle[4]) bereits auf diffuses Tageslicht, sowie auf das Licht einer Kerze. Bei den meisten Schwermetallen bedarf es sehr intensiver Lichtquellen (Flammenbogen, Flaschenfunken), um überhaupt eine merkliche Zerstreuung der Elektricität hervorzubringen. Das Eisen zeichnet sich bei dem Hallwachs'schen Effect im Gegensatz zu der Beobachtung von Hertz durch besondere Unempfindlichkeit aus. Im grossen und ganzen scheint die lichtelektrische Empfindlichkeit mit dem anodischen Charakter der Metalle

1) H. Hertz, Wied. Ann. **31.** p. 983. 1887.
2) E. Warburg, Wied. Ann. **62.** p. 385. 1897.
3) W. Hallwachs, Wied. Ann. **33.** p. 301. 1888.
4) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **43.** p. 225. 1891.

zuzunehmen. Ferner liegt im allgemeinen das Maximum der Empfindlichkeit bei um so grösseren Wellenlängen des erregenden Lichtes, je anodischer das betreffende Metall ist. Für Rb[1]) liegt z. B. das Empfindlichkeitsmaximum im Gelb, für K im Blau.

Fast alle Schwermetalle reagiren nur auf ultraviolette Strahlen und zwar zumeist auf solche von hoher Brechbarkeit.

Nimmt man nun an, dass der Hertz'sche wie der Hallwachs'sche Effect auf derselben Wirkung des Lichtes, d. h. auf der Auslösung eines elektrischen Stromes beruhen, so liegt die Vermutung nahe, dass die bei niederen Potentialen wenig empfindlichen Metalle bei möglichster Annäherung an das Funkenpotential eine intensive Wirkung zeigen, weil in diesem Falle die Bedingungen denen des Hertz'schen Effectes gleichkommen.

Die vorliegende Untersuchung liefert hierzu die Bestätigung, wie aus einem Vergleich der Wirkung an zwei unter den gewöhnlichen Umständen sehr ungleich empfindlichen Metallen, Eisen und Kupfer, hervorgeht.

Ist $V_0 = 4060$ Volt das Funkenpotential und $V$ das Kathodenpotential bei der Messung der Intensität des lichtelektrischen Stromes, so beträgt für $V_0 - V = 560$ die Empfindlichkeit des Cu ungefähr das 30 fache der des Fe. Ist aber $V_0 - V = 30$, so ist Cu nur noch dreimal empfindlicher als Fe. Ueberhaupt zeigen in grosser Nähe des Funkenpotentiales alle Metalle eine derartige lichtelektrische Empfindlichkeit, dass dagegen die bei niederen Potentialen beobachteten Wirkungen vollständig in den Hintergrund treten.

Für die Vorversuche dienten kugelförmige Elektroden aus Zn bez. Fe. Da sich herausstellte, dass die Intensität des photoelektrischen Stromes in hohem Grade abhängt von der Richtung des Lichtstrahles gegen die gemeinschaftliche Axe der Kugeln, wurde von diesen Abstand genommen, und als Kathoden wurden kleine, aus Blech gestanzte Calotten von 9 mm Krümmungsradius und 12 mm freier Oeffnung verwandt. Die Anode bildete ein 0,25 mm dicker Platindraht, der quer über das eine Ende einer kurzen, 20 mm weiten Messingröhre gespannt war.

---

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 52. p. 433. 1894.

Die Kathoden *K* (Fig. 1) passten in eine gemeinsame Fassung und wurden mit dieser auf einem Funkenmikrometer *M* befestigt. Der Kathode gegenüber befand sich in etwa 1 mm Abstand die Anode *A* ebenfalls auf dem Mikrometer. Die Kathode war fest und die Anode durch die Mikrometerschraube beweglich.

Das Licht ging convergent durch das Messingrohr der Anode hindurch und fiel senkrecht auf die Kathode auf. Dadurch war die Empfindlichkeit der Anordnung ungemein gesteigert, und kleine Orientirungsfehler zu den Lichtstrahlen waren ganz ohne Belang.

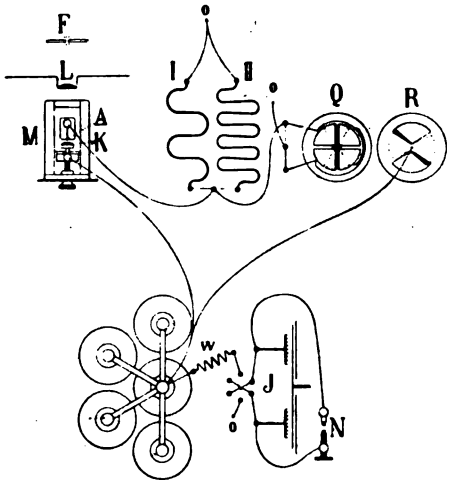


Fig. 1.

Die Anode hatte durch zwei miteinander vertauschbare Widerstände I und II Verbindung mit der Erde.

Die Widerstände bestanden aus 150 cm langen, 4 mm weiten, zickzackförmig gebogenen Glasröhren, die an den Enden reagenzglasähnliche Gefässe für die 20 $cm^2$ messenden Elektroden aus Cadmiumblech trugen. Die Röhren waren mit einer Lösung von vorher geschmolzenem Cadmiumjodid in xylolhaltigem Amylalkohol (Sp. = 132°) gefüllt. Die $CdJ_2$-Lösung allein mit Amylalkohol zu verdünnen, ging nicht an, da dieser auch im sogenannten chemisch reinen Zustand ein für vorliegenden Zweck viel zu grosses Leitvermögen besitzt. Zu bemerken ist, dass schon ein relativ geringer Zusatz von Xylol hinreicht, um den Widerstand der $CdJ_2$-Lösung beträchtlich zu erhöhen. Es scheint sich hier demnach weniger um eine blosse mechanische Verdünnung, als um eine Herabsetzung des Dissociationsgrades der Lösung zu handeln. Widerstand I betrug $3556 . 10^6$ und Widerstand II $1743 . 10^7$ Ohm. Die geeignete Grössenordnung der Widerstände wurde empirisch

gefunden. Eine Polarisation an den Elektroden war nicht nachweisbar.

### Kathodenpotential.

Die Kathode erhielt ihre Ladung von einer constant laufenden Influenzmaschine *J*. Der Anforderung, wenigstens für die Dauer einer Messung eine ganz constante Potentialdifferenz zu haben, wurde in folgender Weise genügt.

Die Kathode war mit einer grossen Capacität, einer Batterie von fünf Leydener Flaschen zu je 2170 cm² Aussenbelegung, verbunden. Die Zuleitung zu dieser Batterie von der Maschine vermittelte ein $CdJ_2$-Amylalkoholwiderstand $w$ von solcher Grösse, wie wegen des Hallwachseffectes an der Kathode zulässig war. Der Hallwachseffect ist nämlich in der Nähe des Funkenpotentiales so bedeutend, dass er, wenn $w$ zu gross ist, eine teilweise Entladung der Flaschenbatterie herbeiführt, sodass ihr Potential dadurch herabsinkt.

Auf beliebiger Höhe konnte das Kathodenpotential erhalten werden durch zwei die Spitzen einander zukehrenden Bündel feiner Nadeln im Nebenschluss der Elektrisirmaschine. Die Entfernung der Spitzen liess sich durch eine Schraube variiren.

### Lichtquelle.

Das zur Auslösung des photoelektrischen Stromes erforderliche Licht lieferten 2 mm lange Condensatorfunken zwischen Aluminiumelektroden. Diese waren zur Verhütung des störenden Umherflackerns der Funken nur 0,4 mm dick. Da nicht allein an ein und demselben Metall der photoelektrische Effect verfolgt, sondern auch eine Anzahl verschiedener Metalle unter sich verglichen werden sollten, musste die Intensität des Funkenlichtes während einer langen Zeitdauer durchaus constant sein. In erster Linie musste daher eine durch Zerstäuben der Elektroden verursachte Aenderung der Funkenlänge vermieden werden.

Folgender Apparat (Fig. 2) ermöglichte dies in vollkommen befriedigender Weise.

Die beiden Elektroden *E* stehen angenähert unter rechtem Winkel zu einander und stossen mit den Enden auf eine schwach abwärts geneigte Glasplatte *p*, möglichst dicht an

ihrem vorderen Rande. Ihre unverrückbare Lage erhalten sie durch zwei eigentümlich gekrümmte Glasstäbchen *s* (vgl. Figur). Eine Drehung oder Verschiebung der Elektrodenhalter *h* in der Fassung *F* gestattet die Länge der Funken zu ändern. *g* ist eine Glimmerplatte, die senkrecht zu der Glasplatte, von dieser etwa 1 mm entfernt, zwischen den Elektroden befestigt ist. Sie verhindert das Ueberspringen von Funken oberhalb der eigentlichen Entladungsstrecke. Die oberen Enden der Drähte sind abwärts gebogen und tauchen in Quecksilbergefässe ein, durch die auch die elektrische Zuleitung erfolgt.

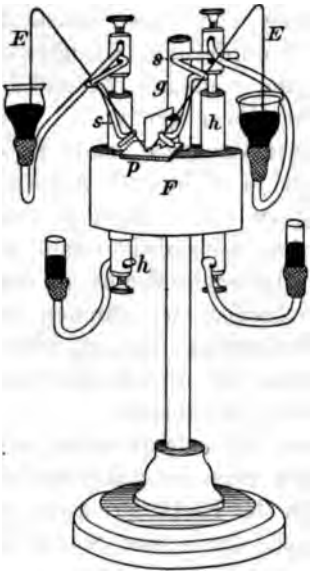


Fig. 2.

Zum Betriebe des die Funken liefernden Inductionsapparates (Spulenlänge 21 cm, Stromstärke 4 Amp.) diente ein doppelt wirkender Quecksilberunterbrecher von Siemens & Halske. Die Unterbrechungszahl ergab sich zu 29 pro sec.

Von den Belichtungsfunken *F* (Fig. 1) wurde mit einer Quarzlinse *L* auf der Kathode ein reelles Bild entworfen, das nur in der Mitte durch den schmalen Schatten der Anode unterbrochen war.

### Ermittelung des Funkenpotentiales.

Die sorgfältig gereinigte und polirte Kathode wurde in 1 mm Abstand von der Anode auf dem Funkenmikrometer befestigt. Diese Einstellung liess sich aus gewissen Gründen nicht sehr präcise ausführen, weshalb die Funkenpotentiale bis etwa 30 Volt auseinander liegen.

Nun erhielt die Kathode eine langsam wachsende negative Ladung, bis gegen die jetzt direct zur Erde geleitete Anode bei gleichzeitiger Bestrahlung Funkenentladung eintrat. Die Bestrahlung, die den Zweck hatte, die „Verzögerung" zu beseitigen, geschah mit möglichst schwachem und kurz andauerndem Funkenlicht (Inductorium ohne Flasche) wegen der

durch das Licht verursachten „Ermüdung" der Kathode, wovon später eingehender die Rede sein wird. Die fünf Leydener Flaschen waren dabei ausgeschaltet, um nicht die polirte Kathodenfläche durch starke Funken zu corrodiren. Nach Schluss eines Versuches, wenn die Kathode nicht mehr gebraucht wurde, fand zur Controle noch eine Bestimmung des Funkenpotentiales unter Einschaltung der Batterie statt.

### Elektrometer.

Die Messung des Kathodenpotentiales geschah an einem Righi'schen Reflexionselektrometer $R$ (Fig. 1) mit Scala und Fernrohr. (Scalenabstand gleich 3,20 m.)

Zur Bestimmung der Intensität des photoelektrischen Stromes war ein Quadrantenpaar (1) eines Thomson'schen Elektrometers $Q$ mit der Anode verbunden. Diese hatte, wie bereits erwähnt, durch einen der Widerstände I und II Erdverbindung. Das zweite Quadrantenpaar (2) ging direct zur Erde. Der bei Belichtung von der Kathode zur Anode gehende photoelektrische Strom erzeugte an den Enden der Widerstände eine Potentialdifferenz, deren Betrag das Elektrometer $Q$ anzeigte.

Waren am Widerstand I die Potentialdifferenzen für die Messung zu klein, so wurde er mittels Quecksilberwippe gegen II ausgewechselt.

Die Empfindlichkeit des Quadrantelektrometers betrug 1 Volt gleich 80 Sct. zu 2 mm (Scalenabstand gleich 2 m). Eine Hülfsladung der Elektrometernadel von 500 Volt genügte, da die gemessenen Potentialdifferenzen nicht über 3 Volt hinausgehen.

### Beobachtung.

Die Kathode erhielt eine so hohe Ladung, als ohne Gefahr einer Funkenentladung möglich war (bis ca. 10 Volt unterhalb des Funkenpotentiales), während die Anode directen Erdschluss hatte. Darauf wurde bestrahlt, die directe Erdleitung der Anode unterbrochen und der Ausschlag der Elektrometernadel notirt. Jede folgende Ablesung geschah bei einem niedrigeren Kathodenpotential als die vorhergehende.

Das durch den lichtelektrischen Strom der Anode erteilte Potential betrug höchstens 3 Volt, was, da die Gesamtspannung stets mehrere 1000 Volt betrug, keine Berücksichtigung fand.

**Kathodenermüdung.**

Eine die Beobachtungen beeinträchtigende Rolle spielte das schnelle Nachlassen der lichtelektrischen Empfindlichkeit durch längere Belichtung bei den meisten Metallen. Diese „Ermüdung" beruht auf einer Wirkung des ultravioletten Lichtes auf die Kathodenoberfläche, wie sich aus folgendem Versuch ergiebt:

An einer Kathode von frisch polirtem Zn, welches die Ermüdungserscheinung in besonders hohem Maasse zeigt, wurde der lichtelektrische Strom bei einer Spannung von 3320 Volt mehrmals hintereinander gemessen. Zwischen je zwei Messungen blieb die Kathode mit der Erde verbunden, also auf dem Potential Null. In dieser Zwischenzeit nun wurde sie entweder einige Minuten lang bestrahlt, oder vor Licht geschützt.

Das Resultat veranschaulicht folgende Tabelle:

| Intensität des photoelektrischen Stromes: | |
|---|---|
| zu Anfang . . . . . | $1{,}36 \cdot 10^{-10}$ Amp. |
| nach 8 Min. ohne Belichtung | $1{,}33 \cdot 10^{-10}$ |
| nach 5 Min. Belichtung | $1{,}16 \cdot 10^{-10}$ |
| nach 6 Min. ohne Belichtung | $1{,}16 \cdot 10^{-10}$ |
| nach 5 Min. Belichtung | $1{,}02 \cdot 10^{-10}$ |
| nach 5 Min. ohne Belichtung | $1{,}02 \cdot 10^{-10}$ |
| nach 6 Min. Belichtung | $0{,}85 \cdot 10^{-10}$ |

Die Tabelle zeigt zugleich, dass die Ermüdung wenigstens für die hier in Betracht kommende Belichtungsdauer dieser proportional ist.

Dass thatsächlich eine Oberflächenänderung stattfindet, geht daraus hervor, dass nach längerer Bestrahlung sich die durch die Anode beschattete Stelle der Kathode beim Anhauchen als scharfe Linie markirte. Bei einer späteren Gelegenheit trat diese Oberflächenänderung noch viel prägnanter hervor. Eine Silberkathode befand sich hinter einem Spectrometerspalt, durch welchen auf sie ultraviolettes Licht von ungefähr 200 $\mu\mu$ Wellenlänge auffiel. Nachdem die Kathode mehrere Tage hindurch ohne Erneuerung der Politur gebraucht war, hatte ihre Oberfläche ein nebliges Aussehen, was wohl auf angezogene feste Teilchen aus der Luft zurückzuführen ist. Die streifenförmige Stelle, wo das Licht hingelangen konnte, war vollständig blank geblieben.

Bisweilen schien die Empfindlichkeit einer „ermüdeten" Kathode nach einiger Zeit wieder zuzunehmen.

Gleiche Beobachtungen sind später von H. Buisson [1]) gemacht und eingehender verfolgt worden.

Das einzige Metall, dessen Empfindlichkeit während der Dauer einer Beobachtungsreihe wesentlich constant blieb, war reines Silber. Die Versuchsresultate [2]) sind im Folgenden tabellarisch zusammengestellt. Es bedeutet $V$ das Kathodenpotential, $V_0$ das Funkenpotential in Volt und $J$ die Intensität des photoelektrischen Stromes in Ampère. Untersucht wurden Zn, Fe, Cu, Ag, Pt, Al, amalgamirtes Cu und berusstes Al.

Um die Resultate von dem Einfluss der Ermüdung zu befreien, bot sich folgender Weg. Jede Beobachtungsreihe setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste giebt die Intensitäten des photoelektrischen Stromes beim Uebergang von hohen zu niederen Potentialen, der zweite in umgekehrter Reihenfolge. Trägt man die gefundenen Werte graphisch auf, indem man als Abscissen die Kathodenpotentiale und als Ordinaten die Stromintensitäten wählt, so ergeben sich zwei Curven, die am unteren Ende zusammenstossen. Die hieraus construirte Mittelcurve stellt den Verlauf für eine constante, mittlere Empfindlichkeit dar. Ist $a$ die Maximalordinate der absteigenden Curve und $b$ die entsprechende Ordinate der Mittelcurve, so ergiebt das Verhältnis $a/b$ das Maass der Er-

1) H. Buisson, Compt. rend. **20.** p. 1298. 1900.

2) Nachdem vorliegende Untersuchungen bereits abgeschlossen und im Auszug der Physikalischen Gesellschaft vorgelegt waren, erschien in den Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **108.** p. 273. 1899 (vgl. auch Beibl. **23.** p. 585. 1899) eine Abhandlung des Hrn. E. v. Schweidler über den gleichen Gegenstand. Mit einer anderen Versuchsanordnung kommt Verf. im Princip zum gleichen Resultat wie der Verf. vorliegender Arbeit. Hr. v. Schweidler giebt aber an, störende, ruckweise Entladungen erhalten zu haben und hält den lichtelektrischen Entladungsvorgang bei Annäherung an das Funkenpotential für nicht stationär. Aus seinen Erfahrungen zieht Verf. den Schluss, dass ähnliche, offenbar durch Büschelentladungen verursachte Störungen bei meiner Anordnung in erhöhtem Maasse eintreten müssten. Dies ist indessen nicht der Fall, da bei mir die Entladungspotentiale absichtlich unterhalb der für Büschelentladungen notwendigen Grenze gewählt wurden. Mitunter kamen allerdings auch bei mir ruckweise Entladungen vor, die indessen stets durch ein von der Kathode angezogenes Staubfäserchen verursacht wurden. Im übrigen verlief die Entladung vollkommen stetig.

müdung an, womit die Ordinaten der Mittelcurve zu multipliciren sind, um die Werte der Anfangsempfindlichkeit für den ganzen Verlauf zu erhalten. Allerdings setzt dies Verfahren voraus, dass die zur Bestimmung von $a/b$ zugehörigen Abscissen sehr genau gemessen sind, da wegen des ausserordentlich steilen Verlaufes der Curven nahe am Funkenpotential kleine Differenzen der Abscissen grosse Unterschiede der entsprechenden Ordinaten bedingen. Nun war eine genauere Ablesung des Righi'schen Elektrometers als auf etwa 0,3 Proc. nicht zu erreichen, weshalb sich der Factor $a/b$ nur angenähert ermitteln liess.

Die erste Columne der Tabelle enthält Kathodenpotential und Stromintensität in absteigender, die zweite in aufsteigender Reihe. In der dritten Columne finden sich die auf die Anfangsempfindlichkeit bezogenen Intensitäten.

Zink.

$V_0 = 4060.$ $\frac{a}{b} = 1{,}258.$

| $V$ | $J$ | $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4040 | 136,39.10$^{-10}$ Amp. | 1760 | 0,06.10$^{-10}$ Amp. | 4040 | 136,39.10$^{-10}$ Amp |
| 3970 | 25,67 | 2530 | 0,08 | 3970 | 29,40 |
| 3780 | 5,88 | 3060 | 0,17 | 3770 | 6,14 |
| 3700 | 2,40 | 3330 | 0,36 | 3705 | 2,75 |
| 3590 | 1,39 | 3440 | 0,58 | 3615 | 1,74 |
| 3440 | 0,70 | 3640 | 1,36 | 3440 | 0,80 |
| 3300 | 0,40 | 3710 | 1,98 | 3315 | 0,47 |
| 3050 | 0,19 | 3760 | 3,88 | 3055 | 0,23 |
| 2540 | 0,09 | 3970 | 21,09 | 2535 | 0,11 |
| 1760 | 0,06 | 4040 | 80,51 | 1760 | 0,08 |
| 1170 | 0,05 | | | 1170 | 0,06 |

Eisen.

$V_0 = 4070.$ $\frac{a}{b} = 1{,}146.$

| $V$ | $J$ | $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4030 | 31,64.10$^{-10}$ Amp. | 3080 | 0,04.10$^{-10}$ Amp. | 4030 | 31,64.10$^{-10}$ Amp. |
| 3970 | 6,33 | 3540 | 0,18 | 3980 | 8,06 |
| 3900 | 1,94 | 3630 | 0,31 | 3915 | 2,36 |
| 3790 | 0,85 | 3800 | 0,90 | 3795 | 1,23 |
| 3650 | 0,37 | 3930 | 2,18 | 3640 | 0,39 |
| 3530 | 0,17 | 3990 | 7,73 | 3535 | 0,20 |
| 3080 | 0,04 | 4030 | 23,57 | 3080 | 0,05 |
| 2310 | 0,01 | | | 2310 | 0,01 |

Kupfer.

$V_0 = 4050.$ $\frac{a}{b} = 1{,}138.$

| $J$ | $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|---|
| 92,81.10−10 Amp. | 1920 | 0,17.10−10 Amp. | 4030 | 92,81.10−10 Amp. |
| 82,51 | 2680 | 0,27 | 3975 | 35,70 |
| 11,25 | 3080 | 0,43 | 3820 | 12,00 |
| 5,09 | 3300 | [0,77] | 3695 | 6,17 |
| 2,05 | 3480 | 1,27 | 3600 | 2,28 |
| 1,27 | 3600 | 1,95 | 3475 | 1,45 |
| 0,84 | 3700 | 4,75 | 3290 | [0,92] |
| 0,44 | 3820 | 9,84 | 3075 | 0,49 |
| 0,27 | 3990 | 30,23 | 2680 | 0,31 |
| 0,17 | 4030 | 70,31 | 1935 | 0,19 |
| 0,11 | | | 1200 | 0,12 |

Silber.[1])

$V_0 = 4040.$ $\frac{a}{b} = 1.$

| $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|
| 4020 | 129,02 . 10−10 Amp. | 3290 | 0,42 . 10−10 Amp. |
| 3990 | 53,09 | 3060 | 0,22 |
| 3950 | 22,86 | 2890 | 0,17 |
| 3880 | 10,55 | 2470 | 0,10 |
| 3750 | 3,88 | 2140 | 0,08 |
| 3640 | 1,84 | 1630 | 0,06 |
| 3430 | 0,75 | 1170 | 0,05 |

Platin.

$V_0 = 4060.$ $\frac{a}{b} = 1{,}118.$

| $J$ | $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|---|
| 98,09.10−10 Amp. | 1580 | 0,06.10−10 Amp. | 4035 | 98,09.10−10 Amp. |
| 27,78 | 2240 | 0,09 | 3970 | 29,29 |
| 10,91 | 2850 | 0,14 | 3860 | 11,80 |
| 4,22 | 3230 | 0,34 | 3710 | 3,93 |
| 1,84 | 3350 | 0,48 | 3635 | 1,92 |
| 1,85 | 3590 | 1,38 | 3580 | 1,53 |
| 0,57 | 3680 | 1,60 | 3350 | 0,59 |
| 0,32 | 3700 | 2,81 | 3205 | 0,37 |
| 0,15 | 3870 | 10,21 | 2845 | 0,16 |
| 0,09 | 3980 | 24,61 | 2210 | 0,10 |
| 0,06 | 4040 | 77,33 | 1575 | 0,07 |
| 0,05 | | | 1120 | 0,06 |

1) Bei Silber und berusstem Aluminium wurde keine Ermüdung wahrmmen.

**Aluminium.**

$V_0 = 4050.$ $\frac{a}{b} = 1{,}084.$

| $V$ | $J$ | $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4040 | 100,58 . $10^{-10}$ Amp. | 2000 | 0,04 . $10^{-10}$ Amp. | 4040 | 100,58 . $10^{-10}$ |
| 3930 | 10,55 | 2760 | 0,07 | 3930 | 11,05 |
| 3870 | 6,83 | 3310 | 0,22 | 3875 | 6,45 |
| 3780 | 2,32 | 3490 | 0,47 | 3780 | 2,35 |
| 3690 | 1,26 | 3680 | 1,23 | 3685 | 1,35 |
| 3470 | 0,44 | 3780 | 2,01 | 3480 | 0,49 |
| 3290 | 0,21 | 3880 | 6,33 | 3300 | 0,23 |
| 2770 | 0,08 | 3930 | 9,84 | 2765 | 0,08 |
| 2000 | 0,04 | 4040 | 85,07 | 2000 | 0,04 |
| 1120 | 0,03 | | | 1120 | 0,03 |

**Amalgamirtes Kupfer.**

$V_0 = 4060.$ $\frac{a}{b} = 1{,}033.$

| $V$ | $J$ | $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4020 | 66,45 . $10^{-10}$ Amp. | 900 | 0,12 . $10^{-10}$ Amp. | 4020 | 66,45 . $10^{-10}$ |
| 3980 | 56,24 | 1170 | 0,15 | 3980 | 48,64 |
| 3940 | 40,44 | 1720 | 0,18 | 3935 | 35,96 |
| 3850 | 21,09 | 2220 | 0,22 | 3840 | 18,51 |
| 3680 | 8,10 | 2560 | 0,28 | 3695 | 7,81 |
| 3570 | 4,58 | 2760 | 0,34 | 3580 | 4,37 |
| 3520 | 2,60 | 2890 | 0,40 | 3505 | 2,35 |
| 3360 | 1,55 | 3180 | 0,80 | 3375 | 1,53 |
| 3280 | 1,30 | 3270 | 1,02 | 3275 | 1,20 |
| 3130 | 0,88 | 3390 | 1,41 | 3155 | 0,87 |
| 2900 | 0,54 | 3490 | 1,95 | 2895 | 0,49 |
| 2770 | 0,42 | 3590 | 3,88 | 2765 | 0,39 |
| 2550 | 0,32 | 3710 | 7,03 | 2555 | 0,31 |
| 2140 | 0,25 | 3830 | 14,76 | 2180 | 0,24 |
| 1730 | 0,19 | 3930 | 29,19 | 1725 | 0,19 |
| 1240 | 0,17 | 3980 | 37,96 | 1205 | 0,17 |
| 950 | 0,14 | 4020 | 62,23 | 925 | 0,13 |
| 400 | 0,08 | | | 400 | 0,08 |

**Berusstes Aluminium.** $V_0 = 4050.$ $\frac{a}{b} = 1.$

| $V$ | $J$ | $V$ | $J$ |
|---|---|---|---|
| 4040 | 94,57 . $10^{-10}$ Amp. | 3590 | 1,31 . $10^{-10}$ Amp. |
| 4020 | 53,09 | 3480 | 0,75 |
| 3940 | 20,75 | 3270 | 0,33 |
| 3880 | 12,23 | 2920 | 0,13 |
| 3820 | 7,40 | 2230 | 0,09 |
| 3730 | 2,38 | 1350 | 0,04 |
| 3680 | 1,91 | | |

Fig. 3 sind, um die Uebersicht nicht zu beeinträchtigen, Curven für Fe, Al, Zn, Cu und amalgamirtes Cu ge-. Aus dem gleichen Grunde ist auch nur ihr unterer angegeben. Fig. 4 stellt indessen omverlauf für Zn in fast seiner Ausdehnung dar und zwar in $^1/_{20}$ den übrigen Curven angewandten abes. Als Abscissen sind hier nicht odenpotentiale selbst, sondern ihre zen vom Funkenpotential aufge- da eben diese für den Stromverlauf bend sind. Im anderen Falle würde, Funkenpotentiale etwas auseinander die Vergleichbarkeit der Curven

n erkennt, dass die Intensität des ktrischen Stromes dem Kathoden- l anfangs annähernd proportional langsam mit diesem wächst. Bei wissen Annäherung an das Funken- l beginnt die Stromstärke rascher men und gelangt schliesslich zu hohen Werten (vgl. Fig. 4). Der der Curven wird fast senkrecht. Thatsache nun, dass in grosser es Funkenpotentiales alle Metalle serordentlich grosse lichtelektrische lichkeit besitzen, liefert die Er- dafür, dass der von Hertz beob- Effect nicht von der Substanz der elektroden abhängt, oder dass eine e Abhängigkeit so minimal ist, dass der Wahrnehmung entzog.

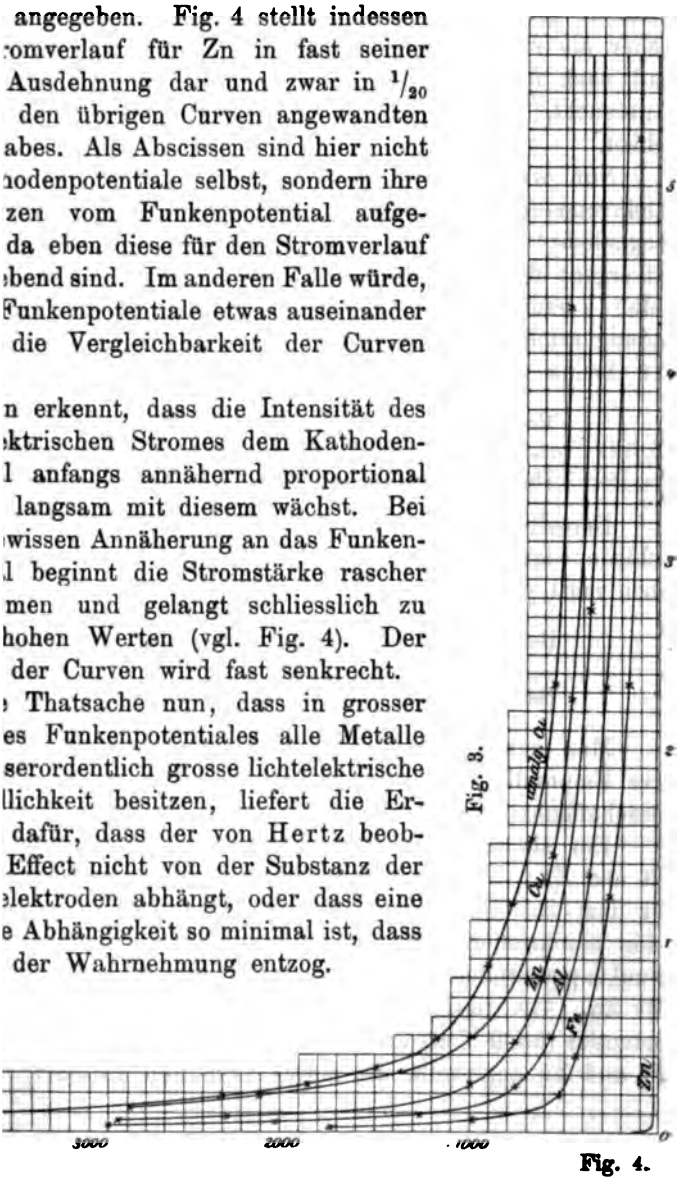



Fig. 4.

Abweichend von früheren[1]) Beobachtungen zeichnet sich das Kupfer durch besonders hohe Empfindlichkeit aus. Zur Feststellung, ob vielleicht Spuren von Quecksilber an die Kathode geraten wären (amalgamirte Metalle sind viel empfindlicher als reine), wurde sie mehrere Minuten heftig geglüht und nach frischem Poliren mit noch ungebrauchtem Material untersucht. Es zeigte sich aber gegen vorher kein Unterschied.

Nun wurde die Kupferkathode mit einem Kolbe'schen Elektrometer verbunden, bei einer Ladung von 1500 Volt mit Bogenlicht bestrahlt und die Zeit notirt, innerhalb deren die Divergenz des Aluminiumblättchens auf Null zurückging. Derselbe Versuch wurde darauf mit Zink gemacht. Die Entladung erfolgte bei diesen Versuchen in die freie Luft, indem die Anode vom Mikrometer entfernt war.

| | |
|---|---|
| Bei Cu dauerte die Entladung im Mittel: | 41 sec, |
| „ Zn „ „ „ „ „ | 65 „ |
| Daraus folgt Cu empfindlicher als Zn: | 37 Proc. |

Derselbe Versuch wurde nun wiederholt mit dem Unterschiede, dass jetzt die beiden Kathoden mit feinem Smirgel eben matt geschliffen waren.

| | |
|---|---|
| Bei Cu dauerte die Entladung im Mittel: | 100 sec, |
| „ Zn „ „ „ „ „ | 90 „ |
| Daraus folgt Zn empfindlicher als Cu: | 10 Proc. |

Man sieht daraus, dass sowohl die absolute, wie die relative Empfindlichkeit in hohem Maasse von der mechanischen Beschaffenheit der Kathodenoberfläche abhängt.

Ein ähnlich abweichendes Verhalten zu einander zeigten Pt und Zn. Nach den Resultaten früherer Beobachter steht Pt dem Zn an lichtelektrischer Empfindlichkeit nach. Die hier beschriebenen Versuche aber ergaben in der Nähe des Funkenpotentiales für Pt eine grössere Empfindlichkeit als für Zn. Aus diesem Grunde wurde bei einem hohen Funkenpotential (6500 Volt) eine vergleichende Beobachtung zwischen Pt und Zn angestellt, die dieses Verhalten aufklärt.

---

1) A. Righi, Beibl. 13. p. 41. 1889.

| Pt | | Zn | |
|---|---|---|---|
| *V* | *J* | *V* | *J* |
| 1470 | prop. 4 | 1470 | prop. 6 |
| 2670 | 7 | 2770 | 8 |
| 3610 | 10 | 3440 | 13 |
| 4300 | 16 | 4680 | 21 |
| 4810 | 32 | 4870 | 28 |
| 5000 | 48 | 5020 | 37 |

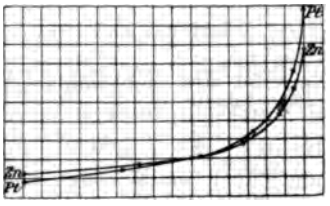



Fig. 5.

Die aus den erhaltenen Zahlen construirten Curven (Fig. 5) chneiden sich ungefähr an der Stelle, wo das starke Steigen er Stromintensität seinen Anfang hat.

Berlin, Physik. Institut, Juli 1901.

(Eingegangen 3. August 1901.)

## 13. *Anwendung des photoelektrischen Stromes zur Photometrie der ultravioletten Strahlen;* *von H. Kreusler.*

(Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation.)

Die grosse Intensität des lichtelektrischen Effectes nahe am Funkenpotential bietet ein äusserst empfindliches Reagenz auf ultraviolette Strahlen. Es erscheint daher der Gedanke, den photoelektrischen Effect zur Messung von Lichtintensitäten heranzuziehen, als naheliegend. Bedingung für die Brauchbarkeit desselben für die Photometrie ist natürlich die Proportionalität mit der Intensität des erregenden Lichtes.

Nach den Versuchen von Elster und Geitel[1]), die Kaliumzellen zur Vergleichung von Lichtstärken benutzten, ist bei relativ niederen Potentialen diese Proportionalität vorhanden. In grosser Nähe des Funkenpotentiales ist sie es, wie sich im Laufe der Untersuchung ergab, im allgemeinen nicht. Durch eine besonders empfindliche Anordnung, die später eingehender beschrieben ist, liess sich eine allzu grosse Annäherung an das Funkenpotential umgehen, sodass die Proportionalität dauernd erhalten blieb. Nachgewiesen und ständig controlirt wurde sie durch zwei Sectorblenden, die eine zur Projection des Bildes der Belichtungsfunken auf den Spectrometerspalt dienende Quarzlinse je zur Hälfte verdecken konnten. War die gesuchte Proportionalität vorhanden, so musste die photoelektrische Intensität bei ganz geöffneter Linse gleich sein der Summe der Intensitäten, die sich ergaben, wenn erst die eine, dann die andere Hälfte der Linse verdeckt war.

Literaturangaben über bereits vorhandene Photometer für ultraviolettes Licht und eine Besprechung der wichtigsten unter ihnen finden sich in der Dissertation.

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **48.** p. 625. 1893.

### Die photoelektrische Methode.

#### 1. Belichtungsfunken.

In der Folge handelt es sich immer um spectral zerlegtes Licht, was zur Erlangung einer hinreichenden Intensität sehr kräftige Funken notwendig machte. Deshalb kam ein grosses Inductorium (Spulenlänge 45 cm) in Verbindung mit zwei Leydener Flaschen von je 2170 $cm^2$ Aussenbelegung in Anwendung. Die Stromstärke (bei Dauerschluss) betrug 16 Amp. bei 110 Volt Spannung. Zum Betriebe des Inductoriums diente ein Quecksilber-Turbinenunterbrecher (A. E. G.).[1]) Die mit einem Tourenzähler ermittelte Unterbrechungszahl betrug 40 pro sec.

Als Elektroden bewährten sich am besten 0,3 mm dicke, 4—5 mm breite Blechstreifen. Dieselben standen, der eine in der Verlängerung des anderen, vertical, die Kante dem Spectrometerspalt zugekehrt.

Da sich die Elektroden mit der Zeit verkürzen, ist natürlich die Lichtintensität einer allmählichen Aenderung unterworfen. Diese verläuft aber ganz continuirlich und ist, weil nur vergleichende Beobachtungen unmittelbar hintereinander in Frage kommen, vollkommen bedeutungslos.

Als Elektrodenmaterial diente Aluminium, Zink und eine Legirung von gleichen Teilen Zink und Cadmium mit einem Zusatz von 5 Proc. Antimon.

Besonderer Erwähnung bedarf es, dass ausser bei Al nie constantes Licht erzielt werden konnte, wenn beide Elektroden aus gleichem Metall bestanden. Dies gelang nur, wenn der negative Pol Al war. Manche Metalle, wie Cu, Ni, Ag, Messing, gaben überhaupt kein ruhiges Licht.

Die Elektroden liessen sich an einem Halter immer in gleicher Stellung mittels $\Omega$-förmiger Federn anklemmen. Der Halter war, um seitliche Bewegung der Funkenstrecke zu ermöglichen, an einer Verlängerung der Collimatoralhidade um eine verticale Axe drehbar befestigt. Die genaue Einstellung der Funkenbahn wurde mit zwei Druckschrauben bewerkstelligt.

---

1) Eine Reihe mit dem Wehnelt'schen Flüssigkeitsunterbrecher (mit innerer Wasserkühlung) angestellter Versuche lieferte keine übereinstimmenden Resultate.

### 2. Spectrometer.

Da eine einmalige Zerlegung des Lichtes kein genügend reines Spectrum lieferte, wurde dieselbe durch zwei getrennte Spectrometer vollzogen. Das austretende Licht erwies sich so als hinreichend homogen.

Auf dem Spectrometer I (Fig. 1) befand sich ein kleines Fluoritprisma mit brechendem Winkel von 58° 39′ 42″. An dem beweglichen Arm von I befand sich ausser dem Collimatorrohr die Funkenstrecke $F$ und die kleine Projectionslinse (1) aus Quarz. Um hinter dem Prisma $P_1$ Platz für die

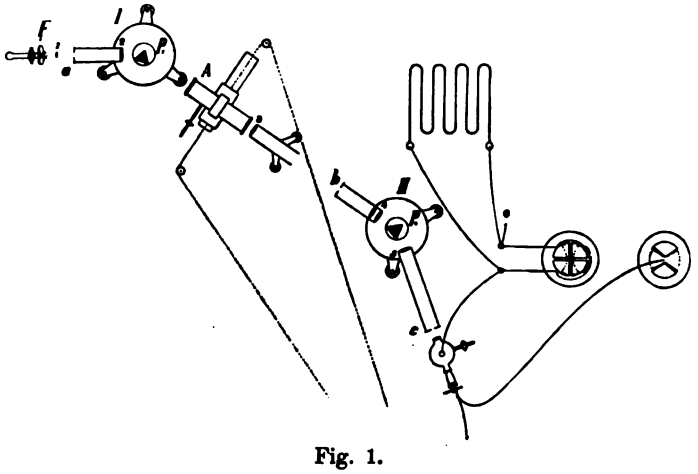



Fig. 1.

Absorptionsgefässe zu gewinnen, war das Fernrohr von I entfernt und in grösserem Abstande mit besonderem Stativ aufgestellt. In der Brennebene der Linse (3) für Na-Licht befand sich der Collimatorspalt ($b$) des Spectrometers II. Das durch ($b$) ausgeblendete noch unhomogene Lichtbündel wird durch $P_2$ (brechender Winkel gleich 60°) zum zweiten Male zerlegt, sodass schliesslich durch den Spalt ($c$) Licht von genügender Reinheit austritt. Am Spectrometer II ist das Collimatorrohr fest. ($c$) befindet sich in der Brennebene von (5) ebenfalls für Na-Licht, sodass bei Beleuchtung von ($a$) mit der Natriumflamme in ($c$) eine scharfe Linie liegt.

Die Spaltbreiten waren so gewählt, dass ($b$) von dem auf seine Ebene projicirten Bild von ($a$) auf jeder Seite etwa $^1/_6$

ler Breite wegblendete. Ein ähnliches Verhältnis bestand wischen (*c*) und (*b*). Die Oeffnung betrug von (*a*): 26′ = ca. 1 mm, lie von (*b*): 50′ = 1,8 mm und die von (*c*): 45′ = 3 mm, die Winkel von der Mitte der Collimatorobjective aus gerechnet. Mit Ausnahme von (4) waren alle Linsen aus Quarz und gut enkrecht zur Hauptaxe geschnitten. (4) war ein System von wei Fluoritlinsen. Die Brennweiten der einzelnen Linsen aren (für *D*-Licht) (1): ca. 3 cm; (2): 12,5 cm; (3): 24,5 cm; 4): 12,5 cm und (5): 23,5 cm.

Genaue Angaben betreffs der Justirung der Apparate nden sich in der Dissertation.

Zur Calibration der Prismen dienten die von Sarasin[1]) igegebenen Brechungsexponenten des Flussspates für ultraolettes Licht.

### 3. Photoelektrische Zelle.

Dieselbe beruht auf der von Warburg[2]) nachgewiesenen isserordentlichen lichtelektrischen Empfindlichkeit der Metalle verdünntem Wasserstoff.

Eine 6 cm weite Glaskugel (Fig. 2) igt zwei Schliffstücke $S_1$ und $S_2$ zur nführung der Kathode *K* und der iode *A*.

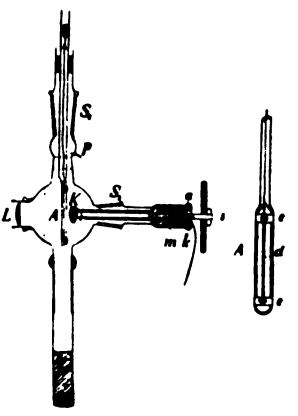


Fig. 2.

Die Kathode, eine Calotte aus atinblech, ist auf ein rundes Mesigstück vom gleichen Durchmesser 2 mm) aufgelötet. Das Messingstück nn mit einem Rohransatz auf die rlängerung einer stählernen Mikroterschraube *s* aufgesteckt werden. e in $S_1$ festgekittete Mutter *m* ist s Ebonit gefertigt. Sie besitzt eine sdrehung *a*, die ihrerseits mit einer rkplatte *k* verschlossen ist, durch welche die schwach einettete Schraube hindurchgeht. Der übrigbleibende Hohlm von *a* enthält zur vollkommenen Abdichtung der Schraube

1) E. Sarasin, Arch. d. sc. phys. (3) **10.** p. 303. 1883.
2) E. Warburg, Wied. Ann. **62.** p. 385. 1897.

Quecksilber. Ein durch den Kork gestecktes Stück Kupferdraht vermittelt die elektrische Zuleitung.

Durch den Schliff $S_2$ ist ein engeres Glasrohr luftdicht und isolirt eingeführt. Dieses Glasrohr läuft innerhalb der Kugel in einen aus dünnen Glasstäbchen gefertigten Rahmen aus. In einem Abstande von 27 mm sind auf ihm zwei Ebonitplättchen *e* befestigt, auf denen in 1 mm Abstand die beiden 0,1 mm dicken Anodendrähte *d* aus Platin befestigt sind. Durch die Federkraft des Glasrahmens werden die Drähte gespannt gehalten. Versuche hatten ergeben, dass bei Anwendung von *zwei* Anodendrähten die Wirkung weitaus am intensivsten ist. Durch einen angelöteten stärkeren Platindraht wird die Verbindung der Anode nach aussen vermittelt. Gegenüber der Kathode befindet sich an der Kugel ein Tubus, der zur Aufnahme der Quarzlinse *L* dient. Durch sie wird das einfallende Licht auf *K* concentrirt. Der untere Ansatz endlich enthält etwas $P_2O_5$ und dient gleichzeitig zur Befestigung der Zelle an der Fernrohralhidade des Spectrometers II.

Im Innern ist die Kugel versilbert und die Silberschicht durch den eingeschmolzenen Draht *p* zur Erde geleitet, da sich sonst die Anode durch Oberflächenleitung von der Kathode her laden würde. Aus demselben Grunde befindet sich aussen bei *p* ein abgeleiteter Stanniolring. Entladungen von der Schraube nach den Wänden des Schliffes $S_1$ werden durch ein übergeschobenes, durch eine Spiralfeder gegen die Ebonitmutter angedrücktes Glasrohr vermieden. Damit man ungehindert in die Zelle hineinsehen kann, reicht die Versilberung nur so weit, wie in Fig. 2 durch die punktirte Linie angedeutet ist.

Durch einen (in der Figur nicht gezeichneten) Hahn wurde die Zelle evacuirt und mit Wasserstoff gefüllt. Als günstigster Druck erwies sich ein solcher von 200 mm Quecksilber.

Ein besonderer Vorzug der Zelle ist der, dass man ihre Empfindlichkeit ohne Aenderung des Kathodenpotentiales mit Hülfe der Mikrometerschraube in beliebigen Grenzen variiren kann. Solche Empfindlichkeitsänderungen werden durch die sehr verschiedenen Intensitäten in einem discontinuirlichen Spectrum notwendig. Bei einer mittleren Empfindlichkeit betrug der Abstand zwischen Kathode und Anode etwa 5 mm.

Die Ladung der Kathode erfolgte durch eine Hoch-

spannungsbatterie und betrug etwa 2040 Volt. Von der Anode ging eine Leitung zum Elektrometer mit einer Abzweigung zur Erde durch einen aus $CdJ_2$ in Amylalkohol und Xylol bestehenden Widerstand. Die Grössenordnung derselben war $10^8$ Ohm.

#### 4. Elektrometer.

Zur Bestimmung der lichtelektrischen Intensitäten diente ein Thomson'sches Quadrantelektrometer mit bifilarer Nadelaufhängung und geringer Dämpfung. Bei 2 m Scalenabstand betrug die Empfindlichkeit pro Volt 60 Sct. zu 2 mm. Die Ablesungen beziehen sich auf die Umkehrpunkte des ersten Ausschlages der Nadel.

Die Elektrometernadel hatte eine Hülfsladung von 1200 Volt. Es führte zu dem Zwecke vom negativen Pol der Batterie ein sehr hoher, innerhalb gewisser Grenzen veränderlicher Widerstand zur Erde. An einer passenden Stelle ging von diesem Widerstande eine Abzweigung zur Elektrometernadel.

Das Kathodenpotential wurde mit einem Righi'schen Elektrometer beobachtet.

#### 5. Ausführung der Messungen.

Zwischen dem Prisma $P_1$ und der Linse (3) war eine 20,45 cm lange, 41,5 mm weite Glasröhre $A$ auf einem Schlitten verschiebbar angebracht, in der Weise, dass sie durch Schnurlauf in den Strahlengang eingeschaltet oder daraus entfernt werden konnte. An beiden Enden waren ca. 4 mm dicke Quarzplatten luftdicht aufgekittet. Durch ein seitliches Ansatzrohr mit Hahn konnte das Rohr evacuirt bez. mit Gasen gefüllt werden.

Die Vergleichung der Elektrometerausschläge bei Ein- und Ausschaltung der evacuirten Röhre ergab zunächst die Extinction durch die Quarzplatten bei verschiedenen Wellenlängen in Procenten. In gleicher Weise wurde nach Füllung der Röhre mit dem betreffenden Gase die Extinction von Quarz plus Gas ermittelt. Zur Controle wurde am Schluss die Messung mit der evacuirten Röhre wiederholt. Daraus ergeben sich die Absorptionscoefficienten wie folgt:

Ist $J_0$ (nach obigem gleich 100) die Intensität des Lichtes vor dem Eintritt in das Absorptionsgefäss, sind ferner $p_1$

und $p_1$ die Schwächungsfactoren der beiden Verschlussplatten, $p_3$ der Schwächungsfactor des Mediums in der Röhre, so ist die Intensität des die Röhre verlassenden Lichtes $J_0 p_1 p_2 p_3$. Ist die Röhre evacuirt, so hat das austretende Licht die Intensität $J_0 \cdot p_1 p_2$.

$J_0 \cdot p_1 p_2$ und $J_0 \cdot p_1 p_2 p_3$ sind aus den Messungen bekannt, daher auch $p_3$. Die Absorptionscoefficienten $\alpha$ berechnen sich aus

$$p_3 = e^{-\alpha d},$$

wo $d$ die Dicke der absorbirenden Schicht, also in diesem Falle 20,45 cm ist.

Alle für Gase berechneten Absorptionscoefficienten beziehen sich auf 0° C. und 760 mm Druck.

### 6. Resultate.

#### a) Atmosphärische Luft. $p = 747$; $t = 14°$.

Trockene, $CO_2$-freie Luft absorbirte bei $\lambda = 186$ $\mu\mu$ 8,8 Proc. Daraus folgt:

$$\alpha = 0{,}00447.$$

Bei längeren Wellen ($\lambda = 193$) konnte mit Sicherheit keine Absorption mehr nachgewiesen werden.

#### b) Kohlendioxyd. $p = 750$; $t = 15°$.

Die Kohlensäure wurde im Kipp'schen Apparat aus Marmor und reiner Salzsäure entwickelt, mit Sodalösung gewaschen und mit $P_2O_5$ getrocknet.

Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

| $\lambda$ | Absorption in Proc. | $\alpha$ |
|---|---|---|
| 186 | 13,6 | 0,00574 |
| 193 | 4,0 | 0,00213 |
| 200 | 1,8 | 0,00079 |

#### c) Sauerstoff. $p = 759$; $t = 18{,}5°$.

Aus einer Mischung von $KClO_3$ und $Fe_2O_3$ wurde der Sauerstoff durch Erhitzen in einem Rohr aus böhmischem Glase entwickelt und zur Reinigung durch Wasser, Natronkalk und Phosphorpentoxyd geleitet.

Es wurden folgende Mittelwerte erhalten:

| $\lambda$ | Absorption in Proc. | $\alpha$ |
|---|---|---|
| 186 | 32,5 | 0,02057 |
| 193 | 6,2 | 0,00336 |
| 200 | — | — |

d) Stickstoff.

Aus dem Mengenverhältnis der Bestandteile der atmosphärischen Luft und den Absorptionscoefficienten für Luft und Sauerstoff bei $\lambda = 186$ ergiebt eine angenäherte Rechnung für Stickstoff eine Absorption von 2,1 Proc.

Durch einen besonderen Versuch sollte das bestätigt werden.

Zunächst wurde Stickstoff in üblicher Weise aus Natriumnitrit und Ammoniumsulfat dargestellt, mit Wasser gewaschen, über Natronkalk geleitet und mit $P_2O_5$ getrocknet. Die Messung lieferte unerwarteter Weise bei 186 $\mu\mu$ für die Absorption 14,3 Proc. Obgleich zur Stickstoffbereitung chemisch reine Präparate (Kahlbaum) genommen waren, enthielt der so gewonnene Stickstoff eine Verunreinigung. Eine genaue Prüfung mit Jodkaliumstärkekleister und mit Antipyrin, die sich erst bei Zutritt von Sauerstoff färbten, ferner mit Ferrosulfat ergab als solche NO.

Vorläufig wurde daher zur Untersuchung atmosphärischer Stickstoff, erhalten durch Ueberleiten von Luft über glühendes Kupfer, herangezogen. Dieser Stickstoff absorbirte in der That bei $\lambda = 186$ 2,2 Proc. entsprechend einem Werte von $\alpha = 0{,}00110$.

e) Stickoxyd. $p = 600$; $t = 18°$.

Die zu Anfang an Stickstoff gemachten Erfahrungen liessen für Stickoxyd ein besonders starkes Absorptionsvermögen vermuten. Dies war noch experimentell zu beweisen.

Reines NO wurde erhalten durch Erwärmen einer Lösung von Stickoxyd aus Kupfer und Salpetersäure in Ferrosulfat. Zur Vermeidung von Oxydation waren vor der Füllung des Absorptionsrohres alle in Frage kommenden Teile des Apparates mit Wasserstoff ausgespült. In der That zeigte das Gas bei

Prüfung mit einem stark dispergirenden Spectroskop im sichtbaren Spectrum keine Spur von dunklen Linien.

Das Ergebnis der Messung war folgendes:

| λ | Absorption in Proc. | α | λ | Absorption in Proc. | α |
|---|---|---|---|---|---|
| 186 | — | — | 240 | 30,5 | 0,02406 |
| 193 | — | — | 250 | 4,7 | 0,00318 |
| 200 | 88,4 | 0,14932 | . | . | . |
| 210 | 76,3 | 0,09526 | . | . | . |
| 220 | 72,0 | 0,08424 | . | . | . |
| 230 | 54,6 | 0,05223 | 300 | 1,2 | 0,00083 |

Die in die Versuchsresultate eingehenden etwaigen Fehler sind in der Dissertation behandelt.

### f) Wasser.

Für die Versuche mit Wasser wurden mir aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt vier ausgezeichnete Quarzplatten von 5 cm Durchmesser und 1 mm Dicke, sowie ein sehr exact gearbeiteter Trog von 20 mm Dicke und 4 cm lichter Weite mit Fassung zur Verfügung gestellt, wofür ich Hrn. Präsident Kohlrausch und Hrn. Prof. Lummer zu grossem Dank verpflichtet bin. Die Endflächen des Troges waren genau planparallel und auspolirt, sodass die Platten keiner Kittung bedurften.

Zur Herstellung eines zweiten Absorptionsgefässes wurde aus einer ausgesuchten, 3,03 mm dicken Spiegelglasplatte mit fast genau planparallelen Flächen ein 4 cm weites Loch und ein als Einguss dienender Schlitz ausgeschnitten. Auch dieses Gefäss brauchte nicht gekittet zu werden.

Nachdem die Tröge 24 Stunden mit destillirtem Wasser gestanden hatten, wurden sie nach wiederholtem Ausspülen mit frisch destillirtem Wasser gefüllt und sofort die Absorption der 16,97 mm dicken Wasserschicht gemessen. Es ergab sich:

| λ | Absorption in Proc. |
|---|---|
| 186 | 71,5 |
| 193 | 48,3 |
| 200 | 31,8 |

Am nächsten Morgen, nachdem das Wasser in den Trögen über Nacht gestanden hatte, absorbirte es bei 200 $\mu\mu$ 70,6 Proc. Danach musste sich etwas von den Wänden der Tröge gelöst haben, und diese Lösung musste ein ungemein starkes Absorptionsvermögen haben. Da es sich nur um die Substanz des Glases handeln konnte, wurde künstlich eine wässrige Lösung von Thüringer Glas hergestellt, diese mit dem zehnfachen Volumen Wasser verdünnt und die Absorption gemessen. Sie fand sich für $\lambda = 200$ $\mu\mu$ zu 34,3 Proc. Reines Wasser absorbirt bei dieser Wellenlänge nicht über 14,2 Proc.

Constante Zahlen konnten erhalten werden mit Wasser, welches in einen Kolben aus sogenanntem Hartglas (von Schott und Gen. in Jena) nach Beseitigung der zu Anfang übergehenden Teile destillirt war. Die Absorption nahm nicht merklich zu, auch wenn das Wasser 48 Stunden im Hartglaskolben gestanden hatte. Für jede einzelne Wellenlänge, bei der Messungen stattfanden, wurden die Tröge mit neuem Wasser beschickt.

Es wurden folgende Werte gefunden:

| $\lambda$ | Absorption in Proc. | $\alpha$ | $\lambda$ | Absorption in Proc. | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 186 | 68,9 | 0,06884 | 230 | 5,6 | 0,00338 |
| 193 | 24,5 | 0,01653 | 240 | 5,2 | 0,00316 |
| 200 | 14,2 | 0,00899 | 260 | 4,2 | 0,00254 |
| 210 | 9,8 | 0,00610 | 300 | 2,5 | 0,00151 |
| 220 | 9,2 | 0,00567 | | | |

Graphische Darstellung vgl. Fig. 3.

Obwohl wiederholte Messungen bei ein und derselben Wellenlänge zu verschiedenen Zeiten übereinstimmende Resultate gaben, würde ich doch die Behauptung, die oben angegebenen Zahlen seien die Absorptionscoefficienten des *reinen* Wassers, für gewagt halten. Letztere sind vielleicht ein wenig kleiner, jedenfalls nicht grösser als jene.

Um schliesslich einen Anhalt zu bekommen, was für Bestandteile des Glases für die starke Absorption in Frage kommen können, wurden Lösungen von KHO und NaHO von 0,01 Proc Gehalt bei $\lambda = 200$ $\mu\mu$ auf Absorption geprüft. Die KHO-

Lösung absorbirte 76,4 Proc. und die NaHO-Lösung 82,7 Proc. Die naheliegende Vermutung, dass sich aus dem Glase Alkali gelöst habe, wird hierdurch bestätigt. Berliner Leitungswasser absorbirte bei 200 $\mu\mu$ 82,6 Proc.

Zum Schluss ist noch eine etwaige Fehlerquelle in der Versuchsanordnung zu behandeln.

Die Spectrometer waren mit Na-Licht focurirt worden. Die Brennweiten für ultraviolettes Licht sind aber beträchtlich

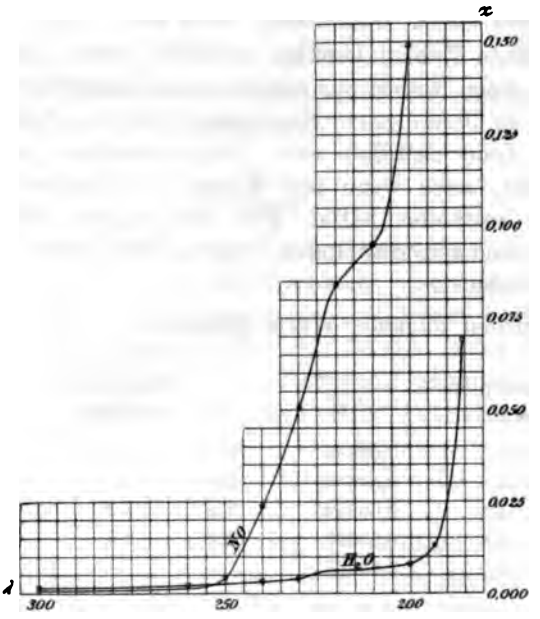



Fig. 3.

kürzer als für sichtbares. Zur genauen Einstellung der ultravioletten Brennweiten hätten sämtliche Objective eine exacte Einstellvorrichtung haben müssen. Da sich solche an den vorhandenen Apparaten nicht gut anbringen liess, und ausserdem die Einjustirung mit Na-Licht einer häufigen Controle bez. Correction bedurfte, musste der erwähnte Uebelstand mit in den Kauf genommen werden.

Die Absorptionscurven (Fig. 3), namentlich die des Wassers zwischen $\lambda = 186$ und 193 $\mu\mu$ lassen indessen vermuten, dass

bedeutendere Fehler durch die mangelhafte Focusirung nicht verursacht wurden.

Die vorliegenden Arbeiten wurden im physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt. Dem Leiter des Institutes, Hrn. Prof. Dr. E. Warburg, bin ich für die Anregung und stete Teilnahme bei diesen Untersuchungen zu grossem Danke verpflichtet.

Berlin, Physik. Institut, Juli 1901.

(Eingegangen 8. August 1901.)

## 14. *Werte der erdmagnetischen Elemente zu Potsdam für das Jahr 1900, sowie der Säcular-variationen für die Zeit von 1890 bis 1900;* *von M. Eschenhagen.*

(Mitgeteilt vom Magnetischen Observatorium des Königl. Preuss. Meteorologischen Instituts.)

Die aus den stündlichen Werten aller Tage der photographisch registrirten magnetischen Elemente, Declination, Horizontalintensität und Verticalintensität sind für das Jahr 1900 folgende Mittelwerte abgeleitet worden:

| Element: | Werte für 1900: | Aenderungen gegen 1899: |
|---|---|---|
| Declination: | 9° 56,3′ West | Abnahme 4,4′ |
| Horizontalintensität: | 0,18844 C.G.S. | Zunahme 0,00026 C.G.S. |
| Verticalintensität: | 0,43466 C.G.S. | Zunahme 0,00074 C.G.S. |
| Inclination: | 66° 33,7′ Nord | Zunahme 0,4′ |
| Totalintensität: | 0,47375 C.G.S. | Zunahme 0,00078 C.G.S. |

Die Sicherheit der angegebenen Zahlen dürfte für die beiden ersten Elemente eine befriedigende, weniger gut für die drei letzten Elemente sein. Um ein besseres Urteil über die Säcularvariation zu bieten, seien nachstehend die Werte derselben angegeben, wie sie, in gleicher Weise wie die obigen, seit dem elfjährigen Bestehen des Observatoriums erhalten worden sind. Dieselben sind für Declination und Inclination in Bogenminuten, für die übrigen Elemente in Einheiten der fünften Decimalstelle, C.G.S. (neuerdings mit dem Buchstaben $\gamma$ bezeichnet), angegeben, wobei das Vorzeichen + eine Zunahme, − eine Abnahme bezeichnet. (Vgl. p. 425, Tabelle der Säcularvariation für 1890—1900.)

Man ersieht aus diesen Zahlen und noch besser aus der Reihe der absoluten Werte der Elemente, wenn man dieselben in einer Curve aufträgt, dass die jährliche Abnahme bei Declination und Inclination sich im Laufe des letzten Decenniums in Potsdam verringert, die jährliche Zunahme der Horizontalintensität sich etwas vermehrt hat, jedoch erscheint der Zeitraum von 10 Jahren noch nicht lang genug, um diese Aenderung

Tabelle der Säcularvariation für 1890—1900.

| Element: | 1890/91: | 91/92: | 92/93: | 93/94: | 94/95: | 95/96: | 96/97: | 97/98: | 98/99: | 99/00: | Mittel 1890—1900: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Declination: | −6,5′ | −6,0′ | −4,9′ | −5,9′ | −5,5′ | −5,6′ | −4,6′ | −4,7′ | −4,8′ | −4,4′ | −5,23′ |
| Horizontalintensität: | +19 | +10 | +31 | +18 | +26 | +26 | +29 | +19 | +24 | +26 | +22,7 |
| Verticalintensität: | −85 | +40 | +43 | −16 | −16 | +12 | −6 | +10 | −16 | +74 | + 3,9 |
| Inclination: | −3,4′ | +0,5′ | −0,8′ | −1,7′ | −2,2′ | −1,4′ | −2,1′ | −1,0′ | −2,0′ | +0,4′ | − 1,38 |
| Totalintensität: | −70 | +40 | +52 | −7 | −5 | +21 | +6 | +17 | −6 | +78 | +12,7 |

Variation der mittleren jährlichen Amplituden der drei Hauptelemente im elfjährigen Zeitraum.

| | | 1890: | 1891: | 1892: | 1893: | 1894: | 1895: | 1896: | 1897: | 1898: | 1899: | 1900: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Declination: | Winter | 5,42′ | 6,38′ | 7,05′ | 7,02′ | 7,32′ | 7,45′ | 6,59′ | 5,73′ | 5,57′ | 5,14′ | 4,60′ |
| | Sommer | 9,12 | 10,89 | 11,81 | 13,17 | 12,23 | 11,95 | 10,89 | 9,61 | 9,55 | 9,12 | 8,97 |
| Horizontalintensität: | Winter | 16,6 | 21,0 | 24,4 | 28,3 | 24,6 | 23,3 | 19,3 | 17,4 | 14,9 | 15,3 | 14,4 |
| | Sommer | 29,3 | 36,1 | 47,2 | 47,9 | 49,1 | 44,1 | 39,9 | 42,4 | 34,9 | 33,3 | 27,4 |
| Inclination: | Winter | 0,99 | 1,34 | 1,71 | 1,79 | 1,51 | 1,51 | 1,20 | 1,06 | 0,90 | 0,94 | 0,85 |
| | Sommer | 1,66 | 2,14 | 2,70 | 2,71 | 2,32 | 2,46 | 2,23 | 1,87 | 1,90 | 1,93 | 1,58 |
| Summe d. Störungen der drei Elemente: | | 728 | 1687 | 2880 | 1447 | 2483 | 2106 | 1962 | 1693 | 2477 | 2657 | 874 |

als quadratisches Glied hinreichend sicher zu ermitteln, um so weniger als dann verfrühte Folgerungen für das Eintreten von Umkehrpunkten daraus abgeleitet werden würden. Vorläufig würde man also, wenn man sich mit einer linearen Formel begnügt, mit der mittleren Säcularvariation zu rechnen haben, und die sicheren Werte des Jahres 1900 als Ausgangspunkt nehmend, folgende Gleichungen ableiten:

$$\text{Declination:} \quad D_x = 9^\circ\,56{,}3' + 5{,}2'\,(1900 - x),$$

$$\text{Horizontalintensität:} \quad H_x = 18844 - 22{,}7\,(1900 - x),$$

$$\text{Inclination:} \quad J_x = 66^\circ\,33{,}7' + 1{,}4'\,(1900 - x).$$

Für die Vertical- und Totalintensität ist es bei der Unsicherheit der Säcularänderung am geratensten, nur mit den Mittelwerten des elfjährigen Zeitraumes 0,43404 bez. 0,47270 zu rechnen.

Die mittleren jährlichen Amplituden der drei Hauptelemente variirten in dem elfjährigen Zeitraum wie die auf p. 425 gegebenen Reihen zeigen.

Die Zahlen bieten dem Physiker ein Bild, welche regelmässigen täglichen Veränderungen jener drei Elemente nach Jahreszeit und Jahr zu erwarten sind; die Abhängigkeit von der Sonnenfleckenperiode ist deutlich ausgeprägt und bedarf einer besonderen Untersuchung. Die Zahl der Störungen dürfte durch ein subjectives Element beeinflusst sein. Ein Bild des regelmässigen täglichen Verlaufes nach Stundenwerten ist in dem Bericht über das Jahr 1896 [1]) gegeben. Man kann noch hinzufügen, dass bei magnetischen Stürmen die Abweichungen eines Elementes von seinem normalen Werte den zehnfachen Betrag der oben angegebenen Amplituden, wenn auch nur in seltenen Fällen, erreichen können.

Weiter ist noch für das Jahr 1900 zu erwähnen, dass Störungen von längerer Dauer und erheblichem Betrage (Charakter 4 oder 5 der Scala, in welcher 0 ganz ruhige Curven, 5 stärkste Störungen bedeuten) an folgenden Tagen stattfanden:

19. Januar, 4. Februar, 8., 9. u. 13. März, 5. Mai.

1) M. Eschenhagen, Wied. Ann. **61.** p. 411. 1897.

Die Zahl der Stunden, an welchen überhaupt Störungen einschliesslich der von kürzerer Dauer auftraten (Charakter 3—5 der obigen Scala), betrugen in Declination 245, in Horizontalintensität 435, in Verticalintensität 194.

Die magnetische Landesaufnahme erstreckte sich im Sommer 1900 auf 54 Stationen, welche sämtlich durch Hrn. Dr. Edler erledigt wurden. Nunmehr ist die magnetische Vermessung des östlich von einer Linie Lübeck-Potsdam-Görlitz gelegenen Teiles des Königreichs Preussen beendet und auch in der Rechnung nahezu fertig gestellt.

Der seitens der Institutsleitung gegen die Benutzung der Erde in der Nähe des Observatoriums zu Starkstromleitungen erhobene Widerspruch hat zur Folge gehabt, dass die Stadt Potsdam ihre elektrische Centrale mit Drehstrombetrieb einrichtet, während die elektrische Strassenbahn in Potsdam, welche mit Gleichstrom arbeiten soll, eine doppelpolige, gegen die Erde isolirte Oberleitung anlegen wird. Auf diese Weise dürfte das Observatorium gegen die störenden Einflüsse vagabondirender Erdströme nach Möglichkeit gesichert und eine Verlegung desselben voraussichtlich nicht erforderlich sein.

(Eingegangen 19. Juli 1901.)

## 15. *Ueber quecksilbergedichtete Hähne;* *von Hermann Thiele und Moritz Eckardt.*

Die Zahl der Hahnconstructionen, welche eine *absolute* Dichtung durch Quecksilber bezwecken, ist eine relativ grosse. Zum Teil sind es wohl die Fortschritte gasanalytischer Methoden, speciell der zur Gewinnung der Edelgase dienenden, welche eine bessere Dichtung als die durch einen gewöhnlichen Glashahn gewährleistete fordern. Die uns bekannten Constructionen bieten jedoch nur gegen das Eindringen der Luft von aussen her Garantie, versagen aber ihren Dienst, wenn es sich darum handelt, jede Möglichkeit des Eindringens von Gas auch durch die Bohrung auszuschliessen.

Handelt es sich nur darum, den Hahn gegen aussen zu dichten, so ist diese Aufgabe relativ einfach lösbar. Am einfachsten erreicht man dies durch Einsetzen des ganzen Hahnes in Quecksilber. Man kann leicht jeden gewöhnlichen Hahn in einen derartigen nach aussen quecksilbergedichteten verwandeln, wenn man ihn mit einem kleinen, zur Aufnahme des Quecksilbers dienenden Behältnisse umgiebt. Sehr leicht lässt sich dies aus Kork (vgl. Fig. 1) herstellen.

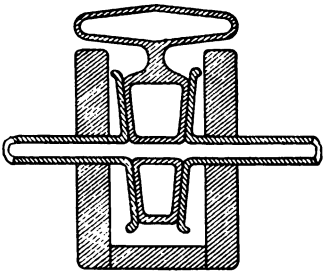


Fig. 1.

Man bohrt durch einen grossen Kork mit dem Korkbohrer ein Loch, welches einige Millimeter grösser als der Hahnmantel ist, fügt den entsprechend verkürzten Ausschnitt wieder als Boden ein, kocht das Ganze in Paraffin, scheidet für Zu- und Ableitungsrohr entsprechende Streifen aus dem Mantel aus und kittet dieselben nach Einsetzen des Hahnes wieder mit Paraffin ein. In der Richtung der Bohrung ist dieser Hahn ebenso wenig wie ein gewöhnlicher dicht. Durch schräge Bohrung lässt sich

wohl ein höherer Grad von Dichtung erzielen, *absolut* dicht wird er aber auch hierdurch *nicht*.

Die Hauptursache der Undichtigkeit in der Längsaxe wird ja bekanntlich durch feine, je nach der Behandlung und Qualität des Schliffes mehr oder minder bemerkbare, kreisförmig um das Kücken laufende Rillen hervorgerufen. Bei schräggebohrten Hähnen wird der Weg, den das Gas durch diese capillaren Rillen zurückzulegen hat, grösser und die Dichtung infolge dessen eine vollkommenere. Ganz aufgehoben wird aber durch die Schrägbohrung der Durchgang der Gase nicht. Aus diesem Grunde bietet auch die von Göckel[1]) vorgeschlagene dreifache Hahndichtung keine Gewähr für einen absolut gasdichten Verschluss. Das Gas geht einfach vom Eintrittsrohr durch die erste Rille zur Bohrung, dann durch die Bohrung und durch die zweite Rille zur Austrittsöffnung des Hahnes. Der Weg ist ziemlich lang, (er beträgt fast einen ganzen Kreisumfang,) denselben Weg müssen aber die Gase auch bei jedem anderen schräggebohrten Hahne nehmen, wenn sie durch die Rillen wandern wollen.

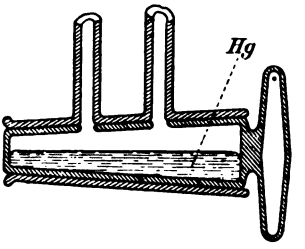


Fig. 2.

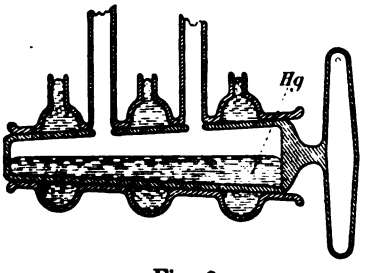


Fig. 3.

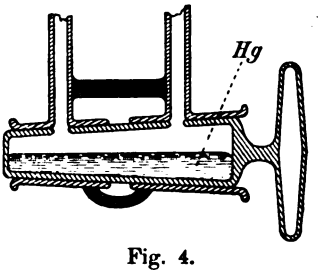


Fig. 4.

Will man sich gegen die durch die Rillen veranlasste Undichtigkeit schützen, so muss man die *Rillen* selbst durch *Quecksilber* verschliessen. Dies erreicht man am einfachsten durch die in Fig. 2 wiedergegebene Anordnung, welche wohl einer Erklärung nicht bedarf.

1) Göckel, Zeitschr. f. angew. Chemie p. 1238. 1900.

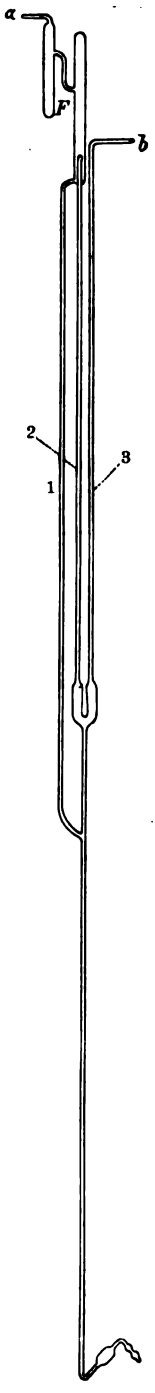



*Fig. 5.*

Wenn man will, kann man diesen Hahn natürlich mit Quecksilbernuten versehen. Diese Nuten müssen aber entsprechend gross sein, damit sich das Quecksilber trotz der Capillarwirkungen gut an das Glas anlege. Man verlegt diese Nuten wohl besser in den Hahnmantel (vgl. Fig. 3) oder man schneidet den Hahnmantel in der Mitte auseinander und taucht ihn ganz unter Quecksilber (vgl. Fig. 4).

Die *vollkommenste* Hahnverbindung wird natürlich erreicht, wenn man auf den gewöhnlichen Hahn ganz verzichtet und die Dichtung ausschliesslich durch Quecksilber bewerkstelligt. Eine derartige Hahnconstruction ist durch Fig. 5 wiedergegeben. Das Gas strömt von *b*, dem Raum mit grösserem Drucke nach *a*, dem angeschmolzenem[1]) Raum mit niederem Drucke, nachdem es eine, der Druckdifferenz zwischen *b* und *a* entsprechend hohe Quecksilbersäule durch die Capillare 2 transportirt und in *F* abgesondert hat. Soll der Hahn auch in umgekehrter Richtung benutzbar sein, so müsste eine Quecksilberfalle (*F*) auch bei *b* angeschmolzen werden.

1) Derartige Anschmelzungen sind auch bei relativ complicirten Apparaten *ohne* erhebliche Schwierigkeiten ausführbar, wenn man die zusammenzuschmelzenden Apparatenteile vorher an den definitiven Platz durch mit Kork ausgefütterte Muffen, Gyps etc. endgültig befestigt, dann durch Biegen über der leuchtenden Flamme die frisch abgeschnittenen Rohrenden in die gewünschte Stellung bringt und dieselben unter gelindem Druck durch Erhitzen mit der Gebläseflamme und entsprechendes Verblasen zusammenschmilzt.

Es gelang uns auf diese Weise ohne wesentliche Schwierigkeiten über 25 m Glasrohr zu einem einzigen verschmolzenen Apparate zu vereinigen. Diese Methode des „Lötens am Ort" wird nach unserer Meinung bei der Zusammensetzung complicirterer Glasapparate noch viel zu wenig geübt.

Durch entsprechendes Senken des Niveaus hat man es ganz in der Gewalt, grosse oder kleine Gasblasen von *b* nach *a* übertreten zu lassen oder auch die Communication zwischen *a* und *b* herzustellen.

Ein manchmal wesentlicher Vorteil dieses Apparates liegt auch darin, dass Verunreinigungen der Gase durch *Fettdämpfe etc. ausgeschlossen* sind.

(Eingegangen 22. Juli 1901.)

## 16. *Berichtigung; von J. Zenneck.*

In Band 5, Seite 708 sollen die Gleichungen (3) heissen:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{i1} = a_{i2} = \ldots a_{i,\,i-1} = a_{i,\,i+1} = \ldots = a_{in} = 0, \\ c_{i1} = c_{i2} = \ldots c_{i,\,i-1} = c_{i,\,i+1} = \ldots = c_{in} = 0, \end{cases}$$

nicht:

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 = a_2 = \ldots a_{i-1} = a_{i+1} = \ldots = a_n = 0, \\ c_1 = c_2 = \ldots c_{i-1} = c_{i+1} = \ldots = c_n = 0. \end{cases}$$

Seite 715, Zeile 18 u. 19:

$$c_{ik} \cdot \psi_i \cdot \psi_k = \int F_i \cdot s_k \cdot \cos(F_i, s_k) \cdot \varrho \, d\tau$$
$$= \int F_k \cdot s_i \cdot \cos(F_k, s_i) \cdot \varrho \, d\tau,$$

nicht:

$$c_{ik} \cdot \psi_i \cdot \psi_k = \int F_i \cdot \psi_k \cdot \cos(F_i, \psi_k) \cdot \varrho \, d\tau$$
$$= \int F_k \cdot \psi_i \cdot \cos(F_k, s_i) \cdot \varrho \, d\tau.$$

In den Anmerkungen ist überall J. J. Thomson durch W. Thomson zu ersetzen.

(Eingegangen 31. Juli 1901.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1901. № 11.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 6.

## 1. *Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes; von Peter Lebedew.*

Bei der Aufstellung seiner elektromagnetischen Lichttheorie hat Maxwell (1873) auch diejenigen Kräfte mit in Betracht gezogen, welche als ponderomotorische Kräfte in einem elektrisch oder magnetisch polarisirten Medium auftreten; als eine notwendige Consequenz seiner Theorie ergiebt es sich, dass diese Kräfte in einem Strahlenbündel auftreten müssen, und Maxwell[1]) sagt:

„Es wirkt in einem Medium, in welchem eine Welle sich fortpflanzt, in der Richtung der Fortpflanzung ein Druck, der an jeder Stelle numerisch ebenso gross ist, wie die daselbst vorhandene, auf Volumeneinheit bezogene Energie."

Auf die Ableitung dieser Maxwell'schen Druckkräfte der elektromagnetischen Strahlung sind neuerdings Heaviside[2]), Lorentz[3]), Cohn[4]) und Goldhammer[5]) näher eingegangen.

Auf einem ganz anderen Wege, und wie es scheint ohne Maxwell's Resultat zu kennen, ist Bartoli (1876)[6]) zu dem nämlichen Schlusse gelangt: er giebt Kreisprocesse an, welche es gestatten sollen, durch bewegte Spiegel die strahlende Energie von einem kälteren Körper auf einen wärmeren zu übertragen und berechnet die hierbei nach dem zweiten Hauptsatze zu leistende Arbeit. Die Notwendigkeit einer Arbeits-

1) J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus § 792. Deutsch von B. Weinstein, Berlin 1883.

2) O. Heaviside, Elektromagnetic Theorie 1. p. 334. London 1893.

3) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern p. 29. Leiden 1895.

4) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 543. Leipzig 1900.

5) D. Goldhammer, Ann. d. Phys. 4. p. 834. 1901.

6) A. Bartoli, Exner's Rep. d. Phys. 21. p. 198. 1884, übersetzt aus Nuovo Cimento 15. p. 195. 1883.



433

leistung bei der Verschiebung der Spiegel gegen die Richtung der auffallenden Strahlung zwingt zu der Annahme von Druckkräften, welche von dieser Strahlung auf den Spiegel ausgeübt werden. Bartoli berechnete die Grösse dieser Druckkräfte; sein Resultat stimmt mit dem von Maxwell gewonnenen vollkommen überein.

Dem von Bartoli eingeschlagenen Wege folgte Boltzmann[1]) und nachher Fürst Galitzin[2]) und Guillaume[3]) bei der Berechnung der Druckkräfte, welche von der Strahlung ausgeübt werden; Drude[4]) hat diese Methode auf absolut schwarze Körper ausgedehnt.

Fällt ein Bündel paralleler Strahlen normal auf eine ebene Fläche, so ist die Grösse dieses Maxwell-Bartoli'schen Druckes $p$ bestimmt, wenn die pro Zeiteinheit auffallende Energiemenge $E$, das Reflexionsvermögen $\varrho$ der Fläche und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V$ der Strahlung bekannt sind; es ist dann

$$p = \frac{E}{V}(1 + \varrho),$$

worin $\varrho$ zwischen 0 für einen absolut schwarzen und 1 für einen absolut spiegelnden Körper liegt.

Diese Druckkräfte sind sehr klein. Sowohl Maxwell als auch Bartoli haben berechnet, dass die Sonnenstrahlung, wenn sie normal auf 1 qm fällt, einen Druck ausübt, welcher für eine absolut schwarze Oberfläche 0,4 mg und für einen ebenen Spiegel 0,8 mg beträgt.

Vermutungen, dass solche Druckkräfte der Strahlung existiren müssen, sind bereits viel früher ausgesprochen worden. So glaubte Kepler (1619) die abstossende Kraft, welche die Sonne auf Kometenschweife ausübt, in den Druckkräften ihrer Strahlung suchen zu müssen, eine Anschauung, welche im Einklange mit der herrschenden Emissionstheorie des Lichtes stand und von Longomontanus (1622)[5]) eifrig vertreten wurde. Der nämliche Grund führte auch Euler (1746)[6]) dazu, der

1) L. Boltzmann, Wied. Ann. 22. p. 33, 291 u. 616. 1884.

2) B. Galitzin, Wied. Ann. 47. p. 479. 1892.

3) Ch. Ed. Guillaume, Archives des Sc. phys. et natur. de Genève 31. p. 121. 1894.

4) P. Drude, Lehrbuch der Optik p. 447. Leipzig 1900.

5) Vgl. hierüber weiter unten bei De Mairan, p. 355—356.

6) L. Euler, Histoire de l'Academie Royale de Berlin 2. p. 121. 1746.

Sonnenstrahlung Druckkräfte zuzuschreiben und er versuchte die Notwendigkeit solcher Druckkräfte aus der als longitudinale Schwingungen betrachteten Lichtbewegung zu begründen.

De Mairan (1754)[1]) hat zusammen mit Du Fay sehr interessante Versuche gemacht, diese Vermutungen experimentell zu prüfen, erkannte aber bald, dass die störenden Erwärmungen der umgebenden Luft keinen sicheren Nachweis der directen ponderomotorischen Kräfte des Lichtes zulassen; für die Hülfsmittel des XVIII. Jahrhunderts verdienen die Experimente De Mairan's die grösste Bewunderung. Solche Versuche hat auch A. Fresnel (1825)[2]) unternommen und ist gleichfalls auf dieselben Schwierigkeiten gestossen; eine eingehende Untersuchung ähnlicher Erscheinungen führte Crookes[3]) auf die Entdeckung der radiometrischen Kräfte.

Die Anwendungen, welche die Maxwell-Bartoli'schen Druckkräfte der Strahlung sowohl in der Physik als auch in der Astronomie erlangen können, lassen eine experimentelle Untersuchung dieser Kräfte durchaus wünschenswert erscheinen, da die theoretischen Ableitungen, sowohl die nach Maxwell als auch die nach Bartoli sich auf gewisse einfache Eigenschaften der absorbirenden und reflectirenden Flächen stützen und es noch fraglich erscheinen könnte, ob durch diesen Eigenschaften *allein* die auftretenden ponderomotorischen Kräfte auch für *Licht*strahlen bestimmt werden. Diese Fragen können nur durch weitere ergänzende Untersuchungen erledigt werden; am einfachsten führt hierbei zum Ziele ein directer Versuch.

Die Bemühungen, welche Zöllner[4]) und Bartoli (l. c. p. 205) in dieser Richtung gemacht haben, haben kein positives Resultat ergeben; deshalb habe ich die weiter folgende experimentelle Untersuchung der Druckkräfte des Lichtes unternommen.[5])

1) De Mairan, Traité physique et historique de l'Aurore Boréale (Seconde Edition) p. 371. Paris 1754.

2) A. Fresnel, Ann. de Chim. et de Phys. (2) **29.** p. 57 u. 107. 1825.

3) W. Crookes, Phil. Trans. **164.** p. 501. 1874; die einschlägige Litteratur ist hier ausführlich angegeben.

4) F. Zöllner, Pogg. Ann. **160.** p. 154. 1877.

5) Ein vorläufiger Bericht über diese Untersuchungen findet sich in *Rapports présentés au Congrès International de Physique à Paris* **2.** p. 133. 1900.

### I. Die Vorversuche.

In seinem Lehrbuch § 793 sagt Maxwell:

„Concentrirtes elektrisches Licht wird wahrscheinlich einen noch grösseren Druck ausüben (als die Sonnenstrahlung) und es ist nicht unmöglich, dass die Strahlen eines solchen Lichtes, wenn sie auf ein dünnes metallisches Blättchen, das in einem Vacuum fein aufgehängt ist, fallen, an diesem einen beobachtbaren mechanischen Effect ausüben."

Als ich meine Versuche beginnen wollte, schien mir die von Maxwell vorgeschlagene Versuchsanordnung aussichtslos, weil bereits Zöllner[1]) diesen Weg ohne Erfolg eingeschlagen und auch „darauf aufmerksam gemacht hat, dass der von Maxwell theoretisch erlangte Wert (des Lichtdruckes) ungefähr 100000 mal kleiner sei als der von Crookes in einem speciellen Falle beobachtete Wert der Resultate".[2]) Wenn man auch darauf rechnen konnte, diese störenden radiometrischen Wirkungen ganz erheblich zu verkleinern, so glaubte ich dennoch, dass nur eine solche Einrichtung zum Ziele führen könnte, in welcher diese radiometrischen Kräfte compensirt sind.

Bei der Untersuchung der radiometrischen Kräfte hat Schuster[3]) nachgewiesen, dass diese Kräfte innere Kräfte des Radiometers sind; Righi[4]) hat diesen Satz auf eine elegante Weise bestätigt: „Ich liess", sagt Righi, „ein Radiometer auf Wasser schwimmen, Kopf nach unten, sodass das Glashütchen der Mühle auf dem Rohre lag, welches die letztere verhindert, aus der Normalstellung herauszufallen, wodurch eine Reibung entstand, die das Drehen der Mühle hemmte. Als auf die Mühle ein intensives Strahlenbündel gerichtet wurde, habe ich nicht die geringste Drehung (des Radio-

1) F. Zöllner, l. c. p. 155.

2) Bei seiner Berechnung hat Zöllner die Energie der Gesamtstrahlung einer Kerze zu klein angenommen. Vergleicht man die von E. Nichols (Wied. Ann. 60. p. 405. 1897) beobachteten radiometrischen Kräfte, mit denen aus den Strahlungsmessungen von K. Ångström (Wied. Ann. 67. p. 647. 1899) für eine Hefnerlampe berechneten Maxwell-Bartoli'schen Druckkräften, so erhält man ein Verhältnis von ca. 10000.

3) A. Schuster, Phil. Mag. (5) 2. p. 313. 1876.

4) A. Righi, in wörtlicher Uebersetzung angeführt bei Bertin u. Garbe weiter unten p. 51.

meters) erhalten.“ Das nämliche Resultat erhielten auch Bertin und Garbe[1]) bei der Wiederholung dieser Versuche.

In folgender Weise habe ich die Versuchsanordnung von Righi für die Bestimmung der Maxwell-Bartoli'schen Druckkräfte des Lichtes verwendet: zwischen zwei kreisrunden, aus sehr dünnem Nickelblech gestanzten Deckeln war ein Stück Glimmer zu einem Cylinder gebogen und festgeklemmt — es bildete sich somit ein cylindrischer Radiometerkörper —, in welchem sich der mit der Hülle starr verbundene Flügel befand. Dieses Radiometer wurde in einem evacuirten Glasballon an einem Glasfaden aufgehängt: wurde das Licht einer Bogenlampe auf den Flügel gerichtet, so wurden stets Drehungen des Radiometers beobachtet[2]), welche ihrer Grössenordnung nach den Maxwell-Bartoli'schen Druckkräften entsprachen.[3])

Als ich bei diesen Versuchen vergleichsweise die Radiometerflügel für sich, *ohne* Glimmerhülle untersuchte, fand ich, dass die auftretenden radiometrischen Kräfte weit unter der von Zöllner angegebenen Grösse lagen und selbst eine wesentlich kleinere Störung darstellen, wie die bei der verhältnismässig sehr grossen Radiometerhülle auftretenden Störungen durch Convection. Ich habe deshalb diese Methode verlassen und die Versuche in der von Maxwell vorgeschlagenen einfachen Form aufgenommen.

### II. Die Versuchsanordnung und die Apparate.

Der Durchführung einer Untersuchung der Maxwell-Bartoli'schen Druckkräfte des Lichtes stellen sich zwei Schwierigkeiten in den Weg: die Störungen durch *Convection* und die auftretenden *radiometrischen* Kräfte. Bei den höchsten

1) Bertin et Garbe, Ann. de Chim. et de Phys. (5) **11.** p. 67. 1877.

2) Dass Righi, sowie Bertin und Garbe bei ihren Versuchen *keine* Wirkung der Maxwell-Bartoli'schen Druckkräfte beobachtet haben, liegt *nur* darin, dass ihre Versuchsanordnungen, auf die sehr viel grösseren radiometrischen Kräfte berechnet, für die Kräfte des Lichtes nicht empfindlich genug waren.

3) Die Ergebnisse dieser Vorversuche wurden in der Société Vaudoise in Lausanne den 17. Mai 1899 vorgetragen (Archives des Sc. phys. et nat. de Genève **8.** p. 184. 1899). Das rechtzeitige Erscheinen der dort angekündigten ausführlichen Note ist durch zufällige Ursachen verhindert worden und ist deshalb ausgeblieben.

Verdünnungen werden diese störenden Kräfte gering, müssen aber dennoch bei den Messungen berücksichtigt werden.

Die Störungen durch Convection entstehen dadurch, dass bei der Erwärmung der Flügels durch Belichtung die anliegenden Gaschichten sich gleichfalls erwärmen und eine langsam aufsteigende Strömung hervorrufen; hat die Ebene des Flügels auch nur eine geringe (kaum zu vermeidende) Neigung gegen die Verticalebene, so übt der aufsteigende Gasstrom auf den Flügel eine Drehung aus, welche *nur* von der Erwärmung, aber *nicht* von der Richtung, in welcher die erwärmenden Strahlen auffallen, abhängig ist. Diese Störung kann dadurch eliminirt werden, dass die Strahlen derselben Quelle abwechselnd auf die eine und auf die andere Seite des Flügels gerichtet werden.

Die Störung durch radiometrische Kräfte wurde dadurch auf ein Minimum reducirt, dass der Glasballon möglichst gross ($D = 20$ cm) genommen wurde[1]), alle Strahlen, welche von der Glaswand des Ballons absorbirt werden können, durch ein Strahlenfilter ausgeschlossen[2]), die Flügel des besseren Wärmeausgleichs wegen aus dünnem Metallblech verfertigt und überdies die Evacuirung[3]) mit Hülfe einer Quecksilberpumpe und Anwendung von Kältemischung möglichst hoch getrieben.

Sind die radiometrischen Kräfte klein, so kann die diesbezügliche Correction in folgender Weise berechnet werden: die radiometrischen Kräfte sind der Temperaturdifferenz zwischen der belichteten und der dunkeln Oberfläche des Flügels, oder für zwei Flügel aus gleichem Material und von gleicher Oberflächenbeschaffenheit, ihrer *Dicke* direct proportional[4]); machen wir gleichzeitige Beobachtungen an *zwei* gleichen Flügeln von sehr verschiedener Dicke, so können wir *berechnen*, eine wie grosse Ablenkung das Licht hervorrufen würde, wenn die Dicke

1) Vgl. W. Crookes, Phil. Trans. **170**. p. 113. 1879.

2) Vgl. W. Crookes, Phil. Trans. **168**. p. 266. 1878.

3) l. c. p. 300.

4) Bei unseren Versuchen war die Temperaturdifferenz zwischen dem belichteten Flügel und dem Ballon sehr viel grösser, als die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Oberflächen des Flügels. Welcher Function der ersten Temperaturdifferenz proportional die radiometrischen Kräfte auch sein mögen, ihre ponderomotorische Wirkung auf den Flügel stellt ihre Differenz an beiden Oberflächen des Flügels dar und diese ist somit mit genügender Annäherung der zweiten Temperaturdifferenz direct proportional.

des Flügels gleich Null und somit auch die radiometrische Kraft gleich Null wäre. Ich möchte hier gleich bemerken, dass diese Correction nur bei den platinirten Flügeln zu machen ist; bei Metallflügeln waren die radiometrischen Kräfte gegen alle Erwartungen verschwindend klein.

Ausser den angeführten bekannten störenden Einflüssen möge noch eine Hypothese nicht unberücksichtigt bleiben, dass die von Lenard und Wolf[1]) nachgewiesene Zerstäubung belichteter Oberflächen merkliche ponderomotorische Reactionskräfte hervorrufen könne, welche immer als Begleiter der Maxwell-Bartoli'schen Druckkräfte des Lichtes auftreten müssten; diese hypothetischen Reactionskräfte müssen aber sowohl von der Farbe des auffallenden Lichtes als auch von der chemischen Natur des Flügels abhängig sein; die weiter folgenden Versuche mit farbigem Lichte und mit verschiedenen Flügeln haben keine nachweisbare Wirkung dieser hypothetischen Reactionskräfte entdecken lassen.

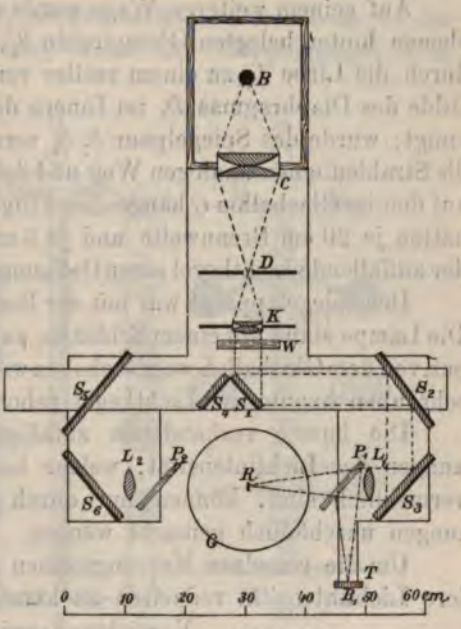


Fig. 1 (Grundriss).

Die getroffene Anordnung war die folgende (Fig. 1, Grundriss):

Das Bild des Kraters einer Gleichstrombogenlampe $B$ (30 Amp.) wurde mit Hülfe eines Condensators $C$ auf ein Metalldiaphragma $D$ ($d = 4$ mm) geworfen. Der aus dem Diaphragma austretende Lichtkegel wurde durch die Linse $K$ zu einem Parallelstrahlenbündel gemacht; um das Licht von ultraroten

1) Ph. Lenard u. M. Wolf, Wied. Ann. **37**. p. 455. 1889.

Strahlen zu befreien, befand sich hinter der Linse $K$ ein planparalleles Glasgefäss $W$ mit reinem *Wasser*[1]) (Schichtendicke 1 cm); an dieser Stelle konnte auch noch ein rubinrotes Glas eingeschaltet bez. das reine Wasser durch eine ammoniakalische Kupferlösung ersetzt werden.[2])

Auf seinem weiteren Wege wurde das Lichtbündel von den ebenen hinten belegten Glasspiegeln $S_1$, $S_2$ und $S_3$ reflectirt und durch die Linse $L_1$ zu einem reellen vergrösserten ($d = 10$ mm) Bilde des Diaphragmas $D$, im Innern des Glasballons, in $R$ vereinigt; wurde das Spiegelpaar $S_1$ $S_4$ verschoben, so durchsetzten die Strahlen einen analogen Weg und fielen von der anderen Seite auf den im Glasballon $G$ hängenden Flügel. Die Linsen $L_1$ und $L_2$ hatten je 20 cm Brennweite und je 5 cm freie Oeffnung, sodass der auffallende Lichtkegel einen Oeffnungswinkel von ca. 15° hatte.

Der Spiegelapparat war mit der Bogenlampe fest verbunden. Die Lampe stand auf einem Schlitten, auf welchem sie verschoben bez. von dem Glasballon weggeschoben werden konnte; durch Stellschrauben konnte der Lichtkegel gehoben und gesenkt werden.

Die immer vorhandenen zufälligen plötzlichen Schwankungen der Lichtintensität, welche bei einer Bogenlampe unvermeidlich sind, können nur durch Häufung der Beobachtungen unschädlich gemacht werden.

Um die einzelnen Messungsreihen auf eine constante mittlere Lichtintensität reduciren zu können, diente die folgende Vorrichtung: zwischen der Linse $L_1$ (Fig. 1) und dem Glasballon $G$ wurde eine dünne ebene Glasplatte $P_1$ unter 45° zur Richtung der Strahlen aufgestellt. Der grössere Teil der Strahlung durchsetzte die Glasplatte ungehindert, während sich das reflectirte Licht zu einem reellen Bilde $R_1$ vereinigte und dieses auf die Thermosäule $T$ fiel. Die Thermosäule (Fig. 2) bestand aus *fünf Constantan-Eisen*elementen (Draht-

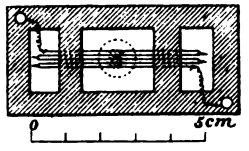


Fig. 2.

1) Hierdurch werden alle ultraroten Strahlen mit $\lambda > 1{,}2\,\mu$ ausgeschlossen; anderseits halten Glaslinsen die ultravioletten Strahlen zurück.

2) Bei dem roten und dem blauen Strahlenfilter reducirt sich die verfügbare Energie auf ca. ein Fünftel derjenigen des weissen Lichtes; das ist ein Beweiss, dass die angewandte Strahlung fast ausschliesslich dem sichtbaren Gebiete angehörte.

dicke $d = 0{,}025$ mm), welche in einem Ebonitrahmen montirt und mit Glasplatten verschlossen waren; durch die Ausschläge eines d'Arsonvalgalvanometers wurde die relative Lichtintensität gemessen. Um das von der Linse $L_2$ (Fig. 1) kommende Lichtbündel in gleicher Weise zu schwächen, wurde eine entsprechende Glasplatte $P_2$ eingeschaltet. Die Controle der Lichtintensität geschah nur, wenn der Doppelspiegel $S_1 S_4$

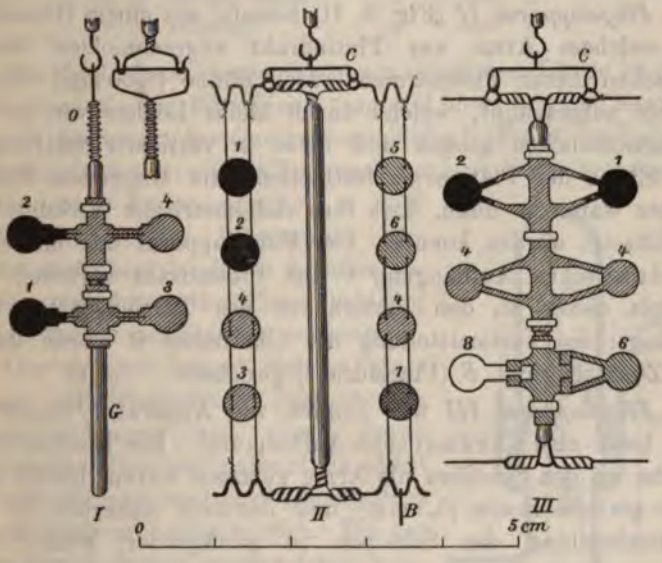



Fig. 3 (natürl. Grösse).

(Fig. 1) in der gezeichneten Lage stand; beim Verschieben des Doppelspiegels fällt kein Licht auf die Thermosäule und diese Stellung dient zur Bestimmung des Galvanometernullpunktes.

Es wurden *drei* verschiedene *Flügelapparate* (Fig. 3) verwendet.

*Flügelapparat I* (Fig. 3, I) bestand aus einem Glasstabe *G*, an welchem zwei aus verschieden dickem Platinblech verfertigte Kreuze mittels Platindrahtringen (ohne Kitt) festgeklemmt waren; um die kreisrunden Scheibchen (Durchmesser gleich 5 mm) sämtlicher Apparate gleich gross zu machen,

diente eine Stahlstanze. Zwei Scheibchen waren von beiden Seiten blank, zwei andere von beiden Seiten platinirt[1]), hierbei der dickere fünfmal stärker wie der dünnere. Um den Apparat an den Doppelhaken der Torsionsvorrichtung aufzuhängen, diente eine an den Glasstab $G$ angeschmolzene Platinöse $O$, welche senkrecht zur Richtung der Flügelarme stand, damit beim Einhängen der Glasstab $G$ in der Ebene dieser Arme sich frei vertical einstelle.

*Flügelapparat II* (Fig. 3, II) bestand aus einem Glasstabe, an welchem Arme aus Platindraht angeschmolzen waren. Zwischen diesen Platinarmen waren dünne (0,05 mm) Platindrähte aufgespannt, welche durch kleine Löcher von je vier Metallscheibchen gingen und diese in verticaler Stellung in der Ebene der Platinarme festhielten; die tragenden Platindrähte waren so dünn, dass ihre radiometrische Wirkung vernachlässigt werden konnte. Der Flügelapparat war mit einer Cardani'schen Aufhängung $C$ aus Platindraht versehen und mittels dieser an den Platinhaken des Torsionsfadens aufgehängt; die Verticalstellung des Glasstabes $G$ wurde durch ein Zusatzgewicht $B$ (Platindraht) gesichert.

*Flügelapparat III* war ähnlich wie Apparat I construirt und hatte eine Cardani'sche Aufhängung. Die Blechstreifen, welche an den Scheiben als Arme gelassen waren, hatten eine sehr geringe Breite (0,3 mm) und dennoch sicherten sie die Verticalstellung der Scheiben in genügender Weise; der Glimmerflügel (8) wurde durch eine Aluminiumfassung gehalten. Oben und unten waren noch Aluminiumarme angebracht, welche es verhinderten, dass während des Einhängens des Apparates die Flügel an die Glaswand des Ballonhalses anstossen.

Es wurden folgende Flügel untersucht:

---

1) Vgl. F. Kurlbaum, Wied. Ann. 67. p. 848. 1899. Es ist vorteilhaft, beim Beginn der Platinirung den Flügel im Bade während 30 Sec. ununterbrochen heftig zu bewegen: der Flügel bekommt eine schwach stahlgraue Oberfläche, auf welche sich bei nachheriger ruhiger Platinirung der Platinschwamm sehr gut setzt.

| Nr. | Material | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Platin, dick platinirt | | |
| 2 | „ fünfmal dünner platinirt | | |
| 3 | „ blank | Dicke = 0,10 | mm |
| 4 | „ „ | „ = 0,02 | „ |
| 5 | Aluminium, blank | „ = 0,10 | „ |
| 6 | „ „ | „ = 0,02 | „ |
| 7 | Nickel, blank | „ = 0,02 | „ |
| 8 | Glimmer | „ < 0,01 | „ |

Als *Torsionsvorrichtung* diente ein Glasfaden (Länge 30 cm), welcher unten einen Planspiegel trug und oben in einer *eisernen* Klemme im Innern des Quecksilberschliffes [1]) (Fig. 4) im Ballonhalse eingefasst war; um den Torsionsfaden *ohne Kitt* zu befestigen, wurden seine Enden zwischen je zwei Stücke ausgeglühter Asbestpappe eingefasst und oben durch die Klemme gehalten, unten durch einen Platindrahtring an den Träger des Spiegels geklemmt.

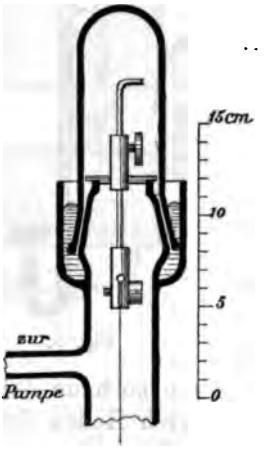


Fig. 4.

Der Spiegel befand sich in einer dünnen, mit Platinchlorid geschwärzten Aluminiumfassung und wurde durch Kathodenzerstäubung platinirt, da selbst verdeckte Silberspiegel durch Quecksilberdämpfe bald vernichtet werden. Bei der schwachen Reflexion eines solchen Spiegels und bei der zwischengeschalteten gewölbten Wand des Glasballons hat sich die Scalenbeleuchtung nach Wellmann-Martens [2]) ganz vorzüglich bewährt.

Bei der Bestimmung der Directionskraft aus Schwingungsbeobachtungen wurde der Torsionsfaden aus dem Ballon herausgenommen, der Flügelapparat entfernt und der Faden mit einem Kupferdraht von 4,0 cm Länge und 0,314 g Masse belastet.

1) Alle Glasschliffe waren in tadelloser Ausführung von C. Kramer in Freiburg i. B. geliefert.

2) F. Martens, Wied. Ann. **62**. p. 206. 1897; **64**. p. 625. 1898. Bezogen von Schmidt & Haensch in Berlin.

Die Beobachtungen wurden mit drei verschiedenen Torsionsfäden durchgeführt, deren Directionskräfte so gewählt waren, dass man bei einem Scalenabstande von 1200 Sct. die blanken Flügel mit 40—90 Sct. Doppelausschlag beobachten konnte. Hierbei hatten die drei Flügelapparate die halben Schwingungsdauern von 15, 35 bez. 13 Sec.

Zur *Evacuirung* diente eine Kahlbaum'sche Pumpe[1]); die Messungen mit einem McLeod-Kahlbaum'schen Druckmesser[2]) ergaben, dass ein Partialdruck der Luft von 0,0001 mm (kaum ein Fünfzehntel des Quecksilberdampfdruckes bei Zimmertemperatur) leicht erreicht werden konnte.

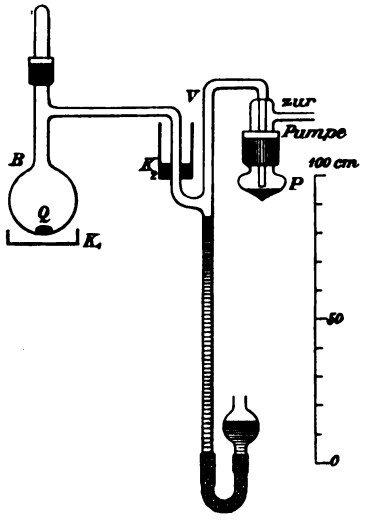


Fig. 5.

Um eine noch höhere Evacuirung zu erzielen, wurde das folgende Verfahren angewendet (Fig. 5): Etwas Quecksilber $Q$ wurde auf den Boden des Ballons $B$ gegossen, evacuirt und der Quecksilbertropfen durch ein untergestelltes Wasserbad $K_1$ auf ca. 5° C. über Zimmertemperatur erwärmt; das Quecksilber destillirt in die ununterbrochen wirkende Pumpe und führt die noch im Ballon vorhandene Luft mit sich. Schliesst man durch Heben des Quecksilbers im Barometerverschluss $V$ den Ballon von der Pumpe und dem Trockengefäss $P$ ab, so bleibt im Ballon nur Quecksilberdampf zurück: man kann nun in üblicher Weise durch Abkühlen mittels Eis und Kochsalz in $K_1$ und $K_2$ die Tension des zurückbleibenden Quecksilberdampfes sehr klein machen.

1) G. Kahlbaum, Wied. Ann. **53**. p. 199. 1894. Der zum Vorpumpen dienende gefettete Hahn konnte nach dem Vorpumpen durch einen Barometerverschluss von der Pumpe abgeschlossen werden; das Fallrohr hatte einen eisernen Einsatz. Bezogen von C. Kramer in Freiburg i. B.

2) G. Kahlbaum, Zeitschr. f. Instrumentenk. **15**. p. 192. 1895.

Die auf den Flügel fallende *Energiemenge der Strahlung* wurde calorimetrisch gemessen: die Lampe mit dem Spiegelapparat (Fig. 1) wurde auf dem Schlitten so weit zurückgezogen, dass der Flügelapparat durch ein Diaphragma *D* (Fig. 6 oder Fig. 7) ersetzt werden konnte, welches genau so gross war wie jeder Flügel ($d = 5$ mm); alle Strahlen, welche durch das Diaphragma *D* gingen, wurden von einem Calorimeter absorbirt. Eine Glasscheibe *G* compensirte bei diesen Messungen die Reflexion an der Glaswand des Ballons; sie war jedoch

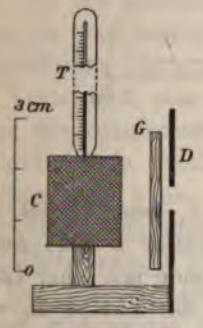



Fig. 6.

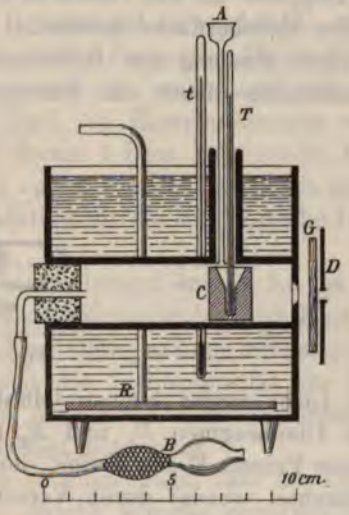



Fig. 7.

zwischen dem Diaphragma und dem Calorimeter eingeschaltet, um die Wärmestrahlung des Diaphragmas abzuhalten.

Das erste Calorimeter (Fig. 6) bestand aus einem *Kupferblock C*, in dessen verticaler, mit Quecksilber gefüllter Bohrung sich das Gefäss eines kleinen in $^1/_5{}^0$ C. geteilten Thermometers *T* befand; die absorbirende Fläche war berusst. Der berechnete Gesamtwasserwert des Calorimeters (die specifische Wärme des Kupfers gleich 0,093 angenommen) war 3,13 g.

Das zweite Calorimeter (Fig. 7) war ein *Kupfercylinder* ähnlicher Construction mit einem Gesamtwasserwert von 3,61 g; seine absorbirende Fläche war vergoldet und hierauf platinirt; er befand sich in einem Messingrohre im Innern eines Wasser-

bades von ca. 1 Liter Inhalt, welches mit einem Rührer $R$ versehen war. Um das Calorimeter vor Beginn der Versuche unter die Wasserbadtemperatur abzukühlen, wurden durch das Glasrohr $A$ einige Tropfen Aethyläther in die conische Bohrung des Calorimeters gegossen und mittels eines Gummigebläses $B$ ein starker Luftstrom durch die Messinghülle geschickt.

Die Messungen ergaben, dass die auf das Diaphragma ($d = 5$ mm) fallende Energiemenge der Strahlung 1,2 bis 1,8 g-Cal. pro Minute beträgt, d. h. dass diese Intensität etwa das Doppelte bis das Dreifache der Gesamtstrahlung der Sonne an der Erdoberfläche ausmacht.

Zur Messung des Reflexionsvermögens der untersuchten Metallbleche diente ein Photometer nach Ritchie (Fig. 8).

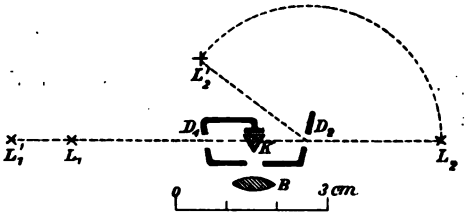



Fig. 8.

Das Licht zweier kleinen Glühlampen $L_1$ und $L_2$ fiel durch zwei Diaphragmen $D_1$ und $D_2$ (Durchmesser 3 mm) auf ein kleines Prisma $K$ aus *Kreide*, deren Schneide mit einer Lupe $B$ beobachtet wurde; durch Verschiebung der Lampe $L_1$ wurde auf gleiche Helligkeit eingestellt. Hierauf wurde die Lampe $L_2$ um ca. 130° nach $L_2'$ gedreht, das Diaphragma $D_2$ durch das zu untersuchende Metallblech von aussen verschlossen und wiederum durch Verschieben der Lampe $L_1$ nach $L_1'$ auf gleiche Helligkeit eingestellt. Für den angewandten Einfallswinkel von 25° ergab sich das Reflexionsvermögen $\varrho$ des Metallbleches $\varrho = (KL_1 : KL_1')^2$.

### III. Die Versuche.

Die oben beschriebene Versuchsanordnung gestattet zwei fundamentale Fragen experimentell zu beantworten:

1. ob die Lichtstrahlung Kräfte ausüben kann, die unabhängig von den bereits bekannten secundären (convectiven und radiometrischen) Kräften sind, und

2. ob diese ponderomotorischen Kräfte des Lichtes den von Maxwell und Bartoli berechneten Druckkräften entsprechen.

Vor Beginn der Untersuchung wurde ein Hülfsthermoelement (welches mit einem d'Arsonvalgalvanometer verbunden war) längs der Axen beider Linsen $L_1$ und $L_2$ (Fig. 1) verschoben und ihre Brennweiten für die Hauptstrahlung bestimmt; hierauf wurden die Spiegel und die Linsen des Apparates (Fig. 1) so justirt, dass die reellen Diaphragmenbilder der von rechts und von links kommenden Strahlen auf dieselbe Stelle fielen.

Um die Intensität beider Lichtbündel zu vergleichen, wurde das Hülfsthermoelement an die Stelle der reellen Diaphragmenbilder aufgestellt und abwechselnd von rechts und von links belichtet; aus einer grossen Zahl von Einzelmessungen ergab sich gewöhnlich eine geringe (kaum 1 Proc. betragende) Differenz: bei der grossen Anzahl reflectirender Glasflächen genügt schon ein unsymmetrisches Abstäuben, um eine ähnliche Intensitätsdifferenz hervorzurufen.

Verschiebt man das Thermoelement um $\pm 0{,}5$ cm von seiner ursprünglichen Lage in der Richtung der Lichtkegelaxe, im Bereiche, in welchem die Einstellung auf den Flügelapparat unsicher sein kann, so nimmt die Lichtintensität für beide Bestrahlungsrichtungen um ca. 5 Proc. ab. Die beschriebenen Voruntersuchungen sind unbedingt notwendig.

Der Flügelapparat wurde so eingehängt, dass die von der Lampe kommenden Strahlen, welche von der concaven Glasfläche des Ballons zurückgeworfen werden, nicht Teile des Flügelapparates belichten konnten.

Nachdem der Flügelapparat eingehängt war, wurde der Ballon verschlossen und während mehrerer Tage hoch evacuirt, zuletzt unter gelinder Erwärmung der ganzen Glashülle und beim Belichten der einzelnen Flügelscheiben. Vor jeder Versuchsreihe wurde der untere Teil des Glasballons, wo sich das Quecksilber befindet, auf ca. 5° C. über Zimmertemperatur im Wasserbade erwärmt[1]), während 1—2 Stunden weiter aus-

1) Bei dieser kleinen Temperaturdifferenz schlägt sich kein Quecksilber auf die kälteren Teile des Apparates nieder, eine Erscheinung, die für nicht benetzbare Oberflächen von M. Cantor (Wied. Ann. **56**. p. 493. 1895) nachgewiesen ist.

gepumpt, dann durch den Barometerverschluss $V$ (Fig. 5) abgeschlossen und durch Eis mit Kochsalz gekühlt.

Die hauptsächliche Unsicherheit der Messungen wird durch Störungen, welche von der Convection herrühren, verursacht; sie machen sich durch stetige Verschiebungen des Nullpunktes geltend, deren Grösse und Richtung von zufälligen[1]) Umständen abhängen, jedoch während der Dauer einer Messung hinreichend klein sind und durch längere Beobachtungsreihen eliminirt werden können; die Convection des Quecksilberdampfresiduums wird sowohl durch die Erwärmung des belichteten Flügels als auch durch äussere ungleichmässige Erwärmungen der Ballonwände und namentlich durch Temperaturdifferenzen der beiden Quecksilberoberflächen hervorgerufen. Versucht man ohne Abkühlung des Quecksilbers zu beobachten, so machen sich erhebliche[2]) Störungen durch Convection geltend, während sie bei Eis- und Kochsalzkühlung viel geringer werden.

Ein anderer Grund der Unsicherheit liegt in der ungenügenden Constanz der Lichtquelle[3]); plötzliche Schwankungen der Lichtintensität geben sprungweise Aenderung der Schwingungsamplitude des Flügelapparates; sie lassen sich nur durch Häufung der Beobachtungen umgehen.

Der Beobachter konnte durch zwei passend aufgestellte Fernrohre abwechselnd den Flügelapparat und das Galvanometer ablesen; ein Gehülfe, der die Bogenlampe bediente, verschob nach Commando den Doppelspiegel $S_1 S_4$ (Fig. 4). Durch intermittirende Beleuchtung konnte die Schwingungsamplitude des Flügelapparates auf eine gewünschte Grösse gebracht werden.

Tab. I giebt den Anfang eines Beobachtungsprotocolles wieder.

---

1) Bei den Untersuchungen desselben Flügels an verschiedenen Tagen konnten die Grösse und die Richtung der Nullpunktswanderung ganz verschieden ausfallen.

2) Bei höheren Gasdrucken werden die Beobachtungen durch Convection sehr unsicher gemacht und lassen zuverlässig Messungen kaum zu.

3) Siemens „$A$"-Kohlen haben sich gut bewährt; mit minderwertigen Kohlen sind die Messungen kaum durchführbar.

Tabelle 1.

Apparat III. Platinirter Flügel (2).

Abstand des Scheibencentrums von der Rotationsaxe $a = 9{,}2$ mm.
Kühlung mit Eis und Kochsalz. Scalenabstand $A = 1195$ Sct.

| *R* | | | *L* | | | *R* | | | *L* | | | *R* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ber. | | | ber. | | | ber. | | | ber. | | |
| | | 306 | 115 | | | | | 307 | 174 | | | . |
| 176 | 240 | | | 206 | 295 | 184 | 245 | | | 210 | 244 | . |
| | 239 | 302 | 118 | 207 | | | 244 | 303 | 177 | 211 | | . |
| 177 | 239 | | | 208 | 296 | 184 | 243 | | | 212 | 245 | . |
| | 240 | 302 | 124 | 209 | | | 243 | 300 | 180 | 213 | | . |
| 178 | | | | | 294 | 189 | | | | | 247 | . |
| | 240 | | | 208 | | | 244 | | | 212 | | |
| Ablenkg. | | 32 Sct. | | | 36 Sct. | | | 32 Sct. | | | | . . . . |
| | *G b* | | | *G n* | | | *G b* | | | *G n* | | *G b* |
| | 308 | | | | | | 314 | | | | | . |
| | 305 | | | | | | 312 | | | | | . |
| | 312 | | | 201 | | | 314 | | | 201 | | . |
| | 314 | | | | | | 316 | | | | | . |
| | 310 | | | | | | 314 | | | | | |
| Galv. | | 109 Sct. | | | 113 Sct. | | | 113 Sct. | | | | . . . . |
| Ablenkg. reduc. ($G = 100$) | | 29,3 Sct. | | | 31,8 Sct. | | | 28,3 Sct. | | | | . . . . |

Hierin bedeuten:

*R* und *L* die Umkehrpunkte auf der Scala, wenn das Licht von rechts (*R*) oder links (*L*) auffällt. Die Mittelreihen „ber." geben die aus je drei anliegenden Umkehrpunkten berechnete Ruhelage. Die „Ablenkg." geben die Ablenkungen des Systems, wenn die Belichtung von rechts nach links gewechselt wird.

*G b* und *G n* geben die Einstellungen des Galvanometers wenn die Thermosäule belichtet wird bez. unbelichtet bleibt (Galvanometernullpunkt). Unter „Galv." sind die Galvanometerausschläge angeführt.

„Ablenkg. reduc. ($G = 100$)" sind die oben genannten Ablenkungen, auf einen constanten Galvanometerausschlag von 100 Sct. reducirt.

In der aus Tab. I ersichtlichen Weise wurden für jeden Flügel sieben *R*- und *L*-Beobachtungen gemacht und die erhaltenen „Ablenkg. reduc." zu einem Gesamtmittel vereinigt, mit Angabe der mittleren ± Abweichung aller Einzelbeobachtungen vom Gesamtmittel. (Für den Flügel der Tab. I Doppelausschlag gleich 29,4 ± 1,6 Sct.)

Um die Messungen, welche mit einzelnen Scheiben gemacht wurden, übersichtlicher miteinander vergleichen zu können, sind noch gewisse Reductionsrechnungen erforderlich.

Bei den Apparaten I und III fällt ein Lichtsaum (von ca. 3 mm Breite) auf die tragenden Arme, welcher den Ausschlag vergrössert; durch Ausmessung der belichteten Teile und ihres Axenabstandes lässt sich dieser Betrag, welcher bei verschiedenen Flügeln 5—10 Proc. ausmacht, berechnen und in Abzug bringen: wir erhalten dann die Ablenkung, welche durch die kreisrunde Scheibe allein hervorgebracht wird. (Apparat II ist frei von dieser Correctionsrechnung.) Für den Flügel der Tab. I würde diese Correction 1,9 Sct. betragen; der berechnete Doppelausschlag wäre 27,5 Sct.

Die Messungen der Abstände der Scheibenmittelpunkte von der Rotationsaxe wurden in folgender Weise ausgeführt: der Spiegelapparat (Fig. 1) wurde auf dem Schlitten zurückgezogen, von der Seite des auffallenden Lichtes wurde dicht vor dem Ballon ein Senkel aus dünnem Silberdraht aufgehängt, ein Fernrohr senkrecht zu den Flügelarmen in ca. 4 m Entfernung aufgestellt und der Senkel so lange verschoben, bis er mit dem Torsionsfaden zusammenzufallen schien; das Fernrohr hatte ein Ocularmikrometer, welches mit Hülfe eines dicht bei dem Ballon aufgestellten Maassstabes ausgewertet wurde; die scheinbare Entfernung des Scheibencentrums vom Senkel, welche der wahren Entfernung von der Rotationsaxe entspricht, konnte auf 0,5 mm genau bestimmt werden; die Grössen dieser Entfernungen lagen zwischen 9 und 11 mm.

Unter Zugrundelegen dieser Messungen wurden die beobachteten Ausschläge auf solche reducirt, welche für einen Axenabstand von genau 1 cm gelten würden. Für den Flügel der Tab. I beträgt der reducirte Doppelausschlag 29,9 Sct.

Um die Grösse des beobachteten Druckes, welchen das Licht auf den untersuchten Flügel ausübt, im absoluten Maasse

auszudrücken, wurde eine Messung der Directionskraft des Aufhängefadens mittels Schwingungsbeobachtungen [1]) ausgeführt, indem die Schwingungsdauern aus je drei Beobachtungsreihen von je 10 Schwingungen erhalten wurden.

Tabelle II.

| Halbe Schwingungsdauer: | Trägheitskörper: |
|---|---|
| Spiegel allein . . . . . $\frac{\tau_1}{2} = 5{,}1 \pm 0{,}05$ sec | Kupferdraht<br>Länge = 4,0 cm<br>Masse = 0,314 g |
| Spiegel + Trägheitskörper $\frac{\tau_2}{2} = 29{,}4 \pm 0{,}1$ sec | |

Directionskraft $D = 0{,}00494$ Dynes-cm.

Unter Zugrundelegen dieser Directionskraft erhalten wir für den Flügel der Tab. I die Grösse des Druckes bei *einseitiger* Belichtung in *Dynes* ausgedrückt:

$$p = 0{,}0000308 \text{ Dynes} \pm 0{,}0000017 \text{ Dynes.}$$

Um die von Maxwell und von Bartoli aufgestellte Beziehung zu prüfen, sind die Druckkräfte zu *berechnen*, welche die bei den Versuchen angewandte Lichtstrahlung nach Maxwell-Bartoli ausüben müsste, und diese Berechnung mit den Versuchsergebnissen zu vergleichen. Hierzu ist eine calorimetrische Energiemessung und eine photometrische Bestimmung des Reflexionsvermögens der untersuchten Flügel erforderlich.

Bei den Messungen mit dem ersten Calorimeter (Fig. 6) wurde in folgender Weise verfahren: der Spiegelapparat (Fig. 1) wurde auf dem Schlitten so weit zurückgezogen, dass der Flügelapparat durch das Calorimeterdiaphragma *D* ersetzt werden konnte. Hierauf wurde das Calorimeter während 5 Minuten belichtet und von Minute zu Minute das Thermometer (und inzwischen auch das Galvanometer) abgelesen, dann durch einen Schirm die Bestrahlung unterbrochen und während der folgenden 5 Minuten von Minute zu Minute der Rückgang des Thermometers (und die Nulllage des Galvanometers) beob-

1) Vgl. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, § 29 und Anm. 11 u. 12. B. G. Teubner, Leipzig 1901.

achtet. Eine vollständige Beobachtungsreihe umfasste fünf aufeinander folgende Belichtungen.

Alle Beobachtungen wurden graphisch behandelt, indem die Ablesungen des Thermometers auf Coordinatenpapier aufgetragen und durch eine möglichst glatte Curve verbunden wurden (Fig. 9); es ist ersichtlich, dass schon nach 10 Sec. der Gang des Thermometers die Bestrahlung oder die Abblendung durch einen Umkehrpunkt angiebt.

Die sehr grosse Abkühlungsgeschwindigkeit des Calorimeters erfordert eine besondere Behandlung, denn selbst im Intervalle einer Beobachtung ist weder die Erwärmungs- noch die Abkühlungsgeschwindigkeit eine Constante. Für eine be-

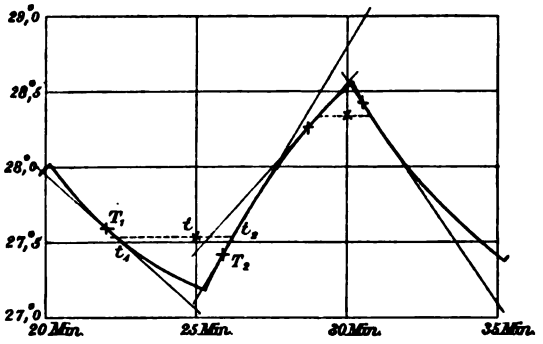



Fig. 9.

stimmte mittlere Temperatur der *Oberfläche* des Calorimeters haben beide Geschwindigkeiten constante Werte, welche durch Tangenten — die sich leicht in die Figur einzeichnen lassen — dargestellt werden: für diese constanten Werte geben die Schnittpunkte der Tangenten mit den Grenzordinaten die Temperaturdifferenzen, welche in 5 Minuten erreicht sein *würden*, wenn beide Geschwindigkeiten constant *wären* und die Summe beider Differenzen giebt die totale, auf Verluste corrigirte Temperaturerhöhung des Calorimeters.

Hier tritt aber eine Unsicherheit in der Schätzung der wahren mittleren Temperatur der Oberfläche ein: das Thermometer bleibt etwas hinter dieser Temperatur zurück, indem es beim Belichten eine *niedrigere* Temperatur und beim Abkühlen eine *höhere* Temperatur angiebt. Die Thatsache, dass das Thermometer nach 10 Sec. einen Umkehrpunkt angiebt, lässt

als erste und für unsere Versuche genügende Annäherung die Annahme zu, dass das Thermometer um 20 Sec. nachgeht; für eine Oberflächentemperatur $t$ würden demnach nicht die Curvenpunkte $t_1$ und $t_2$ zu vergleichen sein, sondern die um 20 Sec. zurück datirenden Curvenpunkte $T_1$ und $T_2$.

Solche graphische Bestimmungen wurden für zwei Temperaturen bei jeder Erwärmung ausgeführt; Tab. III giebt eine Messungsreihe wieder.

Tabelle III.

Calorimeter I. Wasserwert = 3,13 g.

| | Erwärmungsgeschwindigkeit | Abkühlungsgeschwindigkeit | Totale Erwärmung | Galvanometerausschlag | Reducirte totale Erwärmung ($G = 100$) |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1,67° | 0,63° | 2,30° | 140 Sct. | 1,64° |
| | 1,49 | 0,80 | 2,29 | 128 | 1,79 |
| II | 1,44 | 0,85 | 2,29 | 128 | 1,79 |
| | 1,31 | 1,10 | 2,40 | 122 | 1,97 |
| III | 1,38 | 1,08 | 2,46 | 129 | 1,91 |
| | 1,00 | 1,37 | 2,37 | 126 | 1,88 |
| IV | 1,30 | 1,15 | 2,45 | 123 | 1,99 |
| | 1,04 | 1,45 | 2,49 | 127 | 1,96 |
| V | 1,26 | 1,27 | 2,54 | 129 | 1,97 |
| | 0,93 | 1,50 | 2,43 | 126 | 1,93 |

Totale Erwärmung in 5 Min. ($G = 100$) $1{,}88° \pm 0{,}09°$

Mit dem zweiten Calorimeter (Fig. 7) waren die Messungen viel einfacher: das Calorimeter wurde mit Aethyläther abgekühlt, hierauf bestrahlt und das Thermometer von Minute zu Minute (inzwischen das Galvanometer und die Temperatur des Bades) abgelesen. Die Beobachtungen wurden graphisch aufgetragen, der Punkt markirt, für welchen die Temperatur des Calorimeters mit der des Bades zusammenfällt (unter Berücksichtigung, dass das Thermometer um ca. 20 Sec. nachgeht) und für diesen Punkt sowohl die Tangente der *wahren* Erwärmungsgeschwindigkeit gezogen, als auch die Differenz der um 2,5 Min. abstehenden Thermometereinstellungen ge-

nommen. Eine solche Beobachtungsreihe wurde dreimal wiederholt; die Tab. IV giebt eine solche Messungsreihe wieder.[1])

Tabelle IV.

Calorimeter II. Wasserwert = 3,61 g.

| | Temperaturerhöhung in 5 Minuten | | Mittelwert | Galvanometerausschlag | Reducirte Temperaturerhöhung ($G = 100$) |
|---|---|---|---|---|---|
| | Tangenten | Differenzen | | | |
| I | 2,40° | 2,41° | 2,40° | 159 Sct. | 1,51° |
| II | 2,55 | 2,57 | 2,56 | 163 | 1,57 |
| III | 2,43 | 2,50 | 2,46 | 158 | 1,56 |

Mittlere Temperaturerhöhung in 5 Min. ($G = 100$) $1{,}55° \pm 0{,}02°$

Hieraus ergiebt sich die pro Secunde auffallende Energiemenge

$$E = \frac{1{,}55° \cdot 3{,}61 \cdot 4{,}18 \cdot 10^7}{300} = 7{,}74 \cdot 10^5 \text{ Ergs.}$$

Die Strahlen fallen bei unseren Versuchen nicht parallel auf, sondern in einem convergenten Strahlenbüschel; die geringe Neigung der auffallenden Strahlen würde eine Correction[2]) (von ca. 1 Proc.) erfordern, welche den übrigen Unsicherheiten der Messungen gegenüber zu vernachlässigen ist. Wir können die Berechnung hinreichend genau nach der von Maxwell und von Bartoli für ein Parallelstrahlenbündel geltenden Formel ausführen.

Für einen absolut schwarzen Körper würde sich unter Zugrundelegen des Wertes aus Tab. IV der Druck ergeben:

$$p = \frac{E\,(\text{Ergs})}{3 \cdot 10^{10}} = 0{,}0000258 \text{ Dynes.}$$

Um die gewonnenen Resultate übersichtlich zusammenzufassen, wurde als arbiträre *Einheit* der aus calorimetrischen Messungen berechnete Wert des Maxwell-Bartoli'schen Druckes für einen *absolut schwarzen Körper* gewählt und diese Einheit als „*MB-Einheit*" bezeichnet.

1) Die Resultate der Tab. III und Tab. IV können *nicht* miteinander direct verglichen werden, da sie sich auf *verschiedene* Justirungen der Thermobatterie beziehen.

2) Vgl. L. Boltzmann, Wied. Ann 22. p. 292. 1884 bez. D. Goldhammer, l. c. p. 844.

In diesen Einheiten ausgedrückt würde das Resultat der Tab. I lauten:

$$p = \frac{0{,}0000308 \pm 0{,}0000017}{0{,}0000258} = (1{,}19 \pm 0{,}07)\, MB.$$

Eine directe Messung des Reflexionsvermögens der angewandten Flügel wurde durch die Unebenheiten der dünnen Metallbleche vereitelt. Ich habe deshalb mit dem Photometer (Fig. 8) das Reflexionsvermögen von den Blechen bestimmt, aus welchen die Flügel verfertigt wurden; auch bei diesen machten sich die Unebenheiten stark geltend, sowie eine (namentlich bei Nickel) ausgeprägte Färbung des reflectirten Lichtes; das für 25° Einfallswinkel beobachtete Reflexionsvermögen ist deshalb ohne weitere Reductionen in der Tab. V angeführt und daraus die zu erwartenden Druckkräfte des Lichtes in *MB*-Einheiten berechnet. Zum Vergleiche ist das Reflexionsvermögen vollkommen spiegelnder Flächen für normale Incidenz ($\lambda = 600\ \mu\mu$) nach Hagen und Rubens[1]) und die daraus berechneten Druckkräfte angegeben (wobei die Zahlen des Magnaliums für Aluminium eingesetzt sind).

Tabelle V.

| | Photometrische Messungen | | Nach Hagen und Rubens | |
|---|---|---|---|---|
| | $\varrho$ | $p$ | $\varrho$ | $p$ |
| Platin | 0,5 ± 0,05 | 1,5 *MB* | 0,64 | 1,64 *MB* |
| Aluminium | 0,6 ± 0,05 | 1,6 | 0,83 | 1,83 |
| Nickel | 0,35 ± 0,05 | 1,4 | 0,65 | 1,65 |

Für Glimmer habe ich die Berechnungen unterlassen, weil die Beobachtungen nur an einem Flügel gemacht wurden und eine Controle durch einen dickeren Flügel fehlt.

Im Folgenden sind die Resultate der einzelnen Versuchsreihen, welche ich mit den drei Flügelapparaten angestellt habe, angeführt. Als ich von den unregelmässig schwankenden Ergebnissen der Untersuchung bei Zimmertemperatur zu Messungen bei Abkühlung überging, hoffte ich keine so grosse Uebereinstimmung der Versuche mit den Berechnungen nach Maxwell-Bartoli zu erhalten, wie sie sich bei den ersten

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 1. p. 373. 1900.

Versuchen mit dem Apparat II ergab; ich glaubte anfangs, dass diese Uebereinstimmung eine zufällige sei und habe deshalb das Calorimeter I durch das Calorimeter II ersetzt und hierauf den Apparat II durch den Apparat III.

Die zahlreichen Bestimmungen, welche ich mit dem Apparate I bei Zimmertemperatur ausgeführt habe, stehen den späteren Messungen wesentlich nach und sind deshalb nicht angeführt. Nicht angeführt sind auch die Messungen mit dem Flügel (2) des Apparates II, weil eine nachträgliche mikroskopische Untersuchung eine ungenügende schwammige Platinirung erkennen liess. Mit dem Apparat III wurden leider nur zwei Messungsreihen ausgeführt, weil hernach die Anordnung durch einen Unfall zerstört wurde.

Die Resultate sind in *MB-Einheiten* ausgedrückt; es ist unter jedem Werte auch die mittlere Schwankung der Einstellung des Flügelapparates in den nämlichen Einheiten angegeben, wobei alle unter 0,15 *MB* betragenden Schwankungen durch 0,1 *MB*, alle unter 0,25 *MB* durch 0,2 *MB* etc. bezeichnet sind.

**Resultate.**

| | | I. App. | II. Apparat | | | | | | | III. App |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | I. Calorimeter | | | II. Calorimeter | | | | |
| | | Weiss | Weiss | | | Weiss | Rot | Weiss | Blau | Weiss |
| 1 | Dick platin. Flügel | 1,8 ±0,2 | 1,6 ±0,1 | 1,5 ±0,1 | — | — | — | — | — | 1,5 ±0,1 |
| 2 | Dünn platin. Flügel | 1,3 ±0,2 | — | — | — | — | — | — | — | 1,2 ±0,1 |
| | Berechnet | 1,2 | — | — | — | — | — | — | — | 1,1 |
| 3 | Platin, dick . . . | — | 1,8 ±0,1 | — | — | — | — | — | — | — |
| 4 | Platin, dünn . . | — | 2,0 ±0,1 | 1,9 ±0,2 | 1,8 ±0,1 | 1,9 ±0,1 | (1,8 ±0,8) | 1,7 ±0,1 | (1,5 ±0,5) | 1,7 ±0,1 |
| 5 | Aluminium, dick . | — | — | 2,3 ±0,4 | 1,9 ±0,1 | — | — | — | — | — |
| 6 | Aluminium, dünn | — | — | 2,0 ±0,1 | 2,3 ±0,1 | 2,0 ±0,2 | (2,9 ±0,8) | 2,1 ±0,1 | (2,5 ±0,5) | 1,4 ±0,2 |
| 7 | Nickel, dünn . . | — | — | 1,7 ±0,3 | 1,2 ±0,2 | 1,4 ±0,1 | (2,3 ±0,5) | 1,4 ±,02 | (2,7 ±0,9) | — |
| 8 | Glimmer . . . . | — | — | — | — | — | — | — | — | 0,08 ±0,05 |

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Schlussresultate mögen die folgenden Schätzungen dienen: Die Schwankungen der Ablenkung sind in der Tabelle angegeben; die aus der Ablenkung sich ergebende Grösse des Druckes im absoluten Maasse (Directionskraft des Fadens, Scalenabstand, Hebelarm des Flügels und Correctionen auf die bestrahlte Fläche) lassen sich mit einer Genauigkeit von $\pm$ 8 Proc. bestimmen; die Berechnung des absoluten Wertes der *M B*-Einheit aus calorimetrischen Messungen (Wasserwert, Temperaturerhöhung des Calorimeters und das nahe gleich 1 betragende Verhältnis des Diaphragmas zum Flügel) ist wohl auf $\pm$ 7 Proc. genau; die Unsicherheit in der Bestimmung des Reflexionsvermögens beträgt ca. 10 Proc. Diesen Unsicherheiten der Messungen superponiren sich noch die Ungenauigkeiten in der Einstellung des Flügels auf die Mitte des reellen Diaphragmenbildes und die Möglichkeit, dass die Wärmestrahluug eines belichteten Flügels durch die Ballonoberfläche auf andere Teile des Flügelapparates concentrirt wird und diese Erwärmung sich bei jeder Schwingung des Flügelapparates ändert. Für weisses Licht würde der noch zulässige absolute Fehler der Messung auf ca. $\pm$ 20 Proc. zu schätzen sein.[1])

Bei Versuchen mit rotem und blauem Lichte, wo die verfügbare Strahlungsenergie kaum ein Fünftel der bei weissem Lichte beträgt, sind die Störungen durch Convection die nämlichen und deshalb die Unsicherheiten entsprechend grösser; dasselbe gilt auch für die sehr kleinen (kaum 4 Sct. Doppelausschlag betragenden) Ablenkungen bei Glimmer. Diese Controlversuche genügen aber dennoch, um festzustellen, dass auch in diesen Fällen keine neue ponderomotorische Wirkung des Lichtes auftritt, welche mit den Maxwell-Bartoli'schen Kräften vergleichbar wäre.

Ausserdem habe ich mehrfach vergleichende Versuche mit dicken und dünnen Platin- und Aluminiumflügeln gemacht; es ist mir aber nicht gelungen, mit Sicherheit eine merkliche radiometrische Differenz festzustellen; innerhalb der Beobach-

1) Eine Verfeinerung der einzelnen Messungsmethoden würde die Sicherheit der erzielten Resultate nur dann wesentlich erhöhen, wenn in erster Linie die Bogenlampe durch eine andere constante Lichtquelle ersetzt sein würde.

tungsfehler ist deshalb die radiometrische Wirkung bei dünnen Metallflügeln gleich Null zu setzen.

Die erhaltenen Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Ein auffallendes Lichtbündel übt sowohl auf einen absorbirenden als auch auf einen reflectirenden Körper einen Druck aus; diese ponderomotorische Wirkung ist unabhängig von den bereits bekannten, secundären, durch Erwärmung hervorgerufenen Crookes'schen Kräften und den Erscheinungen der Convection.

2. Diese Druckkräfte des Lichtes sind der auffallenden Energiemenge direct proportional und unabhängig von der Farbe des Lichtes.

3. Diese Druckkräfte des Lichtes stimmen innerhalb der Versuchsfehler quantitativ mit den von Maxwell und von Bartoli berechneten ponderomotorischen Kräften der Strahlung überein.

Hierdurch ist die Existenz der Maxwell-Bartoli'schen Druckkräfte für Lichtstrahlen experimentell erwiesen.

Moskau, Physik. Laborat. d. Univ., im August 1901.

(Eingegangen 23. August 1901.)

## 2. *Beiträge zur Elektronentheorie des Lichtes;* *von W. Voigt.*

### Einleitung.

Die moderne Theorie der Fortpflanzung des Lichtes in ponderabeln Körpern, welche gemäss einer wohl zuerst von **Hertz** ausgesprochenen Idee die allgemeinen elektrodynamischen Gleichungen nur durch eine erweiterte Definition der elektrischen Polarisationen modificirt, hat in der letzten Zeit eine Reihe neuer Erfolge errungen. Bei diesen hat die Einführung der Elektronenhypothese im hohen Grade anregend und fördernd eingewirkt, wenn es auch noch nicht gelungen ist, *alle* Punkte der Theorie von dieser Vorstellung aus widerspruchsfrei zu begründen.

Unter diesen Umständen schien es mir erwünscht, die Leistungsfähigkeit der neuen Methode in einem Gebiete zu untersuchen, auf das sie meines Wissens bisher noch nicht angewendet worden ist, nämlich auf *die Veränderung der optischen Eigenschaften ponderabler Körper durch mechanische und thermische Deformation.* Der Gang der nachfolgenden Darstellung ist der, dass mit der Aufstellung der allgemeinsten den Symmetrieverhältnissen entsprechenden Ansätze begonnen wird, und deren Folgerungen in Bezug auf Dispersion und Absorption in zwei Abschnitten mit der Erfahrung verglichen werden. Da die gemachten Ansätze sich von der Elektronenvorstellung aus einfach deuten lassen, so ergeben sich dabei auch eigentümliche Aufklärungen über das eventuelle Verhalten der Elektronen selbst bei den betrachteten Vorgängen. In einem letzten Abschnitt wird eine specielle aus der Elektronenhypothese abgeleitete Vorstellung über die Bedingungen, unter denen ein Elektron schwingt, theoretisch verfolgt und hierdurch einmal eine weitergehende Veranschaulichung der früheren Ansätze, daneben aber auch *eine Theorie der Dispersion und Absorption gemischter oder zusammengesetzter Körper gewonnen.*

Bezüglich der Resultate sei bemerkt, dass sich einerseits ältere und neuere empirische Gesetze theoretisch begründen und somit in ihrer Tragweite klarstellen, als auch neue Gesetzmässigkeiten ableiten liessen. —

**I. Allgemeine Formeln für die Einwirkung einer Deformation.**

1. *Die Elektronentheorie der Dispersion und Absorption.* Die Elektronenhypothese setzt in den ponderabeln Körpern um (angenähert feststehende) Ruhelagen oscillirende Korpuskeln voraus, für deren auf die Ruhelage bezogene Coordinaten $x_s, y_s, z_s$ sie die Gleichungen

$$m_s x_s'' + k_s x_s + h_s x_s' = e_s X, \tag{1}$$

. . . . . .

annimmt.[1]) Hierin bezeichnet $m_s$ die ponderable Masse, $e_s$ die elektrische Ladung des Elektron ($s$), $X, Y, Z$ die Componenten der auf das Elektron ausgeübten elektrischen Feldstärke; $-k_s x_s, \ldots$ sind die Componenten der *quasielastischen Kraft*, die das Elektron nach der Ruhelage zurücktreibt, $-h_s x_s', \ldots$ die Componenten des seiner Bewegung entgegenwirkenden *Widerstandes*. Die befriedigende elektrodynamische Begründung dieser beiden Kräfte steht noch aus.

Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Elektronen sind hierbei als von geringem Einfluss zunächst ausser Betracht gelassen; wir werden solche in dem letzten Abschnitt aber in Rechnung setzen.

Enthält die Volumeneinheit $N_s$ Elektronen, die unter den gleichen Bedingungen stehen, wie ($s$), so sind

$$4\pi N_s e_s \bar{x}_s = X_s, \quad 4\pi N_s e_s \bar{y}_s = Y_s, \quad 4\pi N_s e_s \bar{z}_s = Z_s, \tag{2}$$

unter $\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s$ die *mittleren* Werte von $x_s, y_s, z_s$ im Bereiche der betrachteten Stelle verstanden, die Componenten der auf diesen Elektronen beruhenden Anteile an der elektrischen Polarisation. Bei ihrer Einführung nimmt das System der Bewegungsgleichungen die Gestalt an:

$$m_s X_s'' + k_s X_s + h_s X_s' = 4\pi N_s e_s^2 X, \tag{3}$$

. . . . . .

Zwischen den Componenten der Gesamtpolarisation

$$\mathfrak{X} = X + \sum X_s, \quad \mathfrak{Y} = Y + \sum Y_s, \quad \mathfrak{Z} = Z + \sum Z_s, \tag{3'}$$

1) Vgl. z. B. P. Drude, Wied. Ann. 48. p. 542. 1893.

und den Feldcomponenten $X$, $Y$, $Z$ bestehen dabei die Gleichungen:

$$(3'') \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = v^2 \left[ \Delta X - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right],$$

. . . . . .

unter $v$ die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum verstanden.

Das Resultat des Formelsystems (3) für die Fortpflanzung ebener homogener Wellen geht bekanntlich dahin, dass, wenn man die Formeln (1) durch complexe Lösungen von der Form

$$e^{i\left(t - \frac{1 - i\varkappa}{\omega}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right)/\vartheta}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

integrirt und den sogenannten complexen Brechungsindex

$$(4) \qquad \frac{v(1 - i\varkappa)}{\omega} = \nu$$

setzt, dann für $\nu$ die Beziehung resultirt

$$(5) \qquad \nu^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2 \sum_s \frac{e_s^2 N_s}{k_s \vartheta^2 + i h_s \vartheta - m_s}.$$

2. *Die allgemeinen Ansätze für die Wirkung einer Deformation.* Wird ein fester isotroper Körper, auf den sich unsere Formeln beziehen, deformirt, so ändern sich erfahrungsgemäss die Parameter $k_s$ und $h_s$ der Formeln (1) bez. (3); der Körper wird nach Lichtgeschwindigkeit und Lichtabsorption anisotrop. Dass hierbei wirklich eine bis in das Innere der ponderabeln Molecüle hineinreichende Einwirkung stattfindet, ist auch durch rein mechanische Erscheinungen wahrscheinlich gemacht.[1]) Beziehen wir das betrachtete Volumenelement auf ein Coordinatensystem, dessen Axen den Richtungen der Hauptdilatationen $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ parallel liegen, so nehmen bei Voraussetzung sehr kleiner Dilatationen oder wenigstens sehr schwacher Einwirkungen derselben auf das optische Verhalten des Körpers die Gleichungen (1) die Form an

$$(6) \qquad \begin{cases} m_s x_s'' + k_s(1 + \beta_{s1}) x_s + h_s(1 + \gamma_{s1}) x_s' = e_s X, \\ m_s y_s'' + k_s(1 + \beta_{s2}) y_s + h_s(1 + \gamma_{s2}) y_s' = e_s Y, \\ m_s z_s'' + k_s(1 + \beta_{s3}) z_s + h_s(1 + \gamma_{s3}) z_s' = e_s Z, \end{cases}$$

wobei gilt ($r = 1, 2, 3$ angenommen)

$$(7) \qquad \beta_{sr} = (p_s - p_s')\delta_r + p_s' \Delta, \qquad \gamma_{sr} = (q_s - q_s')\delta_r + q_s' \Delta,$$

1) Vgl. z. B. W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 201. 1899.

wobei ferner die $p_s$, $p_s'$, $q_s$, $q_s'$ Constanten der Elektronengattung ($s$) bei dem gegebenen Anfangszustand des Körpers darstellen und die räumliche Dilatation

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \Delta \tag{8}$$

gesetzt ist.

Entsprechend tritt nun an Stelle des Systems (3)

$$m_s X_s'' + k_s(1+\beta_{s1}) X_s + h_s(1+\gamma_{s1}) X_s' = 4\pi e_s^2 N_s (1-\Delta) X, \tag{9}$$

. . . . . .

Die räumliche Dilatation $\Delta$ ist dabei, wie erwähnt werden mag, gleichviel ob sie klein oder gross sei, mit den Dichten $\varrho$ und $\varrho_d$ vor und nach der Deformation verknüpft durch die Gleichung

$$1 - \Delta = \varrho_d / \varrho. \tag{10}$$

Die Formel (5) liefert jetzt für die complexen *Hauptbrechungsindices* $v_r$ die Beziehungen

$$v_r^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2(1-\Delta)\sum_s \frac{N_s e_s^2}{k_s(1+\beta_{sr})\vartheta^2 + i h_s(1+\gamma_{sr})\vartheta - m_s} \tag{11}$$

für $r = 1, 2, 3$, denen für die Anwendung der Ausdruck für den ursprünglichen Zustand gegenübergestellt werden mag:

$$v^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2 \sum_s \frac{N_s e_s^2}{k_s \vartheta^2 + i h_s \vartheta - m_s}. \tag{12}$$

$\vartheta$ ist dabei gleich $\tau/2\pi$, unter $\tau$ die Periode der Schwingung verstanden.

Sind die drei lineären Dilatationen einander gleich, ist also $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{3}\Delta$, so werden die $\beta_{sr}$ und $\gamma_{sr}$ für $r = 1, 2, 3$ untereinander gleich, und zwar zu

$$\beta_s = \tfrac{1}{3}(p_s + 2p_s')\Delta = b_s\Delta. \quad \gamma_s = \tfrac{1}{3}(q_s + 2q_s')\Delta = c_s\Delta, \tag{13}$$

wobei $b_s$ und $c_s$ Abkürzungen sind. Gleichzeitig fallen die drei $v_r$ zusammen, der Körper bleibt optisch isotrop; die Bezeichnungen $v_r$ mögen in diesem Falle mit $v_d$ vertauscht werden. Dieser Fall ist bei Flüssigkeiten der einzig in Betracht kommende.

Rührt die Dilatation nicht von einer mechanischen Einwirkung, sondern von einer *Temperaturerhöhung bei constantem Druck* her, so behalten (mässige Aenderungen vorausgesetzt) die $\beta_s$ und $\gamma_s$ ihre Form bei, erhalten aber andere Parameter.

Wir vertauschen in diesem Falle $\nu_d$ mit $\nu'$ und die $\beta_s$, $\gamma_s$ mit $\beta_s'$, $\gamma_s'$, wobei wir setzen

$$\beta_s' = f_s \Delta, \quad \gamma_s' = g_s \Delta. \tag{14}$$

Ueber den Zusammenhang zwischen den Parametern $b_s$, $c_s$ einerseits und $f_s$, $g_s$ andererseits lässt sich aus der benutzten Grundannahme allgemeines kaum ableiten. Der Unterschied zwischen $f_s$ und $b_s$ bez. $g_s$ und $c_s$ misst die directe Einwirkung der Temperatur, wie sie bei ungeänderter Dichte *allein* auftritt. Da die mittlere gegenseitige Entfernung der Molecüle sich unter diesen Umständen nicht ändert, so könnte eine Aenderung der auf das Elektron wirkenden Kräfte wohl nur durch eine *Auflockerung* des Molecüles bei steigender Temperatur verursacht werden; die gesteigerte Geschwindigkeit der Molecular- wie der Atombewegung kommt dabei wegen deren überhaupt geringem Betrage kaum in Betracht. Auf die *Theorie* der Wirkung einer molecularen Auflockerung wird weiter unten eingegangen werden.

### II. Anwendung auf Spectralbereiche verschwindender Absorption.

3. *Die allgemeinen Dispersionsformeln.* Innerhalb der Spectralbereiche unmerklicher Absorption sind die in die $h_s$ multiplicirten imaginären Glieder zu vernachlässigen, und es gehen demgemäss die complexen Brechungsindices $\nu$ in die reellen $n = v/\omega$ über. Hier wird also aus (11) und (12)

$$n_r^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2 \sum_s \frac{N_{sd} e_s^2}{k_{sr}\vartheta^2 - m_s}, \tag{15}$$

wobei

$$N_s(1 - \Delta) = N_{sd}, \quad k_s(1 + \beta_{sr}) = k_{sr} \tag{15'}$$

gesetzt ist, und

$$n^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2 \sum_s \frac{N_s e_s^2}{k_s\vartheta^2 - m_s}. \tag{16}$$

Im Falle einer allseitig gleichen *mechanischen* Dilatation reduciren sich alle $n_r$ auf $n_d$, alle $k_{sr}$ auf $k_{sd} = k_s(1 + b_s\Delta)$; im Falle einer *thermischen* Dilatation die $n_r$ auf $n'$, die $k_{sr}$ auf $k_s' = k_s(1 + f_s\Delta)$.

Die auf diese Weise entstehenden Formeln legen zwei allgemeine Bemerkungen nahe.

*Erstens* sei daran erinnert, dass man versucht hat, die Veränderungen der Brechungsindices infolge von Dichtigkeitsänderungen im wesentlichen als eine Wirkung der *Verschiebung der Absorptionsstreifen* der Substanz aufzufassen. Die Elektronentheorie ist hiermit nur zum Teil im Einklang.

Allerdings geben die Werte $\vartheta_s$, für welche die Nenner der Summen in (15) uud (16) verschwinden, angenähert die Lage der Absorptionsstreifen des Mediums an, und es werden diese Werte durch die Dilatation geändert. Aber diese Wirkung ist doch nur ein Teil des in den Formeln Enthaltenen. Setzt man

$$(17') \qquad m_s/k_s = \vartheta_s^2, \quad m_s/k_{sd} = m_s/k_s(1 + b_s \Delta) = \vartheta_{sd}^2,$$

so wird für eine allseitig gleiche Dilatation

$$(17) \qquad n_d^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2 \sum_s \frac{N_s(1 - \Delta)e_s^2}{k_s(1 + b_s\Delta)(\vartheta^2 - \vartheta_{sd}^2)},$$

$$(18) \qquad n^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2 \sum_s \frac{N_s e_s^2}{k_s(\vartheta^2 - \vartheta_s^2)}.$$

Neben der Aenderung von $\vartheta_s$ in $\vartheta_{sd}$ kommt also die Verwandelung des Factors $N_s/k_s$ in $N_s(1 - \Delta)/k_s(1 + b_s\Delta)$ zur Geltung, die unter Umständen erheblich ins Gewicht fallen kann, wenn auch Fälle denkbar sind, wo sie nur einen geringen Einfluss übt.

*Zweitens* sei hervorgehoben, dass die Erscheinungen der mechanisch bewirkten Doppelbrechung beweisen, dass die $\beta_{sr}$ unter den beobachtbaren Umständen keineswegs neben Eins verschwindend klein sind; daraus folgt für die Parameter $b_s$, und bei der vollkommen analogen Bedeutung der betreffenden Grössen wahrscheinlich auch für die $f_s$, eine merkliche Grösse. Hieraus ergiebt sich aber, dass von den Formeln

$$(19) \qquad \begin{cases} (n^2 - 1)/\varrho = \text{const.}, & (n - 1)/\varrho = \text{const.}, \\ & (n^2 - 1)/\varrho(n^2 + 2) = \text{const.}, \end{cases}$$

welche zur Darstellung der Erfahrungen versuchsweise und mit wechselndem Erfolge herangezogen sind, im allgemeinen *keine* durch die Elektronentheorie geliefert wird. Die *erste* Beziehung (19) ergiebt sich in Annäherung, wenn die Parameter $b_s$ und $f_s$ sehr klein sind. Auf die speciellen Bedingungen, unter denen die *letzte* Gleichung Gültigkeit gewinnt, wird weiter

unten eingegangen werden. Dass die Verhältnisse nicht so einfach liegen können, wie jene empirischen Formeln aussagen, ist ja längst bekannt, und die Gleichungen (17) und (18) stimmen hiermit überein. Aber selbst beim Uebergang zu unendlich langen Wellen, wo sonst mitunter Vereinfachungen der Gesetze eintreten, resultiren hier im allgemeinen noch keine einfachen Beziehungen.

Dagegen wird eine andere Gesetzmässigkeit durch die Elektronentheorie verlangt. Es ist bekannt, dass man angenäherte Dispersionsformeln für die Spectralbereiche merklich vollkommener Durchsichtigkeit erhält, indem man die Nenner der Summenglieder in (17) oder (18), die innerhalb jener Bereiche nirgends verschwinden, *entwickelt.*

Wir schreiben zu diesem Zwecke

$$n_d^2 - 1 = 4\pi\vartheta^2 \sum_s M_{sd}/(\vartheta^2 - \vartheta_{sd}^2), \tag{20}$$

wobei nun ist

$$M_{sd} = N_s(1-\Delta)e_s^2/k_s(1+b_s\Delta), \quad \vartheta_{sd}^2 = m_s/k_s(1+b_s\Delta) \tag{20'}$$

und unterscheiden die Elektronengattungen ($s$) in solche ($k$), für die $\vartheta > \vartheta_{kd}$, und solche ($g$), für welche $\vartheta < \vartheta_{gd}$ ist. Dann ergiebt sich:

$$\begin{cases} n_d^2 - 1 = 4\pi \sum_k M_{kd}\left(1 + (\vartheta_{kd}/\vartheta)^2 + (\vartheta_{kd}/\vartheta)^4 + \ldots\right), \\ \qquad - 4\pi\vartheta^2 \sum_g (M_{gd}/\vartheta_{gd}^2)\left(1 + (\vartheta/\vartheta_{gd})^2 + \ldots\right), \end{cases} \tag{21}$$

oder, wenn man die Reihe wie gewöhnlich abbricht,

$$\begin{cases} n_d^2 - 1 = -4\pi\vartheta^2 \sum_g M_{gd}/\vartheta_{gd}^2 + 4\pi \sum_k M_{kd} \\ \qquad + (4\pi/\vartheta^2)\sum_k M_{kd}\vartheta_{kd}^2 + (4\pi/\vartheta^4)\sum_k M_{kd}\vartheta_{kd}^4. \end{cases} \tag{22}$$

Nun ist aber nach (20') und (10)

$$M_{gd}/\vartheta_{gd}^2 = (1-\Delta)M_g/\vartheta_g^2 = \varrho_d M_g/\varrho\,\vartheta_g^2, \tag{23}$$

wobei $M_g$ und $\vartheta_g$ die Werte vor der Deformation bezeichnen, und hieraus ergiebt sich, *dass das in $\vartheta^2$ multiplicirte Glied der gebräuchlichen Entwickelung für $(n^2-1)/\varrho$ bei einer allseitig gleichen Dilatation, sei sie nun mechanisch oder thermisch bewirkt, ungeändert bleibt.*

Wie die anderen Entwickelungsglieder sich verhalten, erkennt man bei Einsetzen der Werte der $M_{kd}$ und $g_{kd}$; es gilt nämlich streng bez. angenähert:

$$(24)\quad \begin{cases} \sum_k M_{kd} = (1-\Delta)\sum_k \frac{M_k}{1+b_k\Delta} \\ \qquad\qquad = (1-\Delta)\sum_k M_k(1-b_k\Delta), \\ \sum_k M_{kd}\vartheta_{kd}^2 = (1-\Delta)\sum_k \frac{M_k\vartheta_k^2}{(1+b_k\Delta)^2} \\ \qquad\qquad = (1-\Delta)\sum_k M_k\vartheta_k^2(1-2b_k\Delta), \\ \sum_k M_{kd}\vartheta_{kd}^4 = (1-\Delta)\sum_k \frac{M_k\vartheta_k^4}{(1+b_k\Delta)^3} \\ \qquad\qquad = (1-\Delta)\sum_k M_k\vartheta_k^4(1-3b_k\Delta), \end{cases}$$

wobei $M_k$ und $\vartheta_k$ die Werte *vor* der Deformation bezeichnen. Schreibt man also

$$(25)\qquad n^2 - 1 = -A\vartheta^2 + B + C/\vartheta^2 + D/\vartheta^4$$

und

$$(26)\quad \begin{cases} n_d^2 - 1 = (1-\Delta)\big(-A\vartheta^2 + (B-\beta\Delta) \\ \qquad\qquad + (C-\gamma\Delta)/\vartheta^2 + (D-\delta\Delta)/\vartheta^4\big), \end{cases}$$

so wird

$$(27)\quad (n_d^2-1)/(1-\Delta) - (n^2-1) = -(\beta+\gamma/\vartheta^2+\delta/\vartheta^4)\Delta$$

oder

$$(28)\quad (n_d^2-1)/\varrho_d - (n^2-1)/\varrho = -(\beta+\gamma/\vartheta^2+\delta/\vartheta^4)\Delta/\varrho,$$

und dabei

$$(28')\quad \beta = 4\pi\sum_k M_k b_k,\ \gamma = 8\pi\sum_k M_k b_k\vartheta_k^2,\ \delta = 12\pi\sum_k M_k b_k\vartheta_k^4.$$

Ganz analoges gilt für die einer thermischen Dilatation entsprechende Differenz $(n'^2-1)/\varrho' - (n^2-1)/\varrho$.

Liegen die $\vartheta_k$ nahe beisammen, so ist angenähert $\gamma = 2\beta\vartheta_k^2$, $\delta = 3\beta\vartheta_k^4$, — Beziehungen, die streng gültig sind, wenn nur *eine* Art Elektronen ($k$) vorhanden ist.

Allgemeiner ist der folgende, in den letzten Formeln enthaltene Satz:

*Haben, was als das Normale bezeichnet werden kann, die den verschiedenen Elektronengattungen ($k$) entsprechenden Parameter $b_k$ bez. $f_k$ gleiche Vorzeichen, so bewahren die Differenzen*

$$(n_d^2-1)/\varrho_d - (n^2-1)/\varrho \text{ bez. } (n'^2-1)/\varrho' - (n^2-1)/\varrho$$

*bei wechselnden Farben ebenfalls ihre Vorzeichen, während ihre absoluten Werte mit abnehmender Schwingungsperiode zunehmen. In diesem Falle sind negative $b_k$ bez. $f_k$ mit einer Zunahme, positive mit einer Abnahme der relativen Dispersion infolge einer mechanischen oder thermischen Dilatation verbunden. —*

Für manche Zwecke ist eine etwas andere Behandlung unserer Ausgangsformeln (15) und (16) der vorstehend entwickelten vorzuziehen.

Wegen der erfahrungsmässig immer sehr kleinen Werte der $\beta_{sr}$ kann man im Gebiete merklicher Durchsichtigkeit nach ihnen entwickeln und bei den Gliedern erster Ordnung abbrechen, also schreiben

$$(29)\quad n_r^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2(1-\Delta)\sum_s\left(\frac{N_s e_s^2}{k_s\vartheta^2 - m_s} - \frac{N_s e_s^2 \beta_{sr} k_s \vartheta^2}{(k_s\vartheta^2 - m_s)^2}\right),$$

$$(30)\quad n^2 = 1 + 4\pi\vartheta^2\sum_s\frac{N_s e_s^2}{k_s\vartheta^2 - m_s}.$$

Bei Beschränkung auf die erste Potenz der linearen Dilatationen giebt dies dann weiter

$$(31)\quad n_r^2 - n^2 = -[(n^2 - 1 + P')\Delta + (P - P')\delta_r],$$

wobei

$$(32)\quad \begin{cases} 4\pi\vartheta^4\sum_s\frac{N_s k_s e_s^2 p_s}{(k_s\vartheta^2 - m_s)^2} = P, \\ 4\pi\vartheta^4\sum_s\frac{N_s k_s e_s^2 p_s'}{(k_s\vartheta^2 - m_s)^2} = P' \end{cases}$$

gesetzt ist. Wegen der sehr nahen Gültigkeit der Beziehungen

$$(33)\quad n_r^2 - n^2 = -n^4(\omega_r^2 - \omega^2)/v^2 = -2n^3(\omega_r - \omega)/v,$$

stimmt die Formel (31) sowohl mit dem von Fr. Neumann[1]), als mit dem von Fr. Pockels[2]) gemachten Ansatz überein.

Im Falle allseitig gleicher Dilatation geht (31) bei Einführung der Abkürzung $\frac{1}{3}(P + 2P') = Q$ über in

$$(34)\quad n_d^2 - n^2 = -[(n^2 - 1) + Q]\Delta,$$

und wenn die Dilatation durch eine Temperaturänderung hervorgebracht ist, nach (14) in

$$(35)\quad n'^2 - n^2 = -[(n^2 - 1) + T]\Delta,$$

wobei $T$ durch dieselbe Formel (32) definirt ist wie $P$, darin nur $p_s$ mit $f_s$ vertauscht.

---

1) Fr. Neumann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 1. 1848; Pogg. Ann. 54. p. 449. 1841.

2) Fr. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 144. 1889.

Führt man die Dichten $\varrho$, $\varrho_d$ vor und nach der Deformation, $\varrho'$ nach der Erwärmung ein, so kann man die Formeln (34) und (35) wegen $1 - \Delta = \varrho_d/\varrho$ bez. $= \varrho'/\varrho$ auch schreiben:

$$(36) \qquad (n_d^2 - 1)/\varrho_d - (n^2 - 1)/\varrho = Q(\varrho_d - \varrho)/\varrho\,\varrho_d,$$

$$(37) \qquad (n'^2 - 1)/\varrho' - (n^2 - 1)/\varrho = T(\varrho' - \varrho)/\varrho\,\varrho'.$$

Es messen sonach die Parameter $Q$ und $T$ die Abweichungen der Brechungsindices von dem Newton'schen Gesetz $(n^2 - 1)/\varrho = \text{const.}$ bei mechanischer und thermischer Dilatation.

Die Formeln (36) und (37) stellen durch ihre formale Uebereinstimmung mit (28) die Verbindung mit der früheren Betrachtungsweise her. In der That nimmt bei der dort eingeführten Annäherung $Q$ (und ebenso $T$) die Gestalt $\beta + \gamma/\vartheta^2 + \delta/\vartheta^4$ an.

4. *Zahlwerte für Flüssigkeiten.* Für einige *Flüssigkeiten* gestatten Beobachtungen über die Veränderung des Brechungsindex durch Compression, welche die Herren Röntgen und Zehnder[1]) angestellt haben, die Bestimmung der nicht uninteressanten Constanten $Q = \frac{1}{3}(P + 2P')$.

Die genannten Beobachter bezeichnen den einer Atmosphäre Druck entsprechenden Wert von $-\Delta$ als die „Compressibilität" $\mu$ der Flüssigkeit und teilen zusammengehörige Werte von $n$, $n_d - n$ und $\mu$ für eine Reihe von Flüssigkeiten mit. Berechnet man mit diesen Zahlen für die betreffenden Flüssigkeiten die Constante $Q$, so erhält man folgende Tabelle.

| | $n$ | $(n_d - n) \cdot 10^6$ | $\mu \cdot 10^6$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| Wasser | 1,335 | 15,26 | 46,2 | 0,105 |
| Schwefelkohlenstoff | 1,630 | 65,02 | 89,5 | 0,717 |
| Benzol | 1,503 | 50,00 | 91,7 | 0,380 |
| Aethyläther | 1,355 | 61,65 | 163,8 | 0,186 |
| Methylalkohol | 1,330 | 41,03 | 119,5 | 0,234 |
| Aethylalkohol | 1,362 | 42,16 | 111,4 | 0,175 |
| n-Propylalkohol | 1,387 | 39,29 | 96,9 | 0,166 |
| Isopropylalkohol | 1,380 | 41,17 | 103,2 | 0,230 |
| n-Butylalkohol | 1,401 | 38,20 | 90,5 | 0,107 |
| Isobutylalkohol | 1,397 | 41,16 | 98,4 | 0,194 |
| Amylalkohol | 1,409 | 39,15 | 90,4 | 0,115 |

1) W. C. Röntgen u. L. Zehnder, Wied. Ann. 44. p. 24. 1891.

Diese Zusammenstellung ergiebt für alle untersuchten Flüssigkeiten die fragliche Constante positiv.

Nun ist aber

$$Q = \tfrac{4}{3}\pi\vartheta^4 \sum_s \frac{N_s k_s e_s^2 b_s}{(k_s\vartheta^2 - m_s)^2} \tag{38}$$

und es folgt daraus im Falle nur *einer* Elektronengattung, dass für diese $b_s = \frac{1}{3}(p_s + 2p_s')$ gleichfalls positiv sein muss. Bei mehr Elektronengattungen wird man daher dies Vorzeichen als die *Regel*, das Gegenteil als die Ausnahme, oder die $b_s$ *im Mittel* als positiv bezeichnen dürfen.

Ferner ist für allseitig gleichen *Druck* $\beta_{sr} = \beta_s = b_s\Delta$; somit ist also bei Annahme des Vorstehenden der Regel nach $\beta_s < 0$. Dies ergiebt nach (6), dass jedenfalls bei den untersuchten Flüssigkeiten, aber wahrscheinlich allgemeiner, *die quasielastischen Kräfte, welche die Elektronen erfahren, durch eine Compression im Mittel abnehmen, die Stabilität der Elektronenbewegung um die Ruhelage also geringer wird.* —

Für den Fall der Dilatation infolge einer *Temperaturänderung unter constantem Druck* liegen zahlreiche Beobachtungen über die gleichzeitige Veränderung von Dichte und Brechungsindex von Flüssigkeiten vor, sodass man die ihnen entsprechenden Parameter $T$ daraus berechnen kann. Der Verlauf der Resultate für $T$ mit wechselnder Farbe ist indessen bei vielen von ihnen wenig regelmässig, sodass man zweifeln möchte, ob die Messungen wirklich die Genauigkeit besitzen, die der mitgeteilten Ziffernzahl entspricht. Fehler in der fünften Ziffer von $n$ modificiren aber im allgemeinen schon die zweite Ziffer von $T$ ganz bedeutend.

Ich teile im Folgenden eine Anzahl ziemlich willkürlich herausgegriffener Zahlenreihen nach dem Tabellenwerk von Landolt und Börnstein (2. Aufl., Berlin 1894) mit, in denen die benutzten Temperaturen mit $t_1$, $t_2$, die zugehörigen Dichten und Brechungsindices mit $\varrho_1$, $\varrho_2$ und $n_1$, $n_2$ bezeichnet sind. Die Farben, auf welche die letzteren, sowie der Wert $T$ sich beziehen, sind durch die charakteristischen Linien des Sonnenspectrums oder eines Emissionsspectrums bezeichnet. Die Namen der Beobachter sind beigefügt.

Anilin (Weegmann).

$t_1 = 12°$, $\varrho_1 = 1{,}02877$; $t_2 = 28°$, $\varrho_2 = 1{,}01513$.

| | $K$ | $H_\alpha$ | $Na$ | $H_\beta$ | $H_\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,57612 | 1,58344 | 1,59046 | 1,60848 | 1,62487 |
| $n_2 =$ | 1,56815 | 1,57509 | 1,58217 | 1,59975 | 1,61586 |
| $T =$ | 0,406 | 0,483 | 0,454 | 0,525 | 0,563 |

Acetylendibromid (Weegmann).

$t_1 = 15°$, $\varrho_1 = 2{,}23994$; $t_2 = 25°$, $\varrho_2 = 2{,}21745$.

| | $C$ | $D$ | $F$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,54194 | 1,54666 | 1,55854 | 1,56864 |
| $n_2 =$ | 1,53604 | 1,54068 | 1,55243 | 1,56245 |
| $T =$ | 0,431 | 0,447 | 0,463 | 0,469 |

Aethylalkohol (Korten).

$t_1 = 0°$, $\varrho_1 = 0{,}8079$; $t_2 = 20°$, $\varrho_2 = 0{,}7910$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,36766 | 1,36946 | 1,37394 | 1,37734 |
| $n_2 =$ | 1,35960 | 1,36138 | 1,36574 | 1,36904 |
| $T =$ | 0,177 | 0,179 | 0,186 | 0,193 |

Aethylenbromid (Weegmann).

$t_1 = 15°$, $\varrho_1 = 2{,}18713$; $t_2 = 25°$, $\varrho_2 = 2{,}16640$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,53680 | 1,54074 | 1,55083 | 1,55917 |
| $n_2 =$ | 1,53113 | 1,53503 | 1,54502 | 1,55320 |
| $T =$ | 0,473 | 0,479 | 0,495 | 0,530 |

Benzol (Weegmann).

$t_1 = 12°$, $\varrho_1 = 0{,}88712$; $t_2 = 28°$, $\varrho_2 = 0{,}87077$.

| | $K$ | $H_\alpha$ | $Na$ | $H_\beta$ | $H_\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,49658 | 1,50168 | 1,50676 | 1,51847 | 1,52897 |
| $n_2 =$ | 1,48650 | 1,49157 | 1,49612 | 1,50807 | 1,51824 |
| $T =$ | 0,394 | 0,387 | 0,463 | 0,402 | 0,444 |

Jodbenzol (Gladstone).

$t_1 = 7°$, $\varrho_1 = 1{,}8537$; $t_2 = 22{,}2°$, $\varrho_2 = 1{,}8300$.

| | $A$ | $D$ | $F$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,6129 | 1,6275 | 1,6450 | 1,6775 |
| $n_2 =$ | 1,6054 | 1,6197 | 1,6374 | 1,6699 |
| $T =$ | 0,283 | 0,232 | 0,245 | 0,227 |

Methylaconat (Knops).

$t_1 = 16°$, $\varrho_1 = 1{,}12676$; $t_2 = 24°$, $\varrho_2 = 1{,}11720$.

| | $H_\alpha$ | $Na$ | $H_\beta$ | $H_\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,44296 | 1,44582 | 1,45273 | 1,45859 |
| $n_2 =$ | 1,43957 | 1,44242 | 1,44926 | 1,45511 |
| $T =$ | 0,069 | 0,067 | 0,076 | 0,072 |

Schwefelkohlenstoff (Gladstone).

$t_1 = 1{,}5°$, $\varrho_1 = 1{,}2909$; $t_2 = 30°$, $\varrho_2 = 1{,}2494$.

| | *A* | *B* | *D* | *F* | *G* |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,6227 | 1,6288 | 1,6417 | 1,6672 | 1,7159 |
| $n_2 =$ | 1,6026 | 1,6087 | 1,6213 | 1,6458 | 1,6922 |
| $T =$ | 0,383 | 0,370 | 0,375 | 0,425 | 0,568 |

Thiophen (Knops).

$t_1 = 16°$, $\varrho_1 = 1{,}06895$; $t_2 = 24°$, $\varrho_2 = 1{,}05966$.

| | $H_\alpha$ | *Na* | $H_\beta$ | $H_\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,52618 | 1,53109 | 1,54357 | 1,55441 |
| $n_2 =$ | 1,52121 | 1,52596 | 1,53839 | 1,54926 |
| $T =$ | 0,412 | 0,448 | 0,452 | 0,457 |

Vinyltribromid (Weegmann).

$t_1 = 15°$, $\varrho_1 = 2{,}58999$; $t_2 = 25°$, $\varrho_2 = 2{,}56799$.

| | $H_\alpha$ | *Na* | $H_\beta$ | $H_\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,58714 | 1,59174 | 1,60342 | 1,61337 |
| $n_2 =$ | 1,58176 | 1,58631 | 1,59785 | 1,60762 |
| $T =$ | 0,488 | 0,499 | 0,529 | 0,578 |

Wasser (van der Willigen).

$t_1 = 20°$, $\varrho_1 = 0{,}998235$; $t_2 = 30°$, $\varrho_2 = 0{,}995674$.

| | *A* | *C* | *D* | *F* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,32928 | 1,33151 | 1,33336 | 1,33752 | 1,34383 |
| $n_2 =$ | 1,32814 | 1,33037 | 1,33214 | 1,33623 | 1,34260 |
| $T =$ | 0,414 | 0,409 | 0,489 | 0,556 | 0,482 |

Wasser (Walter).

$t_1 = 12°$, $\varrho_1 = 0{,}999530$; $t_2 = 20°$, $\varrho_2 = 0{,}998295$.

| | *A* | *C* | *D* | *F* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 =$ | 1,32984 | 1,33208 | 1,33395 | 1,33812 | 1,34449 |
| $n_2 =$ | 1,32925 | 1,33149 | 1,33336 | 1,33753 | 1,34390 |
| $T =$ | 0,442 | 0,439 | 0,435 | 0,428 | 0,417 |

Diese Tabellen lassen zuverlässig erkennen, dass *für alle herangezogenen Flüssigkeiten T positiv ist*, und da die getroffene Auswahl ganz willkürlich vorgenommen ist, so darf man es als sehr wahrscheinlich bezeichnen, dass *alle* Flüssigkeiten sich so verhalten. Hieraus folgt dann in der p. 469 erörterten Weise, *dass die quasielastischen Kräfte, welche die Elektronen einer Flüssigkeit erfahren, bei einer Erwärmung unter constantem*

*Druck im Mittel zunehmen, die Stabilität der Elektronenbewegung also grösser wird.*

Die Combination der bei mechanischer und bei thermischer Einwirkung gefundenen Zahlen gestattet mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit die Wirkung einer Erwärmung bei constant erhaltenem Volumen abzuleiten, indem man die thermische Dilatation durch eine mechanische Compression compensirt denkt. Die hierbei auftretende Differenz $T-Q$ lässt sich für einige Flüssigkeiten und für Natriumlicht aus den Tabellen auf p. 468 und p. 470 entnehmen. Man erhält für

| | Wasser | Schwefelkohlenstoff | Benzol | Aethylalkohol |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | 0,435 bis 0,489 | 0,375 | 0,463 | 0,179 |
| $Q$ | 0,105 | 0,717 | 0,383 | 0,175 |
| $T-Q$ | +0,330 bis 0,384 | −0,342 | +0,080 | +0,004 |

Es kommen hiernach sowohl positive als negative Werte der Differenz $T-Q$ vor, woraus zu schliessen, dass eine Erwärmung bei constantem Volumen die quasielastische Kraft ebensowohl zu vergrössern, als zu verkleinern vermag. Bei Aethylalkohol übt diese Art der Erwärmung überhaupt keine merkliche Einwirkung.

Minder zuverlässig als das Vorzeichen lässt die Tabelle auf p. 470 das Gesetz der Veränderung der $T$ mit der Farbe erkennen. *Alles in allem genommen erscheint aber die Zunahme von T mit abnehmender Periode als Regel;* die eine Abnahme, die sich bei Wasser nach den Walter'schen Beobachtungen findet, ist im directem Widerspruch mit dem Resultat der Messungen van der Willigen's an derselben Substanz, und daher von geringem Gewicht; die Zusammenstellung der beiden Zahlenreihen zeigt recht deutlich, welche Rolle bei der angeregten Frage noch Beobachtungsfehler spielen. Ob die einzige noch übrige Ausnahme bei Jodbenzol nicht auch auf Beobachtungsfehlern beruht, muss die Zukunft lehren; unregelmässig ist der Gang von $T$ bei dieser Substanz jedenfalls.

*Wie die Zunahme der Werte T mit abnehmender Periode in Verbindung mit der Abnahme der relativen Dispersion von der Theorie aus zu verstehen ist, ergiebt sich aus dem zu den Formeln (28) und (37) Gesagten.* Sehr merkwürdig ist der fast völlig constante und ausserordentlich kleine Wert von $T$ bei Methyl-

aconat, der nach (28′) auf Absorptionsstreifen hinweist, die so weit im Ultravioletten liegen, dass $2\,\vartheta_k^2/\vartheta^2$ und $3\,\vartheta_k^4/\vartheta^4$ für sichtbare Farben neben Eins vernachlässigt werden können, und der überdies auf eine nur minimale Abhängigkeit der quasielastischen Kraft von der Temperatur schliessen lässt.

5. *Zahlwerte für Gase.* Für *Gase* kann man wegen der nur sehr wenig von Eins abweichenden $n_d$ und $n'$ die Formeln (36) und (37) auch schreiben:

$$(39) \qquad (n_d - 1)/\varrho_d - (n-1)/\varrho = Q(\varrho_d - \varrho)/2\,\varrho\,\varrho_d,$$

$$(40) \qquad (n' - 1)/\varrho' - (n-1)/\varrho = T(\varrho' - \varrho)/2\,\varrho\,\varrho'.$$

Die Parameter $Q$ und $T$ messen hier also auch die Abweichungen der Brechungsindices von dem Beer'schen Gesetz $(n-1)/\varrho = \text{const.}$ Nach der gebräuchlichen molecularen Vorstellung wird man bei Gasen, die der Verflüssigung nicht sehr nahe sind, für die durch eine Dilatation bewirkte Aenderung der quasielastischen Kräfte und somit für die Parameter $Q$ *äusserst geringe* Werte erwarten dürfen. Dagegen könnte der in $T$ steckende Effect der Auflockerung der Molecüle durch eine Temperaturänderung beträchtlicher sein. Bei hohen Temperaturen, wie sie erforderlich sind, um Gase zum Leuchten zu bringen, wird auch der letztere Effect sehr gering sein, da unter diesen Umständen die Dissociation der Molecüle in ihre Atome weit fortgeschritten ist, und die Auflockerung ihr Ziel, den Zerfall, bereits erreicht hat.

Aus den vorliegenden *Beobachtungen* lassen sich Schlüsse auf die Werte der $Q$ und $T$ nur in sehr beschränktem Maasse ziehen.

Seine Messungen über die Wirkung des *Druckes bei constanter Temperatur* hat Hr. Mascart durch die Formel dargestellt[1])

$$(41) \qquad n - 1 = A\,p\,(1 + \alpha\,p),$$

worin $p$ den Druck, $A$ und $\alpha$ Constanten bezeichnen; $A$ ist stets positiv, $\alpha$ nur bei Wasserstoff negativ. Nun gilt nach der Gleichung von van der Waals in bekannter Bezeichnung

$$p = \frac{R\,\Theta\,\varrho}{1 - b\,\varrho} - a\,\varrho^2,$$

oder in zulässiger Annäherung

$$(42) \qquad p = R\,\Theta\,\varrho\,(1 + b\,\varrho) - a\,\varrho^2.$$

1) E. Mascart, Ann. de l'Éc. Norm. sup. (2) 6. p. 9. 1877.

Man kann demgemäss die Mascart'sche Formel auch schreiben, wenn man die Kleinheit von $\alpha$ berücksichtigt:

$$n - 1 = A R \Theta \varrho \left(1 + \varrho (\alpha R \Theta + b - a/R\Theta)\right),$$

woraus dann folgt

$$(43) \qquad \frac{n_d - 1}{\varrho_d} - \frac{n-1}{\varrho} = (\varrho_d - \varrho) A R^2 \Theta^2 \left(\alpha + \frac{b R \Theta - a}{R^2 \Theta^2}\right).$$

Das Vorzeichen von $Q$ ist hiernach mit demjenigen von $\alpha + (b R \Theta - a)/R^2 \Theta^2$ identisch. Aber alle drei Constanten $\alpha$, $a$, $b$ sind doch so wenig zuverlässig bestimmt, dass von einer Berechnung hier abgesehen werden mag. In jedem Falle ist nämlich der Wert des sie enthaltenden Ausdruckes von Null äusserst wenig verschieden, sodass eine mässige Unsicherheit der drei Parameter selbst das *Vorzeichen* des Resultates unbestimmt macht. Die Herren Chappuis und Rivière[1]) haben in der That aus ihren Beobachtungen über Kohlensäure auf das *Verschwinden* des fraglichen Gliedes (woraus auch $Q = 0$ folgen würde) und demgemäss auf die strenge Gültigkeit der Formel $(n - 1)/\varrho = \text{const.}$ geschlossen. —

Seine Beobachtungen über den Einfluss der *Temperatur bei constantem Druck* stellt Hr. Mascart durch die Gleichung dar

$$(44) \qquad n' - 1 = \frac{n-1}{1 + m t},$$

wobei $t$ die Temperaturänderung bezeichnet. Nun ist

$$\varrho/\varrho' = 1 + \gamma t,$$

unter $\gamma$ den Ausdehnungscoefficienten des Gases bei constantem Druck verstanden; die Gleichung (40) lässt sich somit auch schreiben

$$(45) \qquad n' - 1 = \frac{(n-1) - \frac{1}{2} T \gamma t}{1 + \gamma t}.$$

Im Folgenden sind die aus den Mascart'schen Beobachtungen folgenden Constanten $m$ den bekannten Regnault'schen Werten für $\gamma$ gegenübergestellt:

1) J. Chappuis u. P. Rivière, Ann. de Chim. et de Phys. (6) **14.** p. 5. 1888.

| | $m$ | $\gamma$ |
|---|---|---|
| Stickstoff | 0,00382 | 0,00367 |
| Wasserstoff | 378 | 366 |
| Kohlenoxyd | 367 | 367 |
| Kohlensäure | 406 | 371 |
| Stickoxydul | 388 | 371 |
| Schweflige Säure | 460 | 390 |

Soweit die Mascart'schen Beobachtungen zuverlässig sind, ist hiernach $m$ bei den beobachteten Gasen grösser als $\gamma$, also $T$ positiv — in Uebereinstimmung mit den bei Flüssigkeiten oben abgeleiteten Resultaten. Doch frappirt in einzelnen Fällen die Grösse der Abweichungen zwischen $m$ und $\gamma$, und man möchte einen definitiven Schluss bis nach Anstellung weiterer Beobachtungen vertagen. Von grosser Bedeutung für die Aufklärung der hier vorliegenden Verhältnisse würden directe Messungen der Veränderlichkeit von $n$ in Gasen mit der Temperatur bei constantem Volumen sein.

6. *Zahlwerthe für feste Körper.* Vollständige Beobachtungsreihen, die für feste isotrope Körper die Constanten $P$ und $P'$ gesondert zu bestimmen gestatten, sind kaum vorhanden. Zwar sind die Parameter der durch Druck erregten Doppelbrechung für einige Glassorten bestimmt, aber es fehlen entweder die Elasticitätsconstanten oder aber die Brechungsindices für die betreffenden Körper. Nach den Angaben, die Hr. Pockels[1]) gemacht hat, wird man indessen für die von ihm untersuchte Glassorte und für Natriumlicht ein der Wahrheit ziemlich nahe kommendes Wertsystem erhalten, wenn man schreibt

$$n = 1{,}52, \quad \frac{n^2 - 1 + P}{n^4} = 0{,}103, \quad \frac{n^2 - 1 + P'}{n^4} = 0{,}186.$$

Hieraus folgt $P = -0{,}76$, $P' = -0{,}32$, beide also *negativ*, und gleiches gilt für den im Falle allseitig gleichen Druckes auftretenden Parameter $Q = \frac{1}{3}(P + 2P')$.

Genauere Daten giebt Hr. Pockels[2]) für einige Krystalle des regulären Systems, die sich optisch isotrop verhalten.

Unter ihrer Benutzung und bei Heranziehung der bekannten Werte von $n$ erhält man für Natriumlicht folgende Tabelle.

1) F. Pockels, Wied. Ann. **37**. p. 389ff. 1889.
2) F. Pockels, Wied. Ann. **39**. p. 440ff. 1890.

| | $n$ | $(n^2-1+P)/n^4$ | $(n^2-1+P')/n^4$ | $P$ | $P'$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Flussspat | 1,434 | $0{,}055_5$ | 0,228 | −0,811 | −0,091 | −0,331 |
| Steinsalz | 1,544 | 0,137 | 0,178 | −0,605 | −0,373 | −0,450 |
| Sylvin | 1,490 | 0,229 | 0,170 | −0,093 | −0,381 | −0,285 |

Die Werte für Sylvin besitzen eine geringere Sicherheit, als diejenigen für die beiden ersten Substanzen.

*Für diejenigen festen und optisch isotropen Körper, für die bis jetzt vollständige Beobachtungsreihen vorliegen, finden sich also die Parameter $P$ und $P'$ und daher auch $Q$ negativ.* Hieraus ergiebt sich in der p. 469 erörterten Weise für die quasi-elastische Kraft das umgekehrte Verhalten, wie bei Flüssigkeiten, nämlich *bei ausgeübter allseitiger Compression eine Intensitätszunahme der Kraft und somit eine Vergrösserung der Stabilität der Elektronenbewegung.* Dieser Gegensatz ist wohl überraschend und nicht ohne Interesse. —

Was die Einwirkung einer *Temperatur*änderung auf den Brechungsindex optisch-isotroper fester Körper angeht, so kommen hier insbesondere die ausführlichen Beobachtungsreihen in Betracht, die Hr. Pulfrich[1]) mitgeteilt hat. Ich wähle aus denselben einige typische Körper aus und berechne aus den Aenderungen $n' - n$ der Brechungscoefficienten für 1° C. Temperaturdifferenz und aus dem Coefficienten $\alpha$ der thermischen cubischen Dilatation die ihnen entsprechenden Constanten $T$ für einige Fraunhofer'sche Linien.

*S* 57. Schwerstes Silicatflint, $\alpha = 2{,}804 \cdot 10^{-5}$.

| | *C* | *D* | *F* | *G'* |
|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 1,9491 | 1,9625 | 1,9979 | 2,0303 |
| $(n'-n)\,10^5 =$ | 1,204 | 1,447 | 2,090 | 2,810 |
| $T =$ | −4,471 | −4,876 | −5,976 | −7,190 |

*O* 527. Baryt-Leichtflint, $\alpha = 2{,}696 \cdot 10^{-5}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 1,5389 | 1,5718 | 1,6529 | 1,7187 |
| $(n'-n)\,10^5 =$ | −0,008 | +0,014 | +0,080 | +0,137 |
| $T =$ | −1,359 | −1,488 | −1,831 | −2,127 |

1) C. Pulfrich, Wied. Ann. 45. p. 609. 1892. Die in dieser wichtigen Arbeit ausgesprochenen Anschauungen berühren sich — ob sie gleich die Elektronenhypothese nicht benutzen — vielfach mit den oben entwickelten. Die Absorption aller der von Hrn. Pulfrich beobachteten Körper ist im sichtbaren Spectrum so minimal, dass die Anwendung der früheren Formeln unbedingt gestattet ist.

§ 40. Didymhaltiges Phosphat-Crown, $\alpha = 2{,}613 \cdot 10^{-5}$.

| | *C* | *D* | *F* | *G'* |
|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 1,5366 | 1,5619 | 1,6211 | 1,6680 |
| $(n' - n)\,10^5 =$ | −0,314 | −0,305 | −0,246 | −0,237 |
| $T =$ | −0,992 | −1,075 | −1,323 | −1,505 |

Steinsalz, $\alpha = 12{,}12 \cdot 10^{-5}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 1,5403 | 1,5440 | 1,5530 | 1,5605 |
| $(n' - n)\,10^5 =$ | −3,749 | −3,739 | −3,648 | −3,585 |
| $T =$ | −0,418 | −0,430 | −0,481 | −0,511 |

Sylvin, $\alpha = 11{,}41 \cdot 10^{-5}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 1,4872 | 1,4904 | 1,4983 | 1,5049 |
| $(n' - n)\,10^5 =$ | −3,681 | −3,641 | −3,605 | −3,557 |
| $T =$ | −0,253 | −0,270 | −0,298 | −0,326 |

Flussspat, $\alpha = 5{,}734 \cdot 10^{-5}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 1,4385 | 1,4399 | 1,4431 | 1,4456 |
| $(n' - n)\,10^5 =$ | −1,220 | −1,206 | −1,170 | −1,142 |
| $T =$ | −0,460 | −0,470 | −0,494 | −0,515 |

Der Verlauf der berechneten $T$ ist im Vergleich mit den bei Flüssigkeiten erhaltenen Resultaten sehr regelmässig, was für die grosse Zuverlässigkeit der Pulfrich'schen Zahlen spricht.

Da die berechneten Beobachtungsreihen ganz willkürlich aus der Gesamtheit der überhaupt vorliegenden durchaus analog verlaufenden herausgegriffen sind, so kann man das an ihnen Hervortretende mit einer grossen Wahrscheinlichkeit generalisiren und die Resultate der vorstehenden Tabelle dahin zusammenfassen:

*Die von Hrn. Pulfrich beobachteten Glassorten und regulären Krystalle, deren Brechungsindices mit wachsender Temperatur teils wachsen, teils abnehmen, ergeben gleichwohl sämtlich negative Werte der Parameter T, und somit bei Temperaturerhöhungen unter constantem Druck im Mittel eine Abnahme der quasielastischen Kräfte, welche die Elektronen dieser Körper erfahren, im vollen Gegensatz zu dem bei Flüssigkeiten Nachgewiesenen. Die absoluten Werte von T wachsen mit abnehmender Schwingungsperiode, während die relative Dispersion mit steigender Temperatur zunimmt, wie dies nach dem zu den Formeln (28) und (37) Gesagten verständlich ist.*

Für die Erscheinungen bei Temperaturänderungen unter constantem Volumen können die Differenzen $T - Q$ als maassgebend betrachtet werden; leider sind dieselben nur für wenige

Körper angebbar. Für Natriumlicht folgt aus den Angaben auf p. 476 u. 477 für

| | Steinsalz | Sylvin | Flussspat |
|---|---|---|---|
| $T =$ | $- 0{,}430$ | $- 0{,}270$ | $- 0{,}470$ |
| $Q =$ | $- 0{,}450$ | $- 0{,}285$ | $- 0{,}381$ |
| $T - Q =$ | $+ 0{,}020$ | $+ 0{,}015$ | $- 0{,}189$ |

Die äusserst kleinen (positiven) Werte der Differenz $T-Q$ bei Steinsalz und Sylvin sind sehr merkwürdig; sie würden eine kaum merkliche Zunahme der quasielastischen Kraft bei reiner Temperaturwirkung ausdrücken. Der für Flussspat erhaltene Wert weicht nach Vorzeichen und Grössenordnung von den vorigen auffallend ab.[1])

### III. Anwendung auf die Spectralbereiche merklicher Absorption.

7. *Die allgemeinen Absorptionsformeln.* Für Spectralbereiche merklicher Absorption liefert die allgemeine Formel (11) die folgenden Ausdrücke zur Bestimmung der Brechungsindices $n_r$ und der Absorptionsindices $\varkappa_r$:

$$(46)\quad \left\{ n_r^2(1-\varkappa_r^2) = 1 + 4\pi\vartheta^2(1-\Delta) \sum_s \frac{(k_s(1+\beta_{s,r})\vartheta^2 - m_s) N_s e_s^2}{(k_s(1+\beta_{s,r})\vartheta^2 - m_s)^2 + h_s^2\vartheta^2(1+\gamma_{s,r})^2}, \right.$$

$$(47)\quad \left\{ 2n_r^2\varkappa_r = 4\pi\vartheta^3(1-\Delta) \sum_s \frac{N_s h_s(1+\gamma_{s,r}) e_s^2}{(k_s(1+\beta_{s,r})\vartheta^2 - m_s)^2 + h_s^2\vartheta^2(1+\gamma_{s,r})^2}. \right.$$

Sie ergeben bei verschiedenen Hauptdilatationen $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ von einander verschiedene Werte $n_1\varkappa_1$, $n_2\varkappa_2$, $n_3\varkappa_3$, und somit neben der Doppelbrechung *Pleochroismus*, wie solcher in der That von verschiedenen Beobachtern bei mechanischer Deformation isotroper Körper nachgewiesen worden ist.[2])

Die quantitative Verwertung der Formeln bietet wegen ihrer Complication grosse Schwierigkeiten, und selbst die in der Regel zulässige Beschränkung auf so kleine Werte $\varkappa$, dass $\varkappa^2$ neben Eins vernachlässigt werden kann, belässt dem für die beobachteten Intensitäten maassgebenden Product $n\varkappa$ (der

1) Ein anderes Resultat scheinen die Beobachtungen von Dufet zu ergeben; vgl. Fr. Pockels, Wied. Ann. **37.** p. 389. 1889.

2) A. Kundt, Pogg. Ann. **151.** p. 125. 1874; M. v. Seherr-Thoss, Wied. Ann. **6.** p. 270. 1879.

Absorptionsconstanten) einen höchst unübersichtlichen Wert. Da indessen ausführliche Messungen über die gleichzeitige Aenderung von $n$ und $n\varkappa$, die allein eine *quantitative* Verwertung unserer Formeln erfordern würden, bisher kaum vorliegen, so wollen wir uns auf eine rein *qualitative* Discussion derselben beschränken. Dabei genügt es, den wichtigsten Fall allseitig gleicher Dilatation, sei es nun infolge von mechanischer oder von thermischer Einwirkung, ins Auge zu fassen.

Indem wir $\varkappa^2$ neben Eins vernachlässigen, kürzen wir die allgemeinen Formeln der Dispersionstheorie für $n$ und $\varkappa$ ab in

$$n^2 = 1 + \vartheta^2 \sum_s \frac{E_s (A_s \vartheta^2 - B_s)}{(A_s \vartheta^2 - B_s)^2 + C_s^2 \vartheta^2}, \tag{48}$$

$$2 n^2 \varkappa = \vartheta^3 \sum_s \frac{E_s C_s}{(A_s \vartheta^2 - B_s)^2 + C_s^2 \vartheta^2}. \tag{49}$$

Der Discussion unterwerfen wir insbesondere den Idealfall eines Mediums mit *nur einem* Absorptionsstreifen; die hier erhaltenen Resultate gestatten dann unter gewissen Voraussetzungen, wie unten zu zeigen, eine angenäherte Uebertragung auf Medien mit mehreren, durch merklich durchsichtige Bereiche getrennte Streifen.

Indem wir für den einzigen Absorptionsstreifen den Index $s$ *beseitigen*, setzen wir

$$A \vartheta^2 - B = \eta \tag{50}$$

und beschränken uns auf Bereiche, in denen $\eta$ klein ist neben $A \vartheta^2$ und $B$ selbst. Dann erhalten wir aus (48) und (49) durch Entwickelung

$$n^2 = 1 + \frac{E \eta}{C^2} \left(1 - \frac{A \eta^2}{B C^2} + \ldots\right), \tag{51}$$

$$2 n^2 \varkappa = \frac{E}{C} \sqrt{\frac{B}{A}} \left[1 + \frac{\eta}{2 B} - \eta^2 \left(\frac{A}{B C^2} + \frac{1}{8 B^2}\right) + \ldots\right]. \tag{52}$$

Bis auf Glieder zweiter Ordnung inclusive giebt dies für die Absorptionsconstante $n\varkappa$ die Gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} n\varkappa = \frac{E}{2C} \sqrt{\frac{B}{A}} \Big[1 &+ \tfrac{1}{2} \eta \left(\frac{1}{B} - \frac{E}{C^2}\right) \\ &- \eta^2 \left(\frac{A}{B C^2} + \frac{1}{8 B^2} + \frac{E}{4 B C^2} - \frac{3 E^2}{8 C^4}\right)\Big]. \end{aligned} \right. \tag{53}$$

Auf dieselbe Form einer nach Potenzen von $\eta$ fortschreitenden Reihe kann man natürlich den Ausdruck für $n\varkappa$ in

dem festgesetzten beschränkten Spectralbereich auch im Falle der Existenz *mehrerer* Absorptionsstreifen bringen. Es mag daher ihre Discussion zunächst *im allgemeinen* vorgenommen, und mögen dann erst die unserem Problem entsprechenden speciellen Werte in Betracht gezogen werden.

Der gefundene Ausdruck (53) für $n\varkappa$ hat die Form

$$n\varkappa = F(1 + U\eta - V\eta^2), \tag{54}$$

die durch die Substitution

$$\eta = U/2V + \Theta \tag{55}$$

übergeht in

$$n\varkappa = F(1 + U^2/4V - V\Theta^2). \tag{56}$$

Hieraus ergiebt sich, dass $n\varkappa$ ein Maximum oder ein Minimum für $\Theta = 0$, d. h. $\eta = U/2V$ erreicht, dessen Grösse ist

$$\overline{n\varkappa} = F(1 + U^2/4V); \tag{57}$$

damit ein Absorptions*streifen* zu stande kommt, muss $\overline{n\varkappa}$ der *Maximal*wert, also

$$V > 0$$

sein.

Mit $\vartheta$ steht $\Theta$ in der Beziehung, dass, wenn

$$\vartheta = \sqrt{B/A} + \delta \tag{58}$$

gesetzt wird, dann

$$\eta = 2\delta\sqrt{AB}, \quad \Theta = 2\delta\sqrt{AB} - U/2V \tag{59}$$

ist. *Die maximale Absorption liegt demgemäss bei*

$$\overline{\vartheta} = \sqrt{\frac{B}{A}} + \frac{U}{4V\sqrt{AB}}. \tag{60}$$

Es ist zu beachten, dass bei unserer Reihenentwickelung $\eta$ nicht nur neben $A\vartheta^2$ und $B$, sondern auch neben $C\sqrt{B/A}$ als klein erster Ordnung behandelt ist. Die vorstehenden Resultate verlangen somit, dass $U/2VB$ nicht nur neben Eins, sondern auch neben $C/\sqrt{AB}$ sich als eine Grösse erster Ordnung ergiebt.

Als *Breite* $\varphi$ des Absorptionsstreifens mag derjenige Zuwachs von $\vartheta$ bez. $\delta$ gelten, für den die *Annäherungs*formel (56) für $n\varkappa$ ein Wachsen von Null bis zum Maximum und darauffolgendes erneutes Abnehmen bis Null ergiebt, — eine Grösse,

die natürlich nur ein *ungefähres* Bild der wirklichen Ausdehnung des Streifens giebt.

Da nach (59) die Wurzeln der Gleichung $n\varkappa = 0$, d. h.

$$\Theta^2 = (4V + U^2)/4V^2,$$

gegeben sind durch

$$2\delta\sqrt{AB} = U/2V \pm \sqrt{4V + U^2}/2V,$$

so erhält man unmittelbar

$$\varphi = \sqrt{4V + U^2}/2V\sqrt{AB}. \quad (61)$$

—

8. *Medien mit nur einem Absorptionsstreifen.* Wir wollen nunmehr auf Grund der vorstehenden allgemeinen Beziehungen die für Medien mit nur einem Absorptionsstreifen gültige Formel (53) discutiren, in der ist

$$\begin{cases} F = \frac{E}{2C}\sqrt{\frac{B}{A}}, \quad U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{E}{C^2}\right), \\ V = \frac{A}{BC^2} + \frac{1}{8B^2} + \frac{E}{4BC^2} - \frac{3E^2}{8C^4}. \end{cases} \quad (62)$$

Um eine schwache, d. h. in Schichten von der Dicke einer Wellenlänge unmerkliche Absorption zu erhalten, muss $n\varkappa$ und somit $F$ eine sehr kleine Zahl sein. Auf $F$ lassen sich dann zurückführen die Glieder

$$\frac{EB}{C^2} = \frac{2F\sqrt{AB}}{C}, \quad \frac{E}{A} = \frac{2FC}{\sqrt{AB}}. \quad (63)$$

Solange $C/\sqrt{AB}$ weder sehr gross noch sehr klein ist, sind hiernach in den Ausdrücken (62) für $U$ und $V$ die mit $E$ bez. mit $E^2$ behafteten Glieder von erster, bez. von zweiter Ordnung in Bezug auf $F$. Das letzte Glied in dem Ausdruck für $V$ kann in jedem Falle fortgelassen werden, da es auch bei sehr kleinen oder sehr grossen $C/\sqrt{AB}$ neben dem ersten oder zweiten Gliede von mindestens zweiter Ordnung wird.

Verfahren wir demgemäss, so erhalten wir nach (57), (60) und (61):

$$\begin{cases} \overline{n\varkappa} = \frac{E}{2C}\sqrt{\frac{B}{A}}\left[1 + \frac{C^2 - 2EB}{16AB + 2C^2 + 4EB}\right], \\ \bar{\vartheta} = \sqrt{\frac{B}{A}}\left[1 + \frac{C^2 - EB}{8AB + C^2 + 2EB}\right], \\ \varphi = 2C\sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{\sqrt{16AB + 3C^2 + 2EB}}{(8AB + C^2 + 2EB)}. \end{cases} \quad (64)$$

Hierbei muss nach dem zu Formel (60) Gesagten das zweite Glied in dem Klammerausdruck für $\overline{\vartheta}$ neben $C/\sqrt{AB}$ eine Zahlgrösse mindestens erster Ordnung sein. Nach (63) ist

$$EB/C^2 = 2F.(\sqrt{AB}/C).$$

Hieraus folgt, dass, wenn $F$ und $C/\sqrt{AB}$ ***beide*** von ***erster*** Ordnung sind, die Formeln bis auf Glieder dritter Ordnung exclusive sich reduciren auf

$$(65)\qquad \begin{cases} \overline{n\varkappa} = \dfrac{E}{2C}\sqrt{\dfrac{B}{A}}\left(1 + \dfrac{C^2 - 2EB}{16AB}\right), \\ \overline{\vartheta} = \sqrt{\dfrac{B}{A}}\left(1 + \dfrac{C^2 - EB}{8AB}\right), \\ \varphi = \dfrac{C}{A}\left(1 - \dfrac{C^2 + 6EB}{32AB}\right); \end{cases}$$

ist dagegen $F$ von ***zweiter*** Ordnung, so wird noch einfacher

$$(66)\qquad \begin{cases} \overline{n\varkappa} = \dfrac{E}{2C}\sqrt{\dfrac{B}{A}}\left(1 + \dfrac{C^2}{16AB}\right), \\ \overline{\vartheta} = \sqrt{\dfrac{B}{A}}\left(1 + \dfrac{C^2}{8AB}\right), \\ \varphi = \dfrac{C}{A}\left(1 - \dfrac{C^2}{32AB}\right). \end{cases}$$

In beiden Fällen ist die oben gestellte Forderung erfüllt.

Grosse Werte des Verhältnisses $C/\sqrt{AB}$ sind mit der von uns benutzten Annäherung im allgemeinen im Widerspruch und müssen sonach hier ausser Betracht bleiben.

Diese Beschränkung ist indessen unbedenklich, da gerade der praktisch wichtigste Fall von ziemlich schmalen Absorptionsstreifen bei ihr berücksichtigt ist. In der That giebt das Verhältnis der beiden letzten Formeln

$$(67)\qquad \frac{\varphi}{\vartheta} = \frac{C}{\sqrt{AB}}\left(1 - \frac{5C^2}{32AB}\right);$$

wenn also $C/\sqrt{AB}$ eine kleine Zahl ist, so erstreckt sich auf einer $\vartheta$-Axe die merkliche Absorption nur auf eine Strecke, die klein erster Ordnung ist gegen den Abstand $\overline{\vartheta}$ vom Coordinatenanfang.

Ist $C/\sqrt{AB}$ so klein, dass man sein Quadrat neben Eins vernachlässigen kann, so wird

$$(68) \qquad \overline{n\varkappa} = \frac{E}{2C}\sqrt{\frac{B}{A}}, \qquad \overline{\vartheta} = \sqrt{\frac{B}{A}}, \qquad \frac{\varphi}{\overline{\vartheta}} = \frac{C}{\sqrt{AB}}.$$

Hier ist dann $\overline{\vartheta}$ von $C$ ganz unabhängig, $\overline{n\varkappa}$ nimmt mit wachsendem $C$ ab, $\varphi/\overline{\vartheta}$ hingegen zu.

9. *Medien mit mehreren getrennten Absorptionsstreifen.* Wir wenden uns nunmehr dem Falle zu, dass ausser dem betrachteten, ohne Index geführten Absorptionsstreifen ($o$) noch andere vorhanden sind, nehmen aber an, dass zwischen ihnen und dem betrachteten Streifen Spectralbereiche merklicher Durchsichtigkeit liegen. Unter Voraussetzung kleiner Werte $\varkappa$ ist dann nach (48) und (49) in der Nähe des Streifens ($o$):

$$(69) \qquad n^2 = 1 + \frac{E(A\vartheta^2 - B)}{(A\vartheta^2 - B)^2 + C^2\vartheta^2} + \vartheta^2 \sum \frac{E_s}{A_s\vartheta^2 - B_s},$$

$$(70) \qquad 2n^2\varkappa = \frac{EC^2\vartheta^2}{(A\vartheta^2 - B)^2 + C^2\vartheta^2}.$$

Bei erneuter Einführung der Bezeichnung

$$A\vartheta^2 - B = \eta$$

und bei Entwickelung erhält man dann bis auf zweite Ordnung inclusive

$$(71) \qquad n^2 = 1 + \frac{E\eta}{C^2} + \frac{B}{A}\sum \frac{E_s A_s}{N_s}\left[1 - \frac{A_s\eta}{N_s} + \frac{AA_sB_s\eta^2}{BN_s^2}\right],$$

wobei $N_s = A_sB - AB_s$ ist; ausserdem bleibt gemäss (52)

$$(72) \qquad 2n^2\varkappa = \frac{E}{C}\sqrt{\frac{B}{A}}\left(1 + \frac{\eta}{2B} - \left(\frac{A}{BC^2} + \frac{1}{8B^2}\right)\eta^2\right).$$

Wir nehmen wiederum

$$\frac{E}{2C}\sqrt{\frac{B}{A}} = F$$

als eine sehr kleine Grösse an und setzen ausserdem fest, dass an der Stelle $\eta = 0$ die Absorptionsstreifen ($s$) ein Gefälle in $n^2$ bewirken, das kleiner oder nur unerheblich grösser ist, als das von dem Streifen ($o$) selbst verursachte, sodass also die Dispersion nahe dem Streifen ($o$) entweder anomal bleibt oder doch wenigstens durch ihn stark modificirt wird. Das Entgegengesetzte könnte nur dann stattfinden, wenn einer

der Streifen ($s$) viel intensiver wäre, als ($o$), und ihm zugleich äusserst nahe läge. Die neue Annahme verlangt, dass die Ausdrücke

$$\frac{E}{C^2} \quad \text{und} \quad \frac{B}{A}\sum\frac{E_\varepsilon A_\varepsilon^2}{N_\varepsilon^2}$$

von gleicher Grössenordnung sind. Mit ihnen stimmt der Ordnung nach überein

$$B\sum\frac{E_\varepsilon A_\varepsilon^2 B_\varepsilon}{N_\varepsilon^2},$$

da $N_\varepsilon$ und $B_\varepsilon B$ nach den Annahmen auch gleiche Ordnung besitzen.

Bei Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung in Bezug auf $F$ nimmt dann $n\varkappa$ die frühere Form

$$n\varkappa = F_1(1 + U_1\eta - V\eta^2)$$

an, in der jetzt gilt

$$(73)\qquad \begin{cases} F_1 = F/R, \qquad U_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{H}{R^2}\right), \\ V_1 = \frac{A}{BC^2} + \frac{1}{8B^2} + \frac{H}{4BR^2} + \frac{K}{2R^2}\end{cases}$$

und gesetzt ist

$$(74)\qquad \begin{cases} \frac{E}{2C}\sqrt{\frac{B}{A}} = F, \qquad 1 + \frac{B}{A}\sum\frac{E_\varepsilon A_\varepsilon}{N_\varepsilon} = R^2, \\ \frac{E}{C^2} - \frac{B}{A}\sum\frac{E_\varepsilon A_\varepsilon^2}{N_\varepsilon^2} = H, \qquad \sum\frac{E_\varepsilon A_\varepsilon^2 B_\varepsilon}{N_\varepsilon^2} = K. \end{cases}$$

Damit die eingeführte Entwickelung zulässig ist, muss nach dem zu Formel (60) Gesagten $U_1/2V_1B$ neben $C/\sqrt{AB}$ eine Grösse erster Ordnung sein.

Nehmen wir demgemäss wie oben an, dass $F$ eine Grösse zweiter, $C/\sqrt{AB}$ eine Grösse erster Ordnung ist, während $R$ eine endliche Zahl (in der Regel nur wenig von Eins verschieden) ist, so wird bis auf erste Ordnung exclusive

$$U_1 = 1/2B,$$

bis auf zweite Ordnung exclusive

$$V_1 = A/BC^2,$$

und für $\vartheta$, $\varphi$ resultiren bis auf zweite Ordnung inclusive die früheren Formeln (66), während der Ausdruck für $\overline{n\varkappa}$ sich von dem dort angegebenen allein durch den Factor $1/R$ unterscheidet.

Wir können demnach sagen:

*Wenn von mehreren Elektronengattungen jede für sich einen schmalen Streifen mit schwacher Absorption hervorruft, und die verschiedenen Streifen hinlänglich voneinander entfernt liegen, so behalten, solange directe Kraftwirkungen zwischen den verschiedenen Elektronen in merklicher Weise nicht stattfinden, die Streifen Lage und Breite ungeändert bei, wenn die verschiedenen Elektronengattungen gleichzeitig zur Wirkung kommen.*

Eine Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Streifen tritt bei den gemachten Annahmen erst dann ein, wenn die Streifen nicht durch durchsichtige Bereiche getrennt sind, oder die oben eingeführte Voraussetzung gleicher Grössenordnung von

$$\frac{E}{C^2} \quad \text{und} \quad \frac{B}{A}\sum\frac{E_s A_s^2}{N_s^2}$$

hinwegfällt, letzteres nämlich erheblich grösser ist als ersteres. Die Bedeutung eines solchen Verhältnisses erhellt aus dem p. 483 Gesagten. Der Fall kann aber, als für uns nicht wesentlich in Betracht kommend, unberücksichtigt bleiben.

10. *Resultate der Beobachtung.* Bezüglich der Veränderung der Absorption infolge mechanischer oder thermischer Dilatation liegen nur wenig sichere Resultate vor, noch weniger für die erstere, als für die letztere Einwirkung. Zu quantitativen Vergleichungen zwischen Theorie und Erfahrung fehlt vorläufig jede Möglichkeit. Es kann sich, wie schon oben gesagt, nur darum handeln, das Qualitative der Beobachtungen von der Theorie aus zu verstehen.

Nach dem Inhalt des letzten Abschnittes kommen *für Medien mit nur einem schmalen Streifen schwacher Absorption* die Formeln (66) in Betracht, gilt also:

$$(75)\quad \begin{cases} \overline{n\varkappa} = \dfrac{E}{2C}\sqrt{\dfrac{B}{A}}\left(1+\dfrac{C^2}{16AB}\right), & \overline{\vartheta} = \sqrt{\dfrac{B}{A}}\left(1+\dfrac{C^2}{8AB}\right), \\ \varphi = \dfrac{C}{A}\left(1-\dfrac{C^2}{32AB}\right), & \dfrac{\sigma}{\vartheta} = \dfrac{C}{\sqrt{AB}}\left(1-\dfrac{5C^2}{32AB}\right). \end{cases}$$

Dabei ist im Falle einer thermischen Dilatation bei constantem Druck

$$(76)\quad \begin{cases} E = 4\pi(1-\Delta)Ne^2, \quad A = k(1+f\Delta), \\ B = m, \quad C = h(1+g\Delta), \end{cases}$$

wobei für den betrachteten Absorptionsstreifen der Index ($s$) wieder beseitigt ist.

Sind die Parameter $f$ und $g$ so klein, dass die Aenderungen der an sich kleinen Glieder $C^2/AB$ in den Klammern von (75) mit $\Delta$ vernachlässigt werden können, so ergiebt das System, wenn $\overline{n\varkappa}$, $\bar{\vartheta}$, $\varphi$ sich auf den Zustand *vor*, $\overline{n\varkappa}'$, $\bar{\vartheta}'$, $\varphi'$ sich auf den Zustand *nach* der Dilatation beziehen,

$$(77)\quad \begin{cases} \overline{n\varkappa}' = \overline{n\varkappa}(1-\Delta)\left(1-(g+\tfrac{1}{2}f)\Delta\right), \quad \bar{\vartheta}' = \bar{\vartheta}(1-\tfrac{1}{2}f\Delta), \\ \varphi' = \varphi\left(1+(g-f)\Delta\right), \quad \varphi'/\bar{\vartheta}' = (\varphi/\bar{\vartheta})\left(1+(g-\tfrac{1}{2}f)\Delta\right). \end{cases}$$

Analoge Formeln lassen sich für die Wirkung einer mechanischen Dilatation aufstellen.

Berücksichtigt man, dass nach p. 463 bei Medien mit nur einem Streifen der Parameter $f$ (bez. $b$) die Veränderung des Brechungsindex innerhalb der merklich durchsichtigen Spectralbereiche bestimmt, so ergiebt sich:

*Bei einem Medium mit nur einem Absorptionsstreifen gestattet die Untersuchung des Verhaltens von n in den merklich absorptionsfreien Gebieten bei einer Dilatation die Verschiebung des Absorptionsstreifens selbst zu bestimmen; sie ergiebt aber nichts über die Aenderung der Intensität und der Breite des Streifens infolge der Dilatation.*

*Je nachdem der Parameter f oder b einen positiven oder einen negativen Wert besitzt, wandert bei einer thermischen oder mechanischen Dilatation der Absorptionsstreifen nach der violetten oder der roten Seite des Spectrums.*

*Für Medien mit mehreren getrennten schmalen Absorptionsstreifen* bleiben diese Resultate im wesentlichen bestehen, nur tritt in dem Ausdrucke (75) für $\overline{n\varkappa}$ rechts der Nenner

$$R = \sqrt{1 + \frac{B}{A}\sum\frac{E_s A_s}{N_s}}$$

hinzu, dessen Aenderung bei einer Dilatation leicht zu bestimmen, aber von complicirter Form ist. Die Grösse der maximalen Absorption ist wegen dieser Abhängigkeit von einer grösseren Zahl von Parametern $f_s$ und $g_s$ zur Vergleichung der Erfahrung mit dem Resultat der Theorie wenig geeignet.

Was die hierfür wichtigste Grösse $\bar{\vartheta}$ und damit die *Lage* der Absorptionsstreifen angeht, so hat die dafür geltende

Formel (77[2]) bei *mehreren* Streifen insofern die frühere Bedeutung verloren, als die Beobachtung der Dispersion in den absorptionsfreien Gebieten im allgemeinen nur eine Function sämtlicher Parameter $f_h$ und nicht diese einzeln zu bestimmen gestattet. Es ist demgemäss auf p. 471 und p. 477 auch stets nur von dem Vorzeichen gesprochen worden, das diese Grössen nach den Dispersionsbeobachtungen für einen Körper „im Mittel" oder „der Regel nach" besitzen. Da aber in den Formeln (77) das einer einzelnen Elektronengattung entsprechende $f$ auftritt, so bleibt bei deren Anwendung auf die Beobachtung eine gewisse Unsicherheit bestehen.

Ueber die Temperatureinwirkung auf die Absorption *fester Körper* liegen Beobachtungen der Herren Pulfrich[1]), Reed[2]) und besonders Koenigsberger[3]) vor. Alle stimmen damit überein, dass bei diesen Körpern eine Temperatursteigerung eine Verschiebung der Absorptionsstreifen nach grossen Wellenlängen hin bewirkt. Da für feste Körper die Parameter $f$ nach dem sechsten Abschnitt (der Regel nach) *negativ* sind, so stimmt dieses Resultat durchaus mit der Theorie. Dass bei gewissen Körpern die Verschiebung unmerklich ist, widerspricht ihr nicht, da über die *Grösse* des Parameters $f$ nichts festzusetzen ist; doch würde ein genaues Studium des Brechungsindex in der Nähe der anscheinend nicht verschobenen Streifen sich empfehlen, um den Vorgang allseitig aufzuklären.

Beobachtungen über das Verhalten von *Flüssigkeiten* sind mir nicht bekannt. Hr. Koenigsberger äussert beiläufig, dass Flüssigkeiten sich den festen Körpern analog verhalten, giebt aber keine speciellen Mitteilungen. Ein solches Verhalten würde überraschen, da wenigstens für die von mir der Berechnung unterworfenen Flüssigkeiten sich aus dem Verhalten der Brechungsindices die Constanten $f$ als der Regel nach *positiv* ergeben haben. Immerhin wäre es mit der Theorie nicht unvereinbar, denn mit diesem mittleren ist ein entgegengesetztes Verhalten *einer* Elektronengattung (die vielleicht einem in der Flüssigkeit aufgelösten Farbstoff zugehört) wohl verträglich. Ausserdem ist denkbar, dass bei den Flüssigkeiten

1) C. Pulfrich, Wied. Ann. **45.** p. 609. 1892.
2) J. O. Reed, Wied. Ann. **65.** p. 705. 1898.
3) J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. **4.** p. 796. 1901.

und Dämpfen der Parameter $g$, der die Aenderung des Widerstandes der Elektronenbewegung und somit der Grösse $C$ mit der Temperatur bestimmt, eine ganz andere Grössenordnung besitzt, als derjenige $f$ der quasielastischen Kraft. Dann würde die Annäherung, die von den Formeln (75) zu (77) geführt hat, und die nach den Beobachtungen von Hrn. Koenigsberger über die geringe Aenderung von $\overline{n\varkappa}$ und $\varphi$ *bei festen Körpern* jedenfalls zulässig ist, bei Flüssigkeiten versagen. Die allgemeinere Formel (75) für $\bar{\vartheta}$ ist aber mit einer Verschiebung des Absorptionsstreifens nach grossen Wellen bei hinreichend grossem positiven $g$ selbst bei positivem $f$ vereinbar. Andere vielleicht in Betracht kommende Umstände werden im nächsten Abschnitt besprochen werden.

Für *Gase* liegen zwei Beobachtungen von Hrn. Paschen[1]) vor, wonach sich bei Kohlensäure und Wasserdampf mit stark wachsender Temperatur bei (wohl angenähert) constantem Druck die Emissions- und also auch die Absorptionsstreifen ein wenig nach der Seite grösserer Wellenlängen zu verschieben scheinen. Da bei Gasen die Aenderung der quasielastischen Kraft mit der Dilatation und damit $f$ wahrscheinlich sehr klein ist, und da die Beobachtung eine erhebliche Verbreiterung der Emissionsstreifen mit wachsender Temperatur ergab, so erscheint es als sehr wahrscheinlich, dass in diesem Falle es ein starkes Wachstum von $C$ bei fast constantem $A$ ist, welches nach der zweiten Formel (75) die Aenderung von $\bar{\vartheta}$ bedingt.

Dass die erste Formel (75) unter diesen Umständen (wo $R$ merklich gleich Eins ist), eine Abnahme von $\overline{n\varkappa}$ verlangt, während die Beobachtung eine Zunahme der Emission ergab, ist kein Widerspruch, da das Verhältnis von Emission und Absorption bekanntlich mit wachsender Temperatur selber sehr stark wächst.

Wenn nach der Erfahrung die äusserst schmalen Emissionslinien leuchtender Gase bei Temperaturänderungen ihren Ort nicht merklich ändern, so giebt hiervon die Theorie gleichfalls Rechenschaft. Denn die unmerkliche Breite verlangt einen unmerklichen Wert von $C/\sqrt{AB}$, $\bar{\vartheta}$ reducirt sich auf $\sqrt{B/A}$, und hierin ist $B$ constant, $A$ ist nach dem früher Gesagten

1) F. Paschen, Wied. Ann. **50.** p. 409. 1893.

bei Gasen überhaupt unmerklich veränderlich und darf bei jenen Vorgängen, wo die in die Atome zerfallenen Molecüle maassgebend sind, also eine Auflockerung durch Erwärmung nicht mehr stattfinden kann, als völlig unveränderlich betrachtet werden. —

Beobachtungen über die Aenderung der Absorption durch allseitig gleiche mechanische Compression fehlen gänzlich. Vielleicht bedarf es bei festen und flüssigen Körpern sehr starker Drucke, um merkliche Wirkungen hervorzubringen. Jedenfalls habe ich bei einseitiger Compression von Didymglas und bei allseitiger Compression einer concentrirten Lösung von Didymsulfat mit den mir verfügbaren Mitteln (Druck von 60 Atm.) keine beobachtbare Veränderung bewirken können.

Auch die merkwürdigen Resultate der Herren Humphreys und Mohler[1]) über die Verschiebung der Emissionslinien gewisser Metalldämpfe durch gesteigerten Druck im Entladungsraum darf man nur mit Vorbehalt heranziehen, da es sich hier nicht sicher um ein und denselben Körper in verschiedener Dichte handelt, sondern wahrscheinlich bei verschiedenen Drucken auch um verschiedene Gemische aus dem Metalldampf und dem umgebenden Gas.

Wäre das Mischungsverhältnis das gleiche, so könnte man unmittelbar die Formel

$$\bar{\vartheta}_d = \bar{\vartheta}(1 - \tfrac{1}{2} b \Delta)$$

anwenden, die sich bei der Uebertragung der zweiten Gleichung (77) auf mechanische Deformation ergiebt. Freilich sind für Gase die Vorzeichen der Parameter $b$ nicht direct und sicher feststellbar; da sie aber oben für feste Körper negativ, für flüssige positiv gefunden sind, ist eine bedeutende Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden, dass sie auch bei Gasen positiv sind. *Hieraus würde dann aber bei Compression eine Wanderung der Absorptions- und somit der Emissionslinie nach der roten Seite des Spectrums folgen, wie dies die Beobachtungen gezeigt haben.* Wenn dabei anscheinend für die Linien einer Serie die Verschiebungen den Wellenlängen proportional wachsen, so ergiebt dies für die Theorie das einfache Resultat, dass für die Linien einer Serie die Parameter $b$ die *gleichen* sind,

1) Zusammengefasst von W. J. Humphreys, Astr. Journ. 6. p. 169. 1897.

die quasielastischen Kräfte also durch die Compression um die gleichen Bruchteile geändert werden.

Die spärlichen Erfahrungsthatsachen über das Verhalten der Absorption bei mechanischer und thermischer Dilatation erscheinen hiernach von der Elektronentheorie aus sämtlich wohl verständlich.

### IV. Einführung specieller Vorstellungen.

11. *Die allgemeinen Formeln bei Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Elektronen.* Die Grundformeln für die Bewegung eines Elektron sind bisher im wesentlichen immer noch ohne elektrodynamische Begründung, rein phänomenologisch aufgestellt worden, und die vorstehenden Entwickelungen bedienen sich bei ihrer Erweiterung des gleichen Verfahrens. Indessen kann man den Mechanismus der besprochenen Vorgänge durch Verfolgung bestimmter, der Elektronenhypothese angepasster Vorstellungen bis zu einem gewissen Grade noch weiter klarstellen und gewinnt dadurch nicht nur an Anschaulichkeit, sondern gelangt auch zu neuen Gesetzmässigkeiten.

Wir wollen annehmen, dass innerhalb des betrachteten ponderabeln Körpers freie Elektronen vorhanden sind, von denen $N_a$, durch gleiche wirkende Bedingungen als *gleichartig* charakterisirte, mit dem Symbol $(a)$ bezeichnet sein mögen, $N_b$ andere, wiederum unter sich gleichen Bedingungen unterworfene, $(b)$ heissen mögen etc. Ausser ihnen mögen Elektronen vorhanden sein, die fest mit ponderabeln Atomen verbunden sind, und zwar $N_{a_1}$ von einer Gattung $(a_1)$, $N_{b_1}$ von einer Gattung $(b_1)$ etc. Die *freien* Elektronen werden im allgemeinen als *negativ*, die *gebundenen* als *positiv* geladen, und je ein positives und ein negatives Elektron durch eine quasielastische Kraft aneinander gekettet gedacht; gleichzeitig können die positiven Elektronen wiederum untereinander durch moleculare Wirkungen anderer Art verknüpft sein. Die Massen der freien Elektronen mögen wie gewöhnlich als verschwindend klein neben denen der ponderabeln Atome gelten, an welchen die positiven Elektronen haften; infolge dessen werden die Elongationen oder Coordinaten relativ zur Ruhelage $x_{a_1}$, $y_{a_1}$, $z_{a_1}$, ... der gebundenen Elektronen verschwindend klein sein

gegen diejenigen $x_a$, $y_a$, $z_a$, ... der freien und ausser Betracht bleiben können.

Ein Elektron $(a)$ unterliegt dann zunächst der Wirkung des ihm verketteten $(a_1)$, deren Componenten wir ohne nähere Begründung zur Darstellung der Erfahrungsthatsache in der Form $-l_a x_a$, $-l_a y_a$, $-l_a z_a$ ansetzen, daneben einer Widerstandskraft, deren Componenten wir wie früher $-h_a x_a'$, $-h_a y_a'$, $-h_a z_a'$ schreiben. Ausserdem steht es aber unter der Wirkung anderer negativer und positiver Elektronen, die wir allgemein mit $(s)$ und $(s_1)$ bezeichnen. Für die bezüglichen Componenten werden nach dem Gesagten in die Bewegungsgleichungen die Ausdrücke

$$-l_{as}(x_a - x_s), \ldots \text{ und } +l_{as_1} x_a, \ldots$$

eingesetzt werden können, da es sich in diesen nur um die Incremente der Kräfte infolge der Elongationen handelt, die Werte der Componenten für verschwindende Elongationen hingegen allein die Ruhelagen der Elektronen bestimmen.

Man kann diese Ansätze rein phänomenologisch als die naturgemässe Erweiterung der ähnlich eingeführten Ausdrücke $-l_a x_a, \ldots$ für ein selbst bewegtes Attractionscentrum bilden; man kann aber auch nach einer elektrostatischen Begründung verlangen.

Was die elektrische Deutung der quasielastischen Kräfte $-l_a x_a, \ldots$ angeht, so bietet sie eine ziemliche Schwierigkeit. Jene Kräfte als die Resultanten aus der Wirkung der irgendwie rings um das Elektron $(a)$ verteilten positiven Ladungen des ponderabeln Atomes $(a_1)$ anzusehen, geht kaum an, da eine solche Verteilung keine stabile Ruhelage für $(a)$ ergiebt, es sei denn, dass das Elektron *innerhalb der räumlich ausgedehnten* Ladung von $(a_1)$ liegt. Man wird daher, wie mir scheint, zu der Vorstellung gedrängt, dass die positive Ladung in der That einen Raum erfüllt, innerhalb dessen die negativen Elektronen oscilliren. Denkt man sich die Dichte dieser Verteilung in concentrischen Kugelschichten constant, nahe dem Centrum angenähert homogen und nach aussen abnehmend, so ergiebt sich für kleine Elongationen vom Centrum in der That eine Kraft von dem empirisch geforderten Gesetz, dessen Parameter für grössere Elongationen abnehmen. Elektronen

ausserhalb der positiven Ladung würden dann einer mit wachsender Entfernung abnehmenden Kraft unterliegen.

Vielleicht liessen sich auf diese Weise auch die sonst nur zur Erklärung der Thatsachen eingeführten Widerstände $-h_a x_a', \ldots$ anschaulich deuten.

Um die anderen eingeführten Kräfte elektrostatisch zu begründen, hätte man etwa zwischen je zwei Elektronen $(a)$ und $(s)$ eine mit der $-h^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung $r_{as}$ proportionale Wechselwirkung anzunehmen und hieraus die Incremente der auf $(a)$ wirkenden Componenten für gegen $r_{as}$ kleine Elongationen $x_a, \ldots, x_s, \ldots$ zu berechnen. Diese besitzen dann die Form $A(x_a - x_s) + B(y_a - y_s) + C(z_a - z_s)$, worin $A$, $B$, $C$ Functionen der Grösse und der Richtung von $r_{as}$ sind. Da es sich weiterhin um Mittelwerte für alle möglichen Richtungen in lineären Formeln handelt, so kann man diese Mittel bereits hier einführen. Die einfache Berechnung ergiebt dann für die gesuchten Incremente bis auf eine Constante die Werte

$$-(h-2)(x_a - x_s)/3\, r_{as}^{h+1}, \ldots,$$

für $l_{as}$ also den Wert $-(h-2)/3\, r_{as}^{h}$, woraus für das Newton'sche Gesetz $(h = 2)$ der Wert Null folgt. Man wird der allgemeinen Vorstellung entsprechend für moleculare Entfernungen $h > 2$ annehmen müssen.

Gleichviel, wie geringes Gewicht man einer derartigen Begründung des gemachten Ansatzes beilegen will, so wird man aus derselben doch schliessen dürfen, dass die Parameter $l_{as}$ und $l_{as_1}$ wahrscheinlich stets positiv sind. Im übrigen werden sie mit wachsender Entfernung $r_{as}$ zwischen den Ruhelagen der wechselwirkenden Elektronen *abnehmen.*

Die Differenz $l_{as} - l_{as_1}$, für die $\pm$ Elektronen eines Paares $(s)$ und $(s_1)$ gebildet, wird für jede merkliche Entfernung des Paares von $(a)$ ausserordentlich klein sein; denn $-(l_{as} - l_{as_1})x_a$ stellt die Wirkung des Paares in der Ruhelage auf das abgelenkte Elektron $(a)$ dar und die Entfernung der Teile des Paares darf in diesem Zustand als äusserst klein gegen die Entfernung von einem anderen Elektron gelten. Man wird demgemäss nur einen kleinen Fehler begehen, wenn man, wie unten gelegentlich, zur Vereinfachung $l_{as} = l_{as_1}$ setzt.

Die Parameter $l_a, \ldots$ und $h_a, \ldots$ werden wir als der Combination der $\pm$ Elektronen $(a, a_1)$ individuelle Constanten führen dürfen, solange dadurch kein Widerspruch mit der Erfahrung entsteht. —

Unter Benutzung der festgesetzten Bezeichnungen und unter der vereinfachenden Annahme *gleicher* Ladungen $e$ aller Elektronengattungen nehmen die Bewegungsgleichungen für ein in einem elektrischen Felde befindliches Elektron $(a)$ nunmehr die Form an

$$(78)\quad m_a x_a'' + l_a x_a + h_a x_a' + \sum_s l_{as}(x_a - x_s) - \sum_{s_1} l_{as_1} x_a = e X,$$

. . . . . .

oder bei Benutzung der Abkürzung

$$(79)\quad l_a + \sum_s l_{as} - \sum_{s_1} l_{as_1} = l_a'$$

einfacher

$$(80)\quad m_a x_a'' + l_a' x_a + h_a x_a' - \sum_s l_{as} x_s = e X,$$

. . . . . .

Wenn innerhalb des Bereiches merklicher Wirkung die Phasen der Elektronen gleicher Art untereinander gleich sind oder wenigstens keine regelmässige Abhängigkeit von der Richtung besitzen, so kann man hierin, wie p. 460, durch

$$X_a = 4\pi N_a e \bar{x}_a, \ldots, \quad X_s = 4\pi N_s e \bar{x}_s, \ldots$$

die Componenten der auf den Elektronen $(a)$ und $(s)$ beruhenden Anteile an der elektrischen Polarisation einführen und erhält so die noch ganz allgemeinen Grundformeln

$$(81)\quad m_a X_a'' + l_a' X_a + h_a X_a' - N_a \sum_s l_{as} X_s / N_s = 4\pi e^2 N_a X,$$

. . . . . .

Die Summen $\Sigma$, die über *alle* auf das einzelne Elektron $(a)$ wirkenden Elektronen, sowohl gleicher als abweichender Art, zu erstrecken sind, lassen sich in Teile zerlegen, die von den verschiedenen Elektronengattungen herrühren, gemäss den allgemeinen Formeln

$$(82)\quad \begin{cases} \sum_s l_{ns} = \sum_a l_{na} + \sum_b l_{nb} + \sum_c l_{nc} + \ldots, \\ \sum_{s_1} l_{ns_1} = \sum_{b_1} l_{nb_1} + \sum_{c_1} l_{nc_1} + \ldots, \\ \sum_s l_{ns} \dfrac{X_s}{N_s} = \dfrac{X_a}{N_a} \sum_a l_{na} + \dfrac{X_b}{N_b} \sum_b l_{nb} + \dfrac{X_c}{N_c} \sum_c l_{nc} + \ldots \end{cases}$$

Führt man diese Beziehungen in das System (81) ein und integrirt dasselbe durch complexe Lösungen für $X_a, \ldots$, so erhält man

$$(83)\quad \Theta_a' X_a - \vartheta^2 N_a \left( \frac{X_a}{N_a} \sum_a l_{aa} + \frac{X_b}{N_b} \sum_b l_{ab} + \ldots \right) = 4\pi e^2 \vartheta^2 N_a X,$$

. . . . . .

wobei

$$(84)\quad \Theta_a' = l_a' \vartheta^2 + i h_a \vartheta - m_a$$

ist.

Geben diese Gleichungen, nach $X_a, \ldots$ aufgelöst,

$$(85)\quad X_a = X \Pi_a, \ldots$$

so gilt für den complexen Brechungsindex $\nu$ die Beziehung

$$(86)\quad \nu^2 = 1 + \sum_a \Pi_a.$$

Die so erhaltene Formel stellt eine Erweiterung von (5) dar, erhalten durch Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen den Elektronen. Sie ist in ihrer allgemeinen Form sehr wenig übersichtlich; es wird sich darum handeln, sie durch vereinfachende Annahmen, die speciellen Fällen entsprechen, in eine discutable Form zu bringen. Dies wird in späteren Abschnitten auf verschiedene Weisen ausgeführt werden.

12. *Eigenschaften der Parameter in den erhaltenen Formeln.* Die in den abgeleiteten Endformeln (83) auftretenden Summen $\sum_a l_{na}, \sum_b l_{nb}, \ldots$ haben denselben Charakter, wie die auch bei anderen moleculartheoretischen Entwickelungen, z. B. im Gebiete der Elasticität auftretenden, die zumeist einfach als Parameter der Gleichungen geführt und deren Werte und Veränderungen für wechselnde Körper und Zustände der Erfahrung entnommen zu werden pflegen. *Allgemein* kann man nur dies aussagen, dass sie, als auf Wechselwirkungen je zweier Elektronen beruhend, mit $e^2$ proportional sein müssen und wahrscheinlich mit der Dichte bez. der Zahl $N$ der vorhandenen Molecüle wachsen werden; doch kann man in gewissen speciellen Fällen, wie sogleich zu zeigen, das Gesetz dieser Abhängigkeit genauer bestimmen.

Die Summe $\sum_a l_{aa}$ bezieht sich auf die Wirkung, welche ein Elektron ($a$) von allen übrigen Elektronen derselben Gattung erfährt, die wir ohne Beschränken der Allgemeinheit

***sämtlich anderen*** Molecülen angehörend denken dürfen. Die Summen von der Form $\sum_b l_{ab}$, $\sum_c l_{ac}$, ... stellen die Wirkungen aller Elektronen $(b)$, $(c)$, ... *des gleichen und der anderen* Molecüle auf das betrachtete Elektron $(a)$ dar, und wir wollen annehmen, dass von ihnen stets *nur je eines demselben* Molecül angehört, wie das betrachtete $(a)$. Ueber die Beseitigung dieser Beschränkungen wird am Schluss dieser Darlegung das Nötige gesagt werden.

Bezeichnet man den für die Wirkung, die $(a)$ von dem im *gleichen* Molecül befindlichen $(b)$ erfährt, charakteristischen Parameter mit $(l_{ab})$ und setzt

$$\sum_a l_{aa} = S_{aa}, \quad \sum_a l_{ab} = (l_{ab}) + S_{ab}, \ldots, \tag{87}$$

so haben die $S_{aa}$, $S_{ab}$, $S_{ac}$, ... sämtlich den *gleichen* Charakter, beziehen sich nämlich auf die Wirkungen der Elektronen von der Gattung $(a)$, $(b)$, ..., die sämtlich *anderen* Molecülen angehören, als das betrachtete $(a)$.

Ueber die Summen $S$ kann man dann in den Fällen, dass *die Molecüle infolge ihrer Bewegungen alle relativen Lagen gleich oft annehmen* (was bei Flüssigkeiten und Dämpfen nahe zutreffen wird) behaupten, dass sie mit den *Dichten* der wirkenden Elektronen, also mit $N_a$, $N_b$, ... angenähert proportional sein müssen. Hier wird man also setzen können

$$S_{aa} = 4\pi e^2 N_a \sigma, \quad S_{ab} = 4\pi e^2 N_b \sigma, \ldots \tag{88}$$

und ebenso auch

$$S_{aa_1} = 4\pi e^2 N_a \sigma, \quad S_{ab_1} = 4\pi e^2 N_b \sigma, \ldots, \tag{89}$$

worin $\sigma$ ein allen Elektronengattungen gemeinsamer, nach p. 492 *positiver* Parameter sein wird. Denn da nach der Annahme alle Elektronen gleiche Ladungen besitzen, und da im Mittel alle gegenseitigen Lagen gleich oft vorkommen sollen, so unterscheiden sich ihre Wirkungen auf ein Elektron $(a)$ nur durch die Verschiedenheit der Anzahlen $N$.

Die Functionen $(l_{ab})$ werden von den $N$ überhaupt nur *indirect* abhängen, insofern die Entfernungen der Teile eines Molecüles bis zu einem gewissen Grade mit der Dichte der Anordnung der sie umgebenden übrigen Molecüle variiren müssen; aber diese Abhängigkeit wird in erster Annäherung ignorirt werden können.

Lässt man mehrere der Elektronengattungen $(a)$, $(b)$, $(c)\ldots$ *gleichartig* werden, so kann man dadurch zu Molecülen übergehen, die von einer bestimmten Gattung Elektronen *mehrere* enthalten; lässt man mehrere der $(l_{ab})$ *verschwinden*, so gelangt man zu gemischten Medien, deren Molecüle zwei oder mehr Arten der Constitution besitzen.

Bezüglich der Abhängigkeit von der Temperatur bei ungeändertem Volumen kann man als wahrscheinlich bezeichnen, dass dieselbe bei den $S$ bez. bei den Parametern $\sigma$ gering ist, während sie bei den $(l_{ab})$ gemäss der durch Temperatursteigerung bewirkten Auflockerung der Molecüle bedeutender sein wird. —

Führt man die Beziehungen (87), (88) in das System (83) ein, so nimmt dasselbe die Form an

$$(90)\quad \begin{cases} \Theta_a' X_a - \vartheta^2 N_a \left( \frac{X_b}{N_b}(l_{ab}) + \frac{X_c}{N_c}(l_{ac}) + \ldots \right) \\ \qquad - 4\pi e^2 \vartheta^2 \sigma N_a (X_a + X_b + X_c + \ldots) = 4\pi e^2 \vartheta^2 N_a X, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

während zugleich $\Theta_a'$ den speciellen Wert erhält

$$(91)\quad \Theta_a' = (l_a + \textstyle\sum_s (l_{as}) - \sum_{s_1} (l_{a s_1}))\, \vartheta^2 + i h_a \vartheta - m_a .$$

Die in der letzten Formel auftretenden Summen sind nach ihrer Bedeutung über $s = b, c, \ldots$ zu erstrecken.

13. *Beziehungen zu den früheren Resultaten.* In den Untersuchungen der ersten Abschnitte haben wir uns mit einem Körper von unveränderlicher Zusammensetzung beschäftigt, in dem die auf die Elektronen ausgeübten quasielastischen und Widerstandskräfte Functionen des Deformations- und Temperaturzustandes des Körpers waren. Man gelangt leicht zu einer Formel, die den Uebergang zu den früher gemachten Ansätzen gestattet, wenn man das System (83) unter der Annahme schwacher Wechselwirkungen $l_{aa}$, $l_{ab}$, $\ldots$ *durch eine Annäherung* auflöst.

Setzt man

$$(92)\quad \Theta_a' \left( \frac{\sum_b l_{ab}}{\Theta_b'} + \frac{\sum_c l_{ac}}{\Theta_c'} + \ldots \right) = S_a,$$

so resultirt auf diese Weise

$$(93)\quad X_a [\Theta_a' - \vartheta^2 (\textstyle\sum_a l_{aa} + S_a)] = 4\pi e^2 \vartheta^2 N_a X,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

also nach (85) und (86)

$$(94)\quad \nu^2 = 1 + 4\pi \vartheta^2 \sum_a \frac{e^2 N_a}{\Theta_a' - \vartheta^2 (\sum l_{aa} + S_a)} .$$

Diese Gleichung weicht von den früher aufgestellten Dispersionsformeln (11) und (12) der Form nach insofern ab, als $S_a$ nach (92) eine complicirte Function von $\vartheta$ ist. Diese Abhängigkeit ist in den Spectralbereichen unmerklicher Absorption unerheblich, wenn, wie in den wichtigsten praktischen Fällen, die Dispersion des Mediums ebenda überwiegend durch seine weit im Ultraviolett liegenden Absorptionsstreifen bestimmt wird. Hier sind alle $\Theta'$ nahezu mit $\vartheta^2$ proportional, also ihre Verhältnisse von $\vartheta^2$ angenähert unabhängig, $\sum_a$ demgemäss ebenso.

Schreiben wir dann den Nenner in (94) bei Beseitigung der $h_a$ in der Form

$$\mathfrak{N}_a = (l_a + \sum_s l_{as} - \sum_{s_1} l_{a\,s_1} - \sum_a l_{a\,a} - S_a)\,\vartheta^2 - m_a, \tag{95}$$

so tritt hervor, wie die Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Elektronen die quasielastische Kraft, die eines von ihnen erfährt, beeinflussen, denn der Factor von $\vartheta^2$ in (95) steht an Stelle von $k_a$ in der allgemeinen Formel (12).

Eine Beurteilung des Einflusses, den eine Aenderung der Dichtigkeit oder der Temperatur auf die Dispersion des Körpers ausübt, ist nun bereits leichter möglich. Ganz besonders klar werden die vorliegenden Verhältnisse, wenn das Medium den am Ende des vorigen Abschnittes gemachten Annahmen entspricht, also die Beziehungen (87) bis (89) Gültigkeit haben.

Hier wird dann, unter der Voraussetzung, dass in dem kleinen Glied $S_a$ nach dem oben Gesagten die Verhältnisse $\Theta_a'/\Theta_b'$, ... durch ihre angenäherten Werte $l_a/l_b$, ... ersetzt werden können, der Nenner in Formel (94) zu

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{N}_a = l_a\,\vartheta^2\,[1 - 4\,\pi\,e^2\,\sigma\,(N_a/l_a + N_b/l_b + \ldots)], \\ \quad + [(l_{ab})\,(l_b - l_a)/l_b + \ldots - (l_{ab}) - \ldots] - m_a. \end{array}\right. \tag{96}$$

Aendert sich die Constitution des einzelnen Molecüles und somit das System der $(l)$ dabei nicht merklich, so wird hiernach eine *Vergrösserung* der Dichte eine *Verkleinerung* der quasielastischen Kraft verursachen, welche das Elektron $(a)$ erfährt. *In der That ist nach p. 468 bei den Körpern, für welche die hier gemachten speciellen Annahmen wahrscheinlich der Wirklichkeit entsprechen, nämlich bei den Flüssigkeiten, ein solches Verhalten beobachtet worden.* Damit steht dann in der gleich-

falls früher erörterten Weise eine Verschiebung der Absorptionsstreifen nach der Seite des Violetten bei wachsender Dichte in Verbindung.

Eine Aenderung der Temperatur bei ungeänderter Dichte wird nach p. 496 insbesondere (durch Auflockerung der Molecüle) die $(l_{aa})$ und $(l_{a\,a_1})$ beeinflussen. Deren Rolle in dem Ausdrucke (95) für den Nenner $\mathfrak{N}_a$ ist eine ziemlich complicirte, doch darf auf Grund der Bemerkungen von p. 492 geschlossen werden, dass die Differenzen $(l_{ab}) - (l_{ab_1})$ klein neben $(l_{ab})$ und $(l_{ab_1})$ selbst sind, also das sie enthaltende Aggregat in (95) sich merklich auf $-l_a((l_{ab})/l_b + \ldots)$ reducirt. Bei gesteigerter Temperatur bez. Auflockerung würde hiernach die quasielastische Kraft, die das Elektron $(a)$ erfährt, etwas *zu*nehmen müssen.

Die eingeführte Annäherung versagt in unmittelbarer Nähe der Absorptionsstreifen und ist dort durch eine andere Betrachtungsweise zu ersetzen, auf die indessen mangels genügender quantitativer Beobachtungen hier nicht eingegangen werden soll.

Dagegen wollen wir die strengen allgemeinen Formeln (90) noch auf zwei specielle Fälle von hervorragendem Interesse anwenden.

14. *Medien ohne merkliche intermoleculare Wirkungen.* Die Formeln (90) weisen den Effect der Wechselwirkungen zwischen den Elektronen in zwei Gliedern verschiedener Bedeutung und Form auf. Die mit $(l_{ab})$, $(l_{ac})$ proportionalen Ausdrücke rühren ausschliesslich von den Wechselwirkungen zwischen den Elektronen *desselben* Molecüles her, dagegen die mit $\sigma$ proportionalen ausschliesslich von solchen *verschiedener* Molecüle. *Die Verhältnisse vereinfachen sich, wenn der eine der beiden Effecte den anderen so beträchtlich überwiegt, dass man jenen daneben vernachlässigen kann.* Man erhält so zwei specielle Fälle von auffallend verschiedenem Charakter.

Die Glieder mit $\sigma$ werden stets ignorirt werden können, wenn die Zahlen $N_a$, $N_b$, ... und damit die Dichten der Elektronenverteilungen im Raume klein, oder die mittleren Entfernungen zweier Molecüle gross gegen diejenigen der Atome eines Molecüles sind. *In diesem Falle verschwindender intermolecularer Wirkungen* wird das System (90) in so viel ge-

sonderte zerfallen, als Molecülarten da sind. Nennen wir dieselben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, so können wir für jede Molecülart die ihren Atomen bez. Elektronen entsprechenden $N_a, N_b, \ldots$ untereinander gleich setzen, da sich das Vorkommen mehrerer gleichwertiger Elektronen in einem Molecül durch Identificirung mehrerer der Gattungen $(a), (b), (c), \ldots$ erreichen lässt.

Demgemäss nehmen die Gleichungen für die Molecülgattung $\alpha$ die Form an:

$$\Theta_a' X_a - \vartheta^2 \left(X_b (l_{ab}) + X_c (l_{ac}) + \ldots\right) = 4\pi e^2 \vartheta^2 N_a X, \tag{97}$$

. . . . . .

wobei die Gruppe nur diejenigen Polarisationscomponenten enthält, die den Elektronen der Molecülgattung $(\alpha)$ entsprechen.

Man erkennt leicht, dass die Formel (86) hier die Gestalt annimmt

$$\nu^2 = 1 + \textstyle\sum_\alpha N_a \Phi_a , \tag{98}$$

wobei $N_a$ die Anzahl der Molecüle von der Art $(\alpha)$ und $\Phi_a$ eine Function der für die Molecülart charakteristischen Parameter $(l)$ bezeichnet.

Ist nur *eine* Molecülart $(\alpha)$ in der Zahl $N_a^0$ vorhanden, so wird die Formel sich auf

$$\nu_a^2 = 1 + N_a^0 \Phi_a \tag{99}$$

reduciren, wobei $\Phi_a$ denselben Wert hat, wie oben. Allerdings sind im allgemeinen die Functionen $(l)$ etwas von den äusseren Bedingungen abhängig, unter denen sich das Molecül befindet, und die Function $\Phi_a$ wird daher mit den $N_\alpha, N_\beta, \ldots$ etwas variiren. Da wir aber hier die intermolecularen Wirkungen vernachlässigen, so ist es consequent, auch von deren Einfluss auf die $\Phi_a, \ldots$ abzusehen.

*In diesem Falle ergiebt die Formel (99) das Gesetz*

$$\frac{\nu^2 - 1}{N} = \Gamma, \tag{100}$$

*das als eine Erweiterung der Newton'schen Formel*

$$\frac{n^2 - 1}{N} = C \tag{101}$$

*von reellen Brechungsindices n bez. reellen Refractionsconstanten C auf complexe $\nu$ und $\Gamma$ erscheint und für merklich absorptionslose Spectralbereiche in dasselbe übergeht.*

Allgemein liefert die Gleichung (100) die zwei Beziehungen

$$\frac{n^2(1-\varkappa^2)-1}{N} = C', \quad \frac{2n^2\varkappa}{N} = C'', \tag{102}$$

wobei $C'$ und $C''$ Constanten bezeichnen.

Hieraus folgt bei kleinem $\varkappa$ für die Absorptionsconstante $n\varkappa$ die Gleichung

$$n\varkappa = \frac{C''N}{2\sqrt{C'N+1}}, \tag{103}$$

welche unter anderem aussagt, dass dieselbe Menge einer absorbirenden Substanz (etwa eines Gases) in zwei Cylindern von gleichem Querschnitt und verschiedener Länge gleichmässig verteilt, Licht, parallel der Cylinderaxe fortschreitend, in verschiedener Weise absorbirt, und zwar in dem längeren Cylinder *mehr*. —

Gehen wir zu der allgemeinen Formel (98) zurück, so lässt dieselbe sich jetzt schreiben

$$\nu^2 - 1 = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N_\alpha^0}(\nu_\alpha^2 - 1), \tag{104}$$

oder bei Einführung der Gesamtzahl

$$N_\alpha + N_\beta + \ldots = N \tag{105}$$

und der Abkürzungen

$$\frac{\nu^2-1}{N} = \Gamma, \quad \frac{\nu_\alpha^2-1}{N_\alpha^0} = \Gamma_\alpha \tag{106}$$

auch

$$N\Gamma = \sum N_\alpha \Gamma_\alpha, \tag{107}$$

was *eine Mischungsregel für die complexen Refractionsconstanten $\Gamma$ darstellt.*

Für absorptionslose Bereiche resultirt wiederum das analoge Gesetz für die reelle Refractionsconstante $C$

$$NC = \sum N_\alpha C_\alpha; \tag{108}$$

für schwache Absorption bleibt dasselbe bestehen und wird ergänzt durch die Formel

$$n^2\varkappa = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N_\alpha^0} n_\alpha^2 \varkappa_\alpha, \tag{109}$$

die bei Einführung der Abkürzungen

$$n^2\varkappa/N = \gamma, \quad n_\alpha^2 \varkappa_\alpha / N_\alpha^0 = \gamma_\alpha \tag{110}$$

die Form annimmt

$$N\gamma = \sum_\alpha N_\alpha \gamma_\alpha. \tag{111}$$

Diese *Mischungsregel für die Function* $\gamma = n^2 \varkappa / N$ gestattet eine eigentümliche Folgerung für den Fall, dass in dem betrachteten Spectralbereiche nur eine einzige Molecülgattung merkliche Absorption liefert. Hier resultirt aus (109)

$$(112) \qquad n^2 \varkappa = \frac{N_\alpha}{N_\alpha^0} n_\alpha^2 \varkappa_\alpha \text{ oder } n \varkappa = \frac{N_\alpha n_\alpha}{N_\alpha^0 n} . n_\alpha \varkappa_\alpha .$$

Ist die Molecülgattung ($\alpha$) überdies in so geringer Anzahl $N_\alpha$ vorhanden, dass ihre Anwesenheit den Brechungsindex $n$ nicht merklich beeinflusst, so kann man in der letzten Formel rechts $n$ auch mit $n^0$, d. h. mit dem Brechungsindex des durchsichtigen Lösungsmittels vertauschen.

Das Maximum der Absorption liegt nach der letzten Formel dort, wo

$$(113) \qquad \frac{\partial \ln (n_\alpha^2 \varkappa_\alpha)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \ln (n_0)}{\partial \vartheta}$$

ist. Um seine Lage zu bestimmen, hat man also zwei Curven zu construiren, indem man $\ln (n_\alpha^2 \varkappa) = y_1$, $\ln (n_0) = y_2$ als Coordinaten zur Abscisse $\vartheta = x$ aufträgt. Das Maximum der Absorption liegt bei dem $\vartheta$, für welches die beiden Curven parallele Tangenten haben. Die ungefähre Gestalt der beiden Curven ist leicht angebbar, und man erhält bei ihrer Benutzung den Satz, dass *bei der Lösung gleicher Quanta einer absorbirenden Substanz in gleichen Volumina verschiedener merklich durchsichtiger Lösungsmittel deren Absorptionsstreifen um so weiter nach der roten Seite des Spectrums rücken, je steiler an der Stelle des Streifens die Curve für den Brechungsindex des Lösungsmittels mit wachsendem* $\vartheta$ *fällt.*

Es ist klar, dass hiermit eine Ableitung der Kundt'schen Regel[1]) aus der Elektronentheorie gegeben ist. Es wird sich zeigen, dass dieselbe aber ganz wesentlich an die hier gemachten Voraussetzungen gebunden ist, und dass unter anderen Umständen durchaus widersprechende Resultate sich ergeben. In der That besitzt ja auch die Kundt'sche Regel keine allgemeine Gültigkeit. Wenn aber die Herren Humphreys und Mohler für die Deutung ihrer schon p. 489 erwähnten Be-

1) A. Kundt, Pogg. Ann. Jubelband, p. 615. 1894.

obachtungen die Regel heranziehen, so wird man dem nach dem Vorstehenden wohl zustimmen können, weil bei Gasen und Dämpfen die von uns gemachten Voraussetzungen sehr wahrscheinlich erfüllt sind.

Von einer Discussion des complicirteren Falles der Mischung mehrerer absorbirender Molecülgattungen, die sich leicht ausführen lässt, mag der Kürze halber abgesehen werden.

15. *Medien ohne merkliche intramoleculare Wirkungen.* Der zweite specielle Fall ist nach p. 498 der, dass man in den Grundformeln (90) die in die ($l$) multiplicirten Glieder neben den übrigen vernachlässigen kann. Dies findet in Strenge statt, wenn jedes Molecül nur *ein* Elektron an sich fesselt; ausserdem aber angenähert immer dann, wenn die Teile des einzelnen Molecüles derart (lose) miteinander verkettet sind, dass sie bezüglich der Auswertung der resultirenden Wirkungen nicht von den Teilen der anderen Molecüle gesondert zu werden brauchen. In der That: wenn *alle* Elektronen der Gattung ($b$), sowohl das des betrachteten Molecüles, sowie die aller übrigen Molecüle, im Mittel alle relativen Lagen zu dem Elektron ($a$) annehmen, so entfällt die Nötigung, die Wirkung ($l_{ab}$), wie p. 495 geschehen, einzeln hervorzuheben; *sie kann mit in das Symbol $S_{ab}$ hineinbezogen werden.* Die Erfahrung scheint zu zeigen, dass dies in vielen Fällen stattfindet.

Bei Hinweglassung der ($l_{ab}$), ($l_{ac}$), ... nimmt nun die Gleichung (90) die Form an:

$$\Theta_a X_a = 4\pi e^2 \vartheta^2 N_a (X + \sigma \textstyle\sum_a X_a), \tag{114}$$

. . . . . .

wobei

$$\Theta_a = l_a \vartheta^2 + i h_a \vartheta - m_a \tag{115}$$

ist.

Dividirt man durch $\Theta_a$ und summirt über alle $a, b, c, \ldots$, so erhält man

$$\textstyle\sum_a X_a = 4\pi e^2 \vartheta^2 (X + \sigma \sum_a X_a) \sum_a \frac{N_a}{\Theta_a}, \tag{116}$$

also

$$\textstyle\sum_a X_a = \frac{4\pi e^2 \vartheta^2 X \sum_a N_a / \Theta_a}{1 - 4\pi e^2 \vartheta^2 \sigma \sum_a N_a / \Theta_a}, \tag{117}$$

woraus resultirt

$$(118) \qquad \nu^2 = 1 + \frac{4\pi e^2 \vartheta^2 \sum_a N_a / \Theta_a}{1 - 4\pi e^2 \vartheta^2 \sigma \sum_a N_a / \Theta_a},$$

oder auch

$$(119) \qquad \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + (1-\sigma)/\sigma} = 4\pi e^2 \vartheta^2 \sigma \sum_a N_a / \Theta_a.$$

Wäre überhaupt nur *eine* Elektronengattung in der Zahl $N_a^0$ pro Volumeneinheit vorhanden, so würde sich ergeben:

$$(120) \qquad \frac{\nu_a^2 - 1}{\nu_a^2 + (1-\sigma)/\sigma} = \frac{4\pi e^2 \vartheta^2 \sigma N_a^0}{\Theta_a}.$$

Da $\sigma$ und $\Theta_a$ nach den früheren Annahmen als von der Anzahl der Elektronen merklich unabhängig angesehen werden dürfen, so kann man dieses Resultat bei Einführung zweier Constanten $c$ und $P$, sowie bei Fortlassung der Indices schreiben:

$$(121) \qquad \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + c} \cdot \frac{1}{N} = \frac{4\pi e^2 \vartheta^2 \sigma}{\Theta} = P.$$

*In dieser Form spricht die Gleichung für den complexen Brechungsindex $\nu$, bez. die complexe specifische Refraction $P$, dasjenige Gesetz der Abhängigkeit von der Dichte aus, das die Herren H. A. Lorentz und L. Lorenz aus der Clausius-Mosotti'schen Theorie der Dielektrica in der Form*

$$(122) \qquad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{N} = R$$

*für den reellen Brechungsindex $n$, bez. die reelle specifische Refraction $R$ abgeleitet haben, und das aus dem Gefundenen sogleich folgt, wenn man die Gleichung auf ein Spectralbereich unmerklicher Absorption anwendet.*

Dass die universelle Constante $c$ hier unbestimmt geblieben ist, liegt an den zu Grunde gelegten allgemeinen Annahmen. Der gewöhnlich benutzte Wert $c = 2$ würde $\sigma = 1/3$ verlangen; er ist mit der Beobachtung nur näherungsweise im Einklang, auch ist die Formel gegen Veränderungen von $c$ ziemlich unempfindlich.

Allgemein zerfällt die Gleichung (121) in zwei Beziehungen von sehr complicirter Form, die sich aber für neben Eins zu vernachlässigendes $\varkappa^2$ reduciren auf

$$(123) \qquad \frac{n^2 - 1}{n^2 + c} \frac{1}{N} = R', \qquad \frac{2n^2 \varkappa (c+1)}{n^2 + c} \cdot \frac{1}{N} = R''.$$

Hieraus folgt für die Absorptionsconstante $n\varkappa$ die Formel

$$n\varkappa = \tfrac{1}{2} R' N \sqrt{\frac{(1 - R'N)^2}{1 + R'Nc}}, \tag{124}$$

welche ähnlich wie (103) zeigt, dass dieselbe Menge einer absorbirenden Substanz auf einen längeren Weg verteilt das hindurchgehende Licht *mehr* absorbirt, wie auf einen kürzeren.

Unter Benutzung der Beziehung (121) nimmt nun die allgemeine Formel (102) die Gestalt an:

$$\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + c} = \sum_a \frac{N_a}{N_a^0} \frac{\nu_a^2 - 1}{\nu_a^2 + c} \tag{125}$$

oder bei Einführung von

$$N_a + N_b + N_c + \ldots = N,$$

$$\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + c} \cdot \frac{1}{N} = P, \qquad \frac{\nu_a^2 - 1}{\nu_a^2 + c} \cdot \frac{1}{N_a^0} = P_a, \ \ldots \tag{126}$$

auch

$$NP = \textstyle\sum_a N_a P_a, \tag{127}$$

und *spricht die Regel aus, wie sich die complexe specifische Refraction $P$ einer Substanz mit mehreren Elektronenarten aus den complexen specifischen Refractionen $P_a$ der einzelnen Elektronenarten berechnen lässt.* Es ist bekannt, dass für merklich durchsichtige Spectralbereiche sich die hieraus folgende Beziehung

$$NR = \textstyle\sum_a N_a R_a \tag{128}$$

sowohl bei Mischungen als auch — wiewohl weniger vollkommen — bei chemischen Verbindungen in merkwürdiger Weise bewährt hat. Abweichungen sind nach dem oben über die zu ihrer Ableitung nötigen Hypothesen Gesagten leicht zu begreifen.

Die aus (127) bei schwacher Absorption weiter sich ergebende Beziehung

$$\frac{n^2 \varkappa}{n^2 + c} = \sum_a \frac{N_a}{N_a^0} \frac{n_a^2 \varkappa_a}{n_a^2 + c} \tag{129}$$

lässt sich ganz ähnlich verwerten, wie Gleichung (109), giebt aber bezüglich des Verhaltens der Absorptionsstreifen eines in verschiedenen durchsichtigen Substanzen gelösten Absorbens das entgegengesetzte Resultat, wie jene.

In der That ist bekannt, dass gewisse Lösungen der Kundt'schen Regel nicht folgen. Unsere Betrachtungen zeigen, wie die Elektronentheorie das eine wie das andere Verhalten verständlich macht.

Göttingen, August 1901.

(Eingegangen 6. September 1901.)

---

*Zusatz.* Während des Druckes der vorliegenden Arbeit erschien eine Notiz des Hrn. Pockels über mechanische Doppelbrechung eines Flintglases (Phys. Zeitschr. 2. p. 693. 1901), deren Resultat für die Theorie von Bedeutung ist. Da der Autor weitere Beobachtungen ankündigt, soll die Besprechung bis nach deren Veröffentlichung verschoben werden.

## 3. *Ueber die Verwendung des Quadrantelektrometers zur ballistischen Messung der magnetischen Feldstärke und über die Susceptibilität des Wassers;*

*von J. Koenigsberger.*

Die bei der Induction im ungeschlossenen Stromkreise entstehende Potentialdifferenz ist, wie im Folgenden gezeigt wird, durch dasselbe Gesetz gegeben, durch welches nach Faraday-Maxwell die Induction im geschlossenen Stromkreis bestimmt ist.

Diese Potentialdifferenz kann bei Verwendung des Quadrantelektrometers als ballistisches Instrument eine sehr genaue Feldstärkemessung ermöglichen; denn die in die Rechnung eingehenden Grössen lassen sich ohne Schwierigkeit auf $^1/_{2000}$ ihres Wertes ermitteln. In Verbindung mit dieser Messung wurde nach der Steighöhenmethode von Hrn. Quincke die Susceptibilität des Wassers und einer Eisenchloridlösung möglichst genau bestimmt.

Bekanntlich zeigen auch die neueren Bestimmungen der Susceptibilität des Wassers Unterschiede von mehr als 20 Proc., und deshalb schien mir eine abermalige Messung derselben unter möglichster Berücksichtigung aller Fehlerquellen von Interesse zu sein.

### Theorie.

Ein Condensator der Capacität $c$ ist mit der Elektricitätsmenge $e_0$ zur Potentialdifferenz $V_0$ geladen; alle Grössen seien im elektromagnetischen Maasssystem gemessen. Die eine Platte desselben ist mit einem Drahtende eines im magnetischen Felde befindlichen Solenoids verbunden. Die Capacität dieses Solenoids sei klein gegen die des Condensators, und Rückstandswirkungen seien nicht vorhanden. Wird jetzt die Verbindung des anderen Drahtendes mit der zur Erde abgeleiteten Condensatorplatte hergestellt, so gleicht sich die Potential-

differenz der Platten aus, und die Ladung fliesst durch das Solenoid zur Erde.

Aus der Uebereinstimmung der Werte der Grösse „$v$", die von Weber und Kohlrausch, von Hrn. Himstedt und von Hrn. Klemenčič erhalten wurden, mit den Werten, die sich aus der Methode von Thomson ergaben, folgt, dass die zeitliche Aenderung einer elektrischen Ladung[1]) in einem Leiter, der sogenannte Entladungsstrom eines Condensators, gleich starke ponderomotorische Wirkungen auf eine Magnetnadel hervorbringt wie der Strom eines geschlossenen Kreises. Umgekehrt wird auch auf ein von einem Entladungsstrom durchflossenes Solenoid mit der Windungszahl $n$ und der Fläche $q$ in einem Magnetfeld der Stärke $H$ ein Drehungsmoment ausgeübt von der Grösse, dass die während der Zeit $dt$ von dem System abgegebene Energie gleich

$$n \frac{dN}{dt} \cdot \frac{de}{dt} \cdot dt$$

ist. Hierin bedeutet $N$ die Anzahl der die Fläche durchsetzenden Kraftlinien gleich $H.q$, und $de/dt$ die Stärke des Entladungsstromes. Der Gewinn an ponderomotorischer Arbeit muss einen Verlust an andersartiger Energie herbeiführen und, da nach der Entladung des Condensators die ganze elektrische Energie in Wärme umgesetzt wird, muss die letztere kleiner sein, als dies bei Nichtleistung mechanischer Arbeit der Fall wäre.

Nach den Versuchen von Riess, Knochenhauer und nach dem Princip von der Erhaltung der Energie ist die gesamte Wärmemenge gleich $\frac{1}{2} c V^2$, wobei $c$ die Capacität des Systems bedeutet. In der Zeit $dt$ wird also die Wärme

$$c \cdot V \cdot \frac{dV}{dt} dt = V \cdot \frac{de}{dt} dt$$

erzeugt; $V$ ist das mittlere Potential in der Zeit $dt$. Wird gleichzeitig ponderomotorische Arbeit geleistet, so muss die Wärme um eine bestimmte Grösse vermindert werden. Diese Grösse kann gleich $V'.(de/dt)dt$ gesetzt werden, wobei $V'$ die Verminderung der elektromotorischen Kraft, die sogenannte inducirte elektrische Kraft, und $de/dt$ die wirklich vorhandene

1) In elektromagnetischem Maass gemessen.

Stromstärke in der Zeit $dt$ bedeuten. Nach dem ersten Hauptsatz ist dann

$$V' \frac{de}{dt} dt = n \cdot \frac{de}{dt} \frac{dN}{dt} dt,$$

wobei $de/dt$ auf beiden Seiten die wirklich vorhandene mittlere Stromstärke ist, oder

$$V' = n \frac{dN}{dt}$$

und

$$\int V' dt = n \cdot (N - N_0).$$

Wird das Solenoid nicht gedreht, sondern aus dem magnetischen Feld entfernt, oder wird das Feld geändert, so gilt, wie man durch einen Kreisprocess nachweisen kann, der gleiche Ausdruck für die ponderomotorische Arbeit, und man erhält denselben Satz, der demnach für offene wie für geschlossene in Leitern fliessende Ströme gilt. Beachtenswert ist, dass für stationäre Aenderung von $N$, d. i.

$$\frac{dN}{dt} = \text{const.},$$

keine Dämpfung und kein Energieverbrauch stattfindet.

Befindet sich die Spule erst im Felde der Stärke $H_0$, dann im Felde $H$, so erhält man aus der obigen Gleichung

$$H - H_0 = \frac{\int V dt}{n \cdot q}.$$

Das $\int V dt$ lässt sich mit einem Quadrantelektrometer gerade so messen, wie $\int i dt$ mit einem ballistischen Galvanometer. Solange die Ablenkungen proportional $V$ sind, ist

$$\int V dt = A \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot a,$$

wobei $A$ der Reductionsfactor für 1 Sct., $a$ die Anzahl der Scalenteile und $\tau$ die Schwingungsdauer der Nadel bedeuten. Zeigt das Instrument, wie dies bei allen Quadrantelektrometern stattfindet, merkliche, aber nahezu constante Dämpfung, so muss der Ausdruck noch mit

$$k^{1/\pi \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{l \cdot k}\right)}$$

multiplicirt werden. Folgende Constanten sind also zu messen: am Quadrantelektrometer Empfindlichkeit, Schwingungsdauer,

Dämpfungsverhältnis, an der Inductionsspule Windungsfläche und Windungszahl. Von den elektromagnetischen Grössen geht nur die elektromotorische Kraft in die Rechnung ein, und diese ist dank der sorgfältigen Untersuchungen über Normalelemente ohne Schwierigkeit auf etwa $^1/_{2000}$ ihres *absoluten* Wertes angebbar.

**Magnetfeld und Inductionsspule.**

Das magnetische Feld wurde zwischen den Flachpolen eines Ringelektromagneten nach Du Bois, dessen Spulen von 2,4 Ohm Widerstand hintereinander geschaltet waren, erzeugt. Es war, wie Versuche zeigten, innerhalb des Bereichs der Inductionsspule bis auf etwa 1—2 Tausendstel der Gesamtfeldstärke homogen.

Der Abstand der Polschuhe war bei diesen Versuchen meist 3,5 cm, der magnetisirende Strom 10—18 Amp., die Feldstärke 3500—5000 Einheiten.

Die Inductionsspule wurde aus Kupferdraht von 0,34 mm Drahtdicke (mit doppelter Umspinnung 0,39 mm dick) auf einer Ebenholzspindel von 4,977 cm Durchmesser, die sorgfältig abgedreht war, möglichst gleichmässig gewickelt. Hr. Mechaniker H. Elbs hatte die Freundlichkeit, die schwierige Arbeit selbst auszuführen. Mit einem Caliber, an dem $^5/_{100}$ mm noch geschätzt werden konnte, wurde der äussere Durchmesser jeder Windungslage an verschiedenen Stellen bestimmt und an einem Tourenzähler die Windungszahl jeder Lage abgelesen. Die Zahl der Lagen war 10, die der Windungen einer Lage 58. Die gesamte Windungsfläche ergab sich zu 13040. [cm$^2$]. Der äussere Durchmesser der fertigen Spule betrug 5,8 cm, die Dicke derselben 3 cm.

Solch grosse Dimensionen der Spule wie die hier angegebenen sind aber durchaus nicht notwendig. Der Kupferdraht kann, da der Widerstand gleichgültig ist, viel dünner und die Anzahl der Lagen zwei- oder dreimal grösser genommen und dadurch die Breite der Spule auf $^1/_5$ und noch weniger herabgesetzt werden.[1]) Bei dem entsprechenden ge-

1) Homogenität der Spule ist nicht erforderlich, da das Inductionsgesetz die Form des Leiters nicht enthält. Nur für die galvanische Ausmessung der Windungsfläche ist es wünschenswert, dass die Spule nicht allzu ungleichmässig ist.

ringeren Abstand der Polschuhe ist das magnetische Feld fast doppelt so stark, und dies ist für viele Messungen vorteilhafter. Der Verfasser nahm die Spule breit und den Draht dick, in der Hoffnung, die im Folgenden angegebene galvanische Ausmessung der Windungsfläche durch die geometrische zu controliren. Jedoch betrug der Unterschied infolge Einsinkens der oberen Lagen 0,3 Proc., sodass schliesslich doch nur die galvanische Ausmessung als richtig angenommen und auf die geometrische von vornherein verzichtet werden kann. Auch der Durchmesser der Spule und damit die Querdimensionen des Feldes könnten bei Anwendung der Multiplicationsmethode auf etwa $^2/_3$ ihres Wertes beschränkt werden. Die Windungsfläche wurde darauf nach der Methode von Hrn. F. Kohlrausch[1]) 14 Tage nach beendigter Wickelung bestimmt. Hr. Prof. Himstedt war so gütig, für diesen Zweck die von ihm construirte und beschriebene[2]) Tangentenboussole zu leihen.

Der Draht, welcher eine Windungslage bildet, ist um einen abgeschliffenen Glasring gelegt, der Radius beträgt 24,712 cm. Der durch die Zuleitung bewirkte Fehler ist durch coaxiale Anordnung beseitigt. Die Genauigkeit, mit der die Messung nach Kohlrausch ausgeführt werden kann, ist bekanntlich eine sehr hohe. Ich erhielt an zwei Tagen Resultate, die nur um 0,02 Proc. differirten. Die Längenmessungen wurden mit einem Normalmaassstab ausgeführt. Die Correctionen, die häufig erhebliche Werte erreichen, waren für meine Spule gering (der erhaltene Wert war mit 1,0064 zu multipliciren). Die Windungsfläche ergab sich zu 13007; der wahrscheinliche Fehler dürfte kaum mehr als $\pm 5$ betragen. Die Abweichung von der geometrischen Ausmessung beträgt demnach, wie oben erwähnt, 0,3 Proc., sie lässt sich aber durch das Einsinken der zehn übereinander gewickelten Lagen erklären.

Für die Messungen wurde der Wert 13010 zu Grunde gelegt.

Um die Induction hervorzurufen, wurde die Spule rasch aus dem Felde heraus- oder in dasselbe hineingezogen. Eine Führung von Glasröhren sorgte für Verschiebung senkrecht

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 18. p. 513. 1883.
2) F. Himstedt, Wied. Ann. 49. p. 589. 1893.

zu den Kraftlinien. Häufig wurde auch der magnetisirende Strom geöffnet oder geschlossen[1]), während die Spule sich im Felde befand.

**Quadrantelektrometer.**

Zur Messung der Potentialdifferenz auf ballistischem Wege wurde ein nach Angaben von Hrn. F. Himstedt construirtes und von ihm beschriebenes Quadrantelektrometer verwandt.[2]) Die vier Aluminiumnadeln sind an einem Wollastondraht aufgehängt, der keine merkbare elastische Nachwirkung zeigte. Die Nadelladung wurde von 100 Damienelementen (Kupfer-Zink in Magnesiasulfat) geliefert.

Das eine Quadrantenpaar, sowie das eine Drahtende der im Magnetfeld befindlichen Inductionsspule werden zur Erde abgeleitet. Das zweite Quadrantenpaar wurde zur Messung der Inductionswirkung mit dem anderen Draht der Spule verbunden, und war somit auch zur Erde abgeleitet. Isolationsfehler oder Ausstrahlung der Elektricität können daher keine Störung verursachen. — Zur *Bestimmung der Empfindlichkeit* wurde das eine Quadrantenpaar mit einer Klemme eines stromdurchflossenen Präcisionsrheostaten, der an verschiedenen Stellen zur Erde abgeleitet werden konnte, verbunden. Das stromgebende Trockenelement wurde mit 4000 Ohm geschlossen, und je nach Bedarf wurde von $^1/_4$ oder $^1/_8$ dieses Widerstandes abgezweigt. Die Spannung an den beiden Endklemmen des Rheostaten wurde dann bei verminderter Empfindlichkeit des Elektrometers mit Normalelementen verglichen. Es zeigte sich, dass das *Trockenelement* mehrere Wochen bei einem Gesamtverbrauch von $^1/_{500}$ Ampèrestunden *seine elektromotorische Kraft um weniger als* $^6/_{10000}$ änderte und von 20—25° von der Temperatur fast unabhängig war. Als Normalelemente dienten zwei genau nach Vorschrift der Physik.-Techn. Reichsanstalt hergestellte Westonelemente, die beide auf 0,1 Millivolt übereinstimmten. Der absolute Wert ihrer elektromotorischen Kraft wurde nach den neuesten Messungen[3]) zu 1,0186 Volt bei 20° angenommen.[4])

1) Vgl. p. 513.

2) F. Himstedt, Wied. Ann. **50**. p. 752. 1893.

3) Vgl. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. p. 351. Leipzig 1901.

4) Ein Clarkelement mit Thonzelle von R. Fuess zeigte keine genügende Uebereinstimmung mit den Westonelementen. Nach der in der

Die Empfindlichkeit des Elektrometers änderte sich nur wenig, 1 mm der Scala entsprach bei 2300 mm Scalenabstand etwa 0,004 Volt. Vor und nach jedem Versuch wurde eine Aichung vorgenommen.

Das *Dämpfungsverhältnis* wurde in der üblichen Weise auf $1\,^1/_2$ Tausendstel genau festgestellt. Innerhalb des hier allein verwandten Scalenausschlages von 0—100 mm nimmt dasselbe um etwa ein Tausendstel zu. Bei grösseren Ausschlägen, für die auch keine strenge Proportionalität mit der Potentialdifferenz vorhanden ist, wächst die Dämpfung und ist für Ausschläge von 200 bereits um ein Hundertstel grösser und steigt dann schnell. Eine Constanz der Dämpfung war wegen der complicirten Verhältnisse — die ruhenden und die schwingenden Scheiben haben Schlitze und die Luftmasse ist seitlich begrenzt — von vornherein nicht zu erwarten. Es muss aber hervorgehoben werden, dass Unregelmässigkeiten, wie sie die Dämpfung bei den Quadrantelektrometern mit Schwefelsäurezuleitung zeigt, bei der Aufhängung am Platindraht nicht vorkommen; ich erhielt an verschiedenen Tagen stets denselben Wert. Das Dämpfungsverhältnis kann demnach gerade so genau ermittelt werden wie beim ballistischen Galvanometer. Die *Schwingungsdauer* wurde mit Hipp'schen Chronoskop, das mit einer Normaluhr verglichen wurde, bestimmt. Da die Dämpfung nicht gross war, konnte die Dauer von fünf halben Schwingungen gemessen werden. Die Dauer einer halben Schwingung betrug im Mittel 6 Sec. mit einem Fehler von etwa $\pm$ 0,001 Sec. Da aber das Dämpfungsverhältnis für Ausschläge von 0—100 Sct. um $1\,^1/_2$ Tausendstel wächst, so ist die für das gleiche Intervall geltende Schwingungsdauer auf etwa $^3/_8$ Tausendstel, also 0,004, unsicher.

### Versuche.

Die Induction kann entweder durch Heraus- oder Hineinziehen der Spule aus dem magnetischen Felde oder durch

Physik.-Techn. Reichsanstalt gütigst vorgenommenen Aichung war die elektrische Kraft in der That um den aussergewöhnlich hohen Betrag von 4,5 Millivolt niedriger als normal, was auch annähernd zu der vor dem Transport vorgenommenen Vergleichung mit den Westonelementen stimmt.

Schliessen des magnetisirenden Stromes bewirkt werden. Erstere Methode giebt gute und einwandsfreie Resultate, aber es darf die Spule nicht zu rasch bewegt werden; denn sonst werden die Ausschläge bisweilen um 2—4 Proc. grösser und für die beiden Feldrichtungen unsymmetrisch. Bei rascher Bewegung der Spule ($^1/_4$ Sec.) wird nämlich die Strecke der Hauptabnahme der Kraftlinien (etwa 70 Proc.) in $^1/_{10}$—$^1/_{20}$ Sec. durchlaufen und dadurch eine Potentialdifferenz von über 10 Volt erzeugt. Ist jedoch das Quadrantelektrometer vollkommen in Ordnung, was von uncontrolirbaren Zufälligkeiten abhängt, so ist der Ausschlag auch für ganz rasche Bewegung nur sehr wenig verschieden von dem für normale Geschwindigkeit (1 Sec.). Im allgemeinen ist eine mässig rasche Bewegung vorzuziehen.

Wird die Spule nicht weit vom Elektromagneten entfernt, so muss noch das Feld an der betreffenden Stelle gemessen werden, was durch Schliessen des Stromes im Elektromagnet mit genügender Genauigkeit geschehen kann. Um ein Drehen der Spule zu verhindern und eine stets gleichmässige Lage $\perp$ zu den Kraftlinien zu sichern, wurde eine Führung aus Glasröhren angebracht.

Die Induction beim Schliessen des Stromes lässt sich ohne solche Vorrichtungen beobachten, aber man kann einwenden, dass infolge der grossen Selbstinduction des Elektromagneten die Gesamtänderung mehr Zeit beansprucht als bei der kurzen Schwingungsdauer der meisten ballistischen Instrumente zulässig wäre. Die Beobachtungen zeigten mir, dass bei dem Du Bois'schen Elektromagneten des hiesigen physikalischen Institutes dieser Umstand nur wenig stört. Mit Berücksichtigung des remanenten Magnetismus ergab sich nämlich das Verhältnis des Inductionsausschlages beim Herausziehen zu dem beim Oeffnen 1,005. Durch directe Beobachtung des Feldanstieges wurde dies bestätigt. Das magnetische Feld besass nach $^1/_5$ Sec. 60 Proc. seiner Gesamtstärke, nach $^1/_3$ Sec. 78 Proc., nach 1 Sec. 98 Proc., nach $1^1/_2$ Sec. seine volle Stärke. Die schliessliche Stromstärke war hierbei gleich 10—17 Amp., die Feldstärke 3000—5000 Einheiten. Ein inductionsfreier Widerstand war nicht vorgeschaltet. Man wäre also wohl berechtigt, wenn man einmal die Correction ermittelt hat, stets die Induction beim Schliessen der Messung

zu Grunde zu legen. Die Induction beim Oeffnen lässt sich nicht so gut verwerten; sie giebt zu kleine Werte.

Zur Beurteilung der Genauigkeit in der Messung des Inductionsausschlages seien folgende Zahlen (Ausschlag in Scalenteilen) angegeben:

74,0, 74,3, 74,2, 74,2; Mittel: 74,18

auf etwa 1 Tausendstel genau.[1]) Die Bedingung dafür, dass das Mittel den richtigen Wert giebt, ist natürlich die Constanz des magnetisirenden Stromes. Deshalb wurde der Strom immer nur auf kurze, stets gleiche Zeit durch Eintauchen von amalgamirten Kupferbügeln in Quecksilbercontacte geschlossen. Die benutzte Accumulatorenbatterie erwies sich bei dem geringen Ampèrestundenverbrauch als constant. Die aus diesen Beobachtungen sich ergebende Feldstärke setzt sich aus Grössen zusammen, die wie *Schwingungsdauer*, *Dämpfungsverhältnis*, *Empfindlichkeit des Elektrometers* und *Windungszahl der Spule* ohne grosse Schwierigkeiten *auf* $^1/_2$ *Tausendstel* genau bestimmt werden können. Der *Inductionsausschlag* dagegen besitzt einen Fehler von etwa *1 Tausendstel*, doch ist dies, wie ich glaube, hauptsächlich der Inconstanz des magnetischen Feldes zuzuschreiben. Durch Vorschalten eines inductionsfreien Widerstandes (im Petroleumbad) und Anwendung einer Potentialdifferenz von etwa 200 Volt, wie Du Bois[1]) es vorgeschlagen hat, liesse sich diese Fehlerquelle wohl vermeiden.

Die Vorzüge der hier beschriebenen Methode vor der üblichen Messung mit dem *ballistischen Galvanometer* bestehen, wie ich glaube, erstens in der *Unabhängigkeit von magnetischen Störungen*[2]), zweitens darin, dass die *einzige* Grösse des elektromagnetischen Systems, die der Messung zu Grunde liegt, leicht mit Hülfe der Normalelemente auf $^1/_{2000}$ genau erhalten werden kann. Stromstärke *und* Widerstand bez. Horizontalintensität auf $^1/_{1000}$ ihres *absoluten* Wertes zu ermitteln, er-

1) Du Bois, Magnetische Kreise p. 281. Berlin. 1894.

2) Bei Benutzung eines Galvanometer nach d'Arsonval dürfte wegen der grossen Dämpfung die Bestimmung der Schwingungsdauer und des Dämpfungsverhältnisses auf 1 Tausendstel kaum möglich sein.

fordert jedenfalls weit mehr Zeit. Dass die elektromotorische Kraft der Normalelemente nur auf etwa $^1/_2$ Tausendstel des absoluten Wertes sicher bekannt ist, kommt nicht in Betracht, da die Schwierigkeit, Strommessungen und Widerstandsmessungen oder Bestimmungen der Horizontalintensität genauer auszuführen, bekanntlich gross ist. Dass die Dimensionen der Spule bei dieser Methode grösser sein müssen, ist nur von Nachteil, wenn es sich um kleine magnetische Felder handelt; denn sonst lässt sich wegen des grösseren Abstandes von der Tangentenboussole die Windungsfläche besser bestimmen, wie an einer kleinen Spule. Die geometrische Messung einer kleinen Spule genau auszuführen, erfordert wohl noch mehr Zeit.

Für kleine magnetische Felder könnte vielleicht bei Anwendung des Quadrantelektrometers in der von Dolezalek und Nernst[1]) angegebenen Form, welche cet. par. etwa die 30 fache Empfindlichkeit haben, auch eine sehr kleine Spule benutzt werden.

Die Empfindlichkeit der Elektrometer kann in bequemer Weise durch die Nadelladung in weiten Grenzen geändert werden.

**Bestimmung der magnetischen Susceptibilität des Wassers.**

Für die Susceptibilität des Wassers und der anderen schwach dia- oder paramagnetischen Substanzen haben sich bekanntlich auch nach den neueren Messungen Werte ergeben, die um mehr als 20 Proc. verschieden sind. Die Ursache dieser Abweichungen kann entweder in einem uns noch unbekannten Verhalten der Flüssigkeiten oder in unrichtiger Bestimmung der Feldstärke gesucht werden. Für das Verhältnis der Susceptibilität zweier Flüssigkeiten sind nach den verschiedensten Methoden von allen Forschern Zahlen erhalten worden, die sich nur wenig voneinander unterscheiden. Insbesondere aber haben die Messungen von G. Jäger und St. Meyer[2]), welche nach drei verschiedenen Methoden die Susceptibilität des

1) F. Dolezalek u. W. Nernst, Zeitschr. f. Instrumentenk. **17**. p. 565—577. 1897.

2) G. Jäger u. St. Meyer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **106**. p. 104. 1897; Wied. Ann. **67**. p. 707. 1899.

Wassers bestimmten, die Feldstärke aber stets auf die gleiche Art maassen, gezeigt, dass besondere Eigenschaften der Flüssigkeiten nicht vorhanden sein können. Demnach ist wohl die Bestimmung der Feldstärke die Ursache der Abweichungen, und das ist um so wahrscheinlicher, weil das Quadrat derselben für die ponderomotorischen Wirkungen auf die Flüssigkeiten maassgebend ist. Zum Teil mögen die Fehler durch die Unmöglichkeit, stets das gleiche Magnetfeld wiederherzustellen, hervorgerufen sein, zum Teil aber auch durch die Schwierigkeit der genauen absoluten Bestimmung der in die Rechnung eingehenden Grössen, wie Horizontalintensität oder Stromstärke und Widerstand bei den ballistischen Methoden oder Windungsfläche und Widerstand der kleinen schwingenden Spule bei der Dämpfungsmethode. Die Messung des magnetischen Feldes durch die Drehung der Polarisationsebene im Schwefelkohlenstoff oder in Glas, an sich wohl die rascheste und genaueste Methode, lässt nur den Schluss auf die Feldstärke in der Áxe der Durchbohrung zu, und die ausserhalb kann um 10 Proc. grösser sein.

Um von der zuerst genannten Fehlerquelle frei zu sein, wurden Susceptibilität und Feldstärke in etwa 10 Sec. nacheinander ohne Aenderung des magnetisirenden Stromes bestimmt; die Feldstärke in der oben angegebenen Weise durch Herausziehen der Spule aus dem Felde, die Susceptibilität nach Quincke's Steighöhenmethode. Die Reihenfolge beider Operationen wurde häufig gewechselt, ohne dass Unterschiede bemerkbar waren. Die Glasröhren zur Messung der Steighöhe wurden immer nur 10 Min. lang benutzt und standen dann 6—10 Stunden lang mit Chromsäure gefüllt. Zur Beurteilung der Genauigkeit sei im Folgenden eine Bestimmung mit allen Correctionen wiedergegeben.

Vor den Versuchen wurde die *Schwingungsdauer* der Elektrometernadel in der auf p. 512 angegebenen Weise bestimmt. Die Dauer von fünf Schwingungen war = 148,48 Einheiten des Hipp'schen Chronoskopes, der mittlere Fehler jeder der neun Messungen beträgt 0,24 Einheiten, der wahrscheinliche des Resultates also 0,06. Da 148,55 Einheiten = 30 Sec. normal waren, so ist die Dauer einer Schwingung = 5,9994. Eine Messung nach Beendigung der folgenden Versuche ergab 6,0011 Sec. Der

Reductionsfactor auf unendlich kleine Bögen beträgt schon für die erste der fünf Schwingungen nur 0,00002, ist also zu vernachlässigen. Das *Dämpfungsverhältnis* war = 1,5415; der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates 0,0003 ist kleiner als der systematische durch Inconstanz der Dämpfung bedingte; die Aenderung derselben beträgt vom Ausschlag 80 Sct. bis 0 Sct. etwa 0,0013. Zu Grunde gelegt wurde $k = 1{,}5410$ für den Inductionsausschlag von etwa 70 Sct.

Die *Aichung* des Elektrometers ergab für $^1/_4$ der elektrischen Kraft eines Trockenelementes 95,43 Sct.; die gesamte elektrische Kraft des Elementes bei derselben Stromentnahme wurde durch Vergleich mit Westonelementen = 1,447 Volt gefunden.

Der *Inductionsausschlag* war als Mittel von sieben Messungen (vier vor der Bestimmung der Steighöhe, drei nach derselben) = 73,36 Sct.; der mittlere Fehler einer Messung war = 0,16 Sct., der wahrscheinliche des Resultates 0,04. Der Correctionsfactor für das nicht vollständige Herausziehen aus dem Felde beträgt 1,0084; denn das Feld an der betreffenden Stelle war das 0,0084 fache von dem zwischen den Polen. Der corrigirte Inductionsausschlag beträgt also 73,97. Die Windungszahl der Spule war früher zu 13010 bestimmt worden (vgl. p. 510). Aus diesen Daten berechnet sich die Feldstärke = **4964,1** mit einem wahrscheinlichen Fehler von 6 Einheiten, wie sich aus der Addition der Einzelfehler ergiebt. Den grösstmöglichen Fehler schätze ich auf etwa $\pm$ 10 Einheiten.

Die Steighöhe einer Eisenchloridlösung vom spec. Gew. 1,2715 bei 15° war in diesem Felde 2,97 cm; der Fehler dürfte etwa $\pm$ 0,01 cm betragen. Die einzelnen Ablesungen, an der gleichen Röhre unmittelbar hintereinander vorgenommen, stimmen zwar viel genauer überein, aber je nach Dauer der Reinigung mit Chromsäurelösung geben die Röhren verschiedene Werte von 2,91—2,975. Der höchste Wert dürfte indes unstreitig der richtige sein, denn er wurde übereinstimmend erhalten mit Röhren, die 8 und 24 Stunden mit Chromsäurelösung gefüllt gestanden hatten. Dieser Wert ist noch zu corrigiren. Erstens, weil der Durchmesser der engen Röhre 0,27 gegen den der weiten 0,78 nicht vernachlässigt werden darf; der

Correctionsfactor beträgt 1,0212. Zweitens, weil nach Unterbrechung des magnetisirenden Stromes die Röhre sich in dem durch remanenten Magnetismus verursachten Felde befindet; dieser Correctionsfactor ist indes sehr klein = 1,00001. Drittens, weil das ausserhalb des Elektromagneten gelegene Rohr bei Erregen desselben nicht im Felde 0 liegt; dies bedingt einen Correctionsfactor von 1,0012. Die corrigirte Steighöhe ist demnach = 3,042. Aus der Formel

$$K' = \frac{2g.h}{H^2}$$

erhält man die specifische Susceptibilität, das ist das Product von magnetischer Susceptibilität und specifischem Gewicht $= 23{,}94.10^{-6}$ bei 21° gegen Luft.

Aehnliche Resultate wurden auch nach neuer Aufstellung des Elektrometers und Veränderung der Empfindlichkeit erhalten. Bei einer Schwingungsdauer von 6,295 Sec. und einem Dämpfungsverhältnis von 1,585 ergab sich bei einer Feldstärke von 4642 $K'$ zu **24,29.**

In der folgenden Tabelle sind weitere Resultate zusammengestellt und auf gleiche Temperatur 22° corrigirt; der Temperaturcoefficient ist zu — 0,003 angenommen worden.

| $H$ | $K'$ | $H$ | $K'$ |
|---|---|---|---|
| 4964 | 23,93 | 3976 | 24,15 |
| 4642 | 24,29 | 4530 | 24,08 |
| 4534 | 24,23 | 4510 | 24,12 |

Im Mittel ist $K' = 24{,}13.10^{-6}$ bei 22° mit einem wahrscheinlichen Fehler des Resultates von ± 0,036.

Aus der vom Verfasser früher ermittelten Formel für die specifische Susceptibilität der Eisenchloridlösung ergiebt sich $K' = 24{,}7 . 10^{-6}$ bei 20°. Das Verhältnis der specifischen Susceptibilität der Eisenchloridlösung zu der des Wassers wurde in verschiedenen Feldern gemessen und gleich 30,00 mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0,03 gefunden.

Daher ist die *specifische Susceptibilität K' des Wassers bei 22° gegen Luft* $= 0{,}804 . 10^{-6}$, während der Verfasser sie

früher[1]) bei 21° direct = 0,803 gemessen hatte. Gegen das Vacuum bei 18° ist danach die magnetische Susceptibilität $K = 0{,}781$.

Die Formel für die specifische Susceptibilität einer Eisenchloridlösung vom Procentgehalt $p$ bei 18° gegen Vacuum lautet daher

$$K' = 87{,}9 \cdot p - 0{,}781\,(1 - p).$$

Freiburg i. B., Physikalisches Institut, Juli 1901.

1) J. Koenigsberger, Wied. Ann. **66**. p. 703. 1898.

(Eingegangen 1. August 1901.)

## 4. *Beitrag zur Kenntnis der Volumen- und Dichtigkeitsänderungen von Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen*[1]; *von E. Wenzel.*

Die Frage, wie sich Volumen und Dichtigkeit von Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen ändern, wurde erst eingehender im letzten Viertel des vorigen Jahrhunderts erörtert. Besonders sind hier zu erwähnen die Arbeiten von K. Ångström[2]) und seines Schülers E. Alméns[3]), von denen ersterer auch den Begriff „Absorptions-Dilatations-Coefficient" einführte. Er definirte ihn als die relative Volumenzunahme der Flüssigkeit durch Absorption der Volumeneinheit des Gases bei 0° C. und bei 760 mm Druck. Als Ergebnis fast all dieser Arbeiten fand man, dass die Volumenvermehrung der Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen proportional der absorbirten Gasmenge war. Hierbei muss jedoch berücksichtigt werden, dass man bei diesen Versuchen, besonders wenn es sich um Gase mit grossen Absorptionscoefficienten handelte, nur verhältnismässig geringe Gasquantitäten absorbiren liess. Alméns suchte nun auch noch für starke Absorption Werte für den Absorptions-Dilatations-Coefficienten zu erhalten, da er z. B. mit $NH_3$ nur bis ungefähr 0,15 Proc. und mit $SO_2$ bis ungefähr 0,32 Proc. der völligen Sättigung des Wassers gekommen war. Da aber seine bisher benutzte Methode der directen Beobachtung der Volumenänderungen hierfür nicht ausreichte, so berechnete er

1) Auszug aus der Bonner Dissertation.

2) K. Ångström, Öfvers. of Kongl. Vet. Akad. Förh. 1881; Wied. Ann. **15.** p. 297. 1882; **33.** p. 223. 1888.

3) E. Alméns, Öfvers. of Kongl. Vet. Akad. Förh. 1898; Beibl. **24.** p. 753. 1900.

aus dem specifischen Gewichte einer Lösung von $NH_3$ in Wasser und dem durch Titration erhaltenen Ammoniakgehalte den Absorptions-Dilatations-Coefficienten. Auf diese Weise fand er nun, dass das Gesetz von der Proportionalität der Volumenänderung zu der absorbirten Gasmenge wenigstens für $NH_3$ keine strenge Gültigkeit mehr habe. Dieses Verfahren ist jedoch keineswegs zu empfehlen. Einerseits sind für die kleinen Volumenänderungen, auf die es hier ankommt, die feinsten Methoden zur Bestimmung des specifischen Gewichtes nicht empfindlich genug, andererseits wird man wohl auch durch Titration die in einer Flüssigkeit enthaltene Gasmenge nicht mit derselben Genauigkeit bestimmen können, als die directe Beobachtung des jedesmal in die Flüssigkeit einzuleitenden Gases es gestattet. Deshalb wäre es wohl von Interesse, durch successives Einleiten von Gas, womöglich bis zur völligen Sättigung der Flüssigkeit, durch directe Beobachtung der Volumenvermehrung die Beziehung zwischen der Grösse des Absorptions-Dilatations-Coefficienten und dem Sättigungsgrade der Flüssigkeit mit dem betreffenden Gase festzustellen. Ich habe diese Beziehung nun experimentell untersucht, und zwar habe ich als absorbirende Flüssigkeit Wasser und als Gase Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlendioxyd, Schwefeldioxyd und Ammoniak genommen.

Der von mir benutzte, ganz aus Glas gefertigte Apparat war folgendermaassen construirt:

Das eigentliche Dilatometer besteht aus einem kugelförmigen Gefässe *G*, an welchem sich drei Oeffnungen *A*, *B*, *C* befinden. Die obere Oeffnung *A*, welche zum Füllen des Gefässes mit der bestimmten Flüssigkeit dient, kann man durch einen eingeschliffenen Stöpsel luftdicht verschliessen. In *B* ist vermittelst einer kurzen ziemlich engen Röhre eine andere U-förmige Röhre angeblasen, welch letztere bei *H* eine Erweiterung hat. An das noch freie Ende dieser Röhre setzt sich eine Capillare *K* an, die in Millimeter eingeteilt ist. Am Ende dieser Capillare ist noch ein kleines Gefäss *M* angeblasen, vermittelst dessen man bequem *H* und ein kleines Stück von *K* mit Quecksilber füllen kann. Von der Oeffnung bei *C* geht eine kurze Capillare nach unten, die bei *J* zwei 1 mm voneinander entfernte Kreismarken trägt. *D* und *E*

sind zwei doppelt durchbohrte Hähne, zwischen denen sich die Capillare zu einem kugelförmigen Gefässe *F* erweitert. An die über den Hahn *E* noch etwas hinausgehende Röhre wird ein Schlauch befestigt. Derselbe geht zu einem Gefässe mit Quecksilber, vermittelst dessen man dann durch Heben das in *F* befindliche Gas in das Gefäss *G* drücken kann. In der geraden Durchbohrung des leicht eingefetteten Hahnes *D* befindet sich Quecksilber, welches auch noch die darüber liegende Capillare ausfüllt. Dies hat den Zweck, dass die in *G* befindliche Flüssigkeit mit dem Hahn *D* nicht in Berührung kommen kann, da sonst leicht durch das Drehen des Hahnes etwas von der Flüssigkeit mitgerissen wird. Die beiden Kreismarken dienen zur genauen Einstellung des Quecksilbers (vgl. Fig. 1).

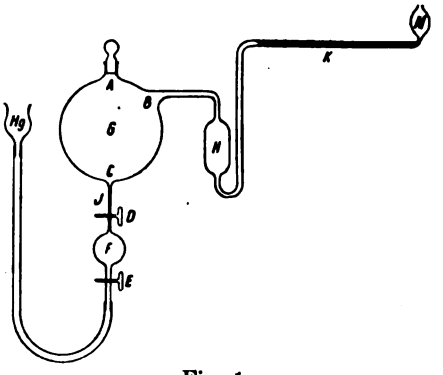



Fig. 1.

Die Füllung des Apparates geschieht in folgender Weise:

Der Apparat wird zuerst gründlich gereinigt und dann unter der Luftpumpe gut ausgetrocknet. Hierauf wird die gerade Durchbohrung des Hahnes *D* und die kurze Capillare bis zu dem oberen Kreisstriche und ebenfalls *H* bis zur Capillare *K* mit Quecksilber gefüllt. Nun wird der Dampf des schon längere Zeit stark kochenden destillirten Wassers durch das Dilatometergefäss *G* geleitet, dies letztere schnell mit dem noch kochenden Wasser gefüllt, der Stöpsel aufgesetzt und zur grösseren Vorsicht noch versiegelt. Um die Messungen bei constanter Temperatur vorzunehmen, wird der Apparat nun in ein mit schmelzendem Eis angefülltes Gefäss gestellt, durch dessen trichterförmige Oeffnung das Schmelz-

wasser abfliessen kann. Die Capillare allein, an der man die Messungen vornehmen muss, wird nicht mit Eis umgeben. Der Apparat bleibt nun je nach der Grösse des Dilatometers 1—4 Stunden im Eis stehen, damit die Versuchsflüssigkeit constante Temperatur erreiche. Alsdann wird der Stand des Quecksilberfadens in der Capillare abgelesen. Der Apparat wird nun an ein Gestell gehängt, mit dem Quecksilberschlauch verbunden und dann das Gas je nach seinem specifischen Gewichte durch den unteren oder oberen Hahn längere Zeit durch *F* durchgehen gelassen, wobei man dann das austretende Gas durch geeignete Reagentien auf seine Reinheit prüft. Ist dies geschehen, so schliesst man den Hahn, wo das Gas eintritt, und gleich darauf auch den anderen, sodass das in *F* befindliche Gas unter dem gerade herrschenden Atmosphärendruck steht. Man liest nun an einem Thermometer, dessen Quecksilberbehälter direct an die Kugel *F* stösst, die Temperatur ab, was bis auf $^1/_{10}{}^0$ C. leicht geschehen konnte, und ebenso den Stand des Barometers. Hierauf leitet man durch Heben des Quecksilberbehälters, nachdem die Hähne richtig eingestellt sind, das Gas in *G* ein. Hierbei wird das in *D* und der darüber befindlichen Capillare stehende Quecksilber heraufgedrängt, welches sich nun über die Oeffnung *C* lagert und ein Gasbläschen nach dem anderen durchlässt. Ist alles Gas eingefüllt, so bringt man das bei *C* befindliche Quecksilber mittels des zum Einfüllen des Gases benutzten wieder in seine vorherige Stellung zurück und schliesst den Hahn *D*. Sobald das Gas absorbirt ist, was man noch durch Schütteln beschleunigen kann, bringt man den Apparat in das Gefäss mit Eis und liest nun die jetzige Stellung des Quecksilberfadens in der Capillare *K* ab. Die Differenz zwischen dieser Stellung und derjenigen vor der Absorption giebt direct die entstandene Volumenänderung an.

Bei meinen Untersuchungen habe ich vier Apparate von der vorhin beschriebenen Gestalt benutzt. Ihre Dimensionen, die ich durch Auswägen mit Quecksilber ermittelt habe, und den bei ihrer Verwendung erreichbaren Genauigkeitsgrad bei der Bestimmung der einzelnen Quantitäten teile ich nachstehend mit.

Bei dem Apparate I für Wasserstoff und Sauerstoff be-

trug das Volumen des Dilatometers etwa 64 ccm. Die Länge der Capillare betrug 20 cm und ihr Inhalt von Millimeter zu Millimeter 0,2365 cmm. Das Volumen zwischen den beiden Hähnen war 132,86 cmm. Die Volumenzunahme liess sich mit einer Genauigkeit von etwa 0,02 cmm entscheiden. Das jedesmal einzuführende Gasvolumen war so gewählt, dass die Absorption in zwei Tagen immer beendigt war.

Bei dem Apparate II für Kohlensäure betrug das Volumen des Dilatometergefässes etwa 45 ccm. Der Zwischenraum zwischen den beiden Hähnen hatte ein Volumen von 4990,4 cmm. Der Inhalt der Capillare von Teilstrich zu Teilstrich betrug 0,2457 cmm und ihre Länge 30 cm. Die Volumenzunahme liess sich mit einer Genauigkeit von 0,02 cmm bestimmen. Der Fehler bei der Bestimmung des Gasvolumens betrug etwa 2 cmm. Die Absorption war in 1—2 Tagen zu Ende.

Der Apparat III für Schwefeldioxyd hatte ein Volumen von etwa 8,6 ccm, und der Inhalt zwischen den beiden Hähnen betrug 8812,4 ccm. Das Volumen der Capillare von Millimeter zu Millimeter war 0,3896 cmm und ihre Länge 30 cm. Die Volumenzunahme liess sich mit einer Genauigkeit von etwa 0,04 cmm entscheiden. Der Fehler bei der Bestimmung des Gasvolumens betrug etwa 5 cmm. Die Absorption dauerte höchstens einen Tag.

Bei dem Apparate IV für Ammoniak betrug das Volumen des Dilatometergefässes etwa 3,1 ccm. Das Volumen zwischen den beiden Hähnen war 100977 cmm; der Inhalt der Capillare von Teilstrich zu Teilstrich betrug 0,3896 cmm und ihre Länge 30 cm. Die Volumenzunahme liess sich mit einer Genauigkeit von etwa 0,04 cmm bestimmen. Der Fehler bei der Bestimmung des Gasvolumens dürfte nicht mehr als 35 cmm betragen haben. Die Absorption dauerte zuerst etwa 2 Stunden, später länger, bis zu einem halben Tage.

Es ist noch zu bemerken, dass bei den Versuchen mit Kohlensäure, Schwefeldioxyd und Ammoniak die Capillare *K* nicht ausreichte und deshalb verschiedentlich Quecksilber herausgenommen werden musste. So musste bei den Versuchen mit Kohlensäure nach der vierten Absorption, mit Schwefeldioxyd nach je zwei Versuchen und mit Ammoniak nach jedem Versuche Quecksilber herausgenommen werden.

Eine besondere Schwierigkeit bestand noch darin, die Gase absolut rein zu erhalten, was besonders bei Schwefeldioxyd und Ammoniak der Fall war. Musste doch Schwefeldioxyd bis etwa auf $^1/_{100}$ Proc. und Ammoniak sogar bis etwa auf $^1/_{1000}$ Proc. rein sein, da bei den grossen einzuführenden Gasquantitäten jede noch so geringe Verunreinigung sich bemerkbar machte.

Wasserstoff, Sauerstoff und Kohlendioxyd erhielt ich nach mehreren Versuchen genügend rein, während mir dies bei Schwefeldioxyd und Ammoniak erst durch Verflüssigung derselben gelang. Das zur Condensation von $NH_3$ gebrauchte Fläschchen stellt Fig. 2 dar. Dasselbe war aus dickwandigem Glase, das durch einen Hahn verschlossen werden konnte. Damit derselbe nicht herausgedrückt werden konnte, da im Innern des Fläschchens nachher bei gewöhnlicher Temperatur ein Druck von mehreren Atmosphären herrschte, wurde der Hahn mittels dünner Kupferdrähte verschnürt, jedoch so, dass man denselben noch bequem drehen konnte. Das Fläschchen besass ausserdem noch ein an einer Stelle ausgezogenes Ansatzrohr, durch welches eine dünne Capillare bis auf den Boden reichte. Am freien Ende der Ansatzröhre war ein kurzer Gummischlauch befestigt, der sich noch leicht an den oberen dickeren Teil der Capillare legte. Er schloss so die äussere Luft vollständig ab, gestattete jedoch dem überschüssigen Gase, das durch die Capillare einströmte, aus dem Gefässe auszutreten. War das Fläschchen gefüllt, so wurde noch während des Einströmens des Gases die Ansatzröhre an der engeren Stelle zugeschmolzen.

Fig. 2.

Ich teile nachstehend die gewonnenen Resultate mit.

**Wasserstoff, durch Wasser absorbirt. (Apparat I.)**

Das Gas wurde in einem Kipp'schen Apparate durch Einwirkung von verdünnter Schwefelsäure auf granulirtes Zink dargestellt. Zum Reinigen wurde es durch destillirtes Wasser und eine Lösung von Kaliumpermanganat geleitet und schliesslich durch concentrirte Schwefelsäure getrocknet. Die nachstehende Tabelle giebt die Resultate.

Die erste Columne teilt das jedesmal eingeführte Gasvolumen ($g$) bei 0° C. und 760 mm Druck in Cubikmillimetern mit. Die zweite Columne das Gesamtvolumen ($G$) des eingeführten Gases. Die dritte Columne enthält den ungefähren Sättigungsgrad des Wassers mit dem betreffenden Gase in Procenten ausgedrückt. Die vierte Columne teilt die jedesmalige Volumenzunahme ($\Delta v$) in Cubikmillimetern mit; die fünfte die gesamte Volumenzunahme ($\Sigma \Delta v$) in Cubikmillimetern. Die sechste und siebente Columne enthalten den Wert des Absorptions-Dilatations-Coefficienten, das eine Mal (wie bei Almén) als das Verhältnis zwischen der Summe sämtlicher Volumenvergrösserungen zur Summe der eingeführten Gasmengen

$$\left(\delta = \frac{\Sigma \Delta v}{G}\right),$$

das andere Mal (wie bei K. Ångström) als das Verhältnis zwischen der von jeder einzelnen eingeführten Gasmenge verursachten jeweiligen Volumenzunahme und dem Volumen dieser Gasmenge

$$\left(d = \frac{\Delta v}{g}\right).$$

Tabelle 1.

| $g$ | $G$ | Proc. | $\Delta v$ | $\Sigma \Delta v$ | $\delta = \frac{\Sigma \Delta v}{G}$ | $d = \frac{\Delta v}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 124 | 124 | 9 | 0,1419 | 0,1419 | 0,001144 | 0,001144 |
| 250 | 374 | 28 | 0,2838 | 0,4257 | 0,001138 | 0,001135 |
| 253 | 627 | 47 | 0,2956 | 0,7213 | 0,001154 | 0,001168 |
| 251 | 878 | 65 | 0,2838 | 1,0051 | 0,001144 | 0,001130 |
| 249 | 1127 | 84 | 0,2838 | 1,2889 | 0,001143 | 0,001139 |
| 125 | 1252 | 93 | 0,1419 | 1,4308 | 0,001142 | 0,001135 |

**Sauerstoff, durch Wasser absorbirt. (Apparat I.)**

Das Gas wurde durch Erhitzen von Kaliumdichromat und concentrirter Schwefelsäure dargestellt. Es wurde in einem Gasometer über Wasser aufgefangen und dann vor dem Gebrauche durch concentrirte Schwefelsäure getrocknet. Die Bezeichnungen in der Tabelle sind dieselben.

Tabelle 2.

| $g$ | $G$ | Proc. | $\Delta v$ | $\Sigma \Delta v$ | $\delta = \frac{\Sigma \Delta v}{G}$ | $d = \frac{\Delta v}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 250 | 250 | 9 | 0,2838 | 0,2838 | 0,001134 | 0,001134 |
| 374 | 624 | 23 | 0,4257 | 0,7094 | 0,001136 | 0,001138 |
| 373 | 997 | 38 | 0,4020 | 1,1115 | 0,001114 | 0,001077 |
| 386 | 1383 | 52 | 0,4493 | 1,5608 | 0,001128 | 0,001164 |
| 381 | 1764 | 67 | 0,4257 | 1,9865 | 0,001125 | 0,001117 |
| 385 | 2149 | 82 | 0,4493 | 2,4358 | 0,001133 | 0,001167 |
| 378 | 2527 | 96 | 0,4257 | 2,8615 | 0,001132 | 0,001126 |

**Kohlensäure, durch Wasser absorbirt. (Apparat II.)**

Das Gas wurde dargestellt durch Auftröpfeln von concentrirter Schwefelsäure auf eine concentrirte Lösung von doppelt kohlensaurem Natron. Getrocknet wurde es durch concentrirte Schwefelsäure.

Tabelle 3.

| $g$ | $G$ | Proc. | $\Delta v$ | $\Sigma \Delta v$ | $\delta = \frac{\Sigma \Delta v}{G}$ | $d = \frac{\Delta v}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9480 | 9480 | 11 | 14,4472 | 14,4472 | 0,001523 | 0,001523 |
| 9425 | 18905 | 23 | 14,1277 | 28,5749 | 0,001511 | 0,001499 |
| 9380 | 28285 | 35 | 14,1277 | 42,7026 | 0,001511 | 0,001506 |
| 9395 | 37680 | 47 | 14,0540 | 56,7567 | 0,001509 | 0,001496 |
| 9535 | 47215 | 59 | 14,4226 | 71,1791 | 0,001506 | 0,001512 |
| 9710 | 56925 | 71 | 14,5700 | 85,7491 | 0,001507 | 0,001500 |
| 9760 | 66680 | 83 | 14,5209 | 100,2700 | 0,001506 | 0,001488 |
| 4865 | 71545 | 89 | 7,6413 | 107,9113 | 0,001504 | 0,001570 |
| 4835 | 76380 | 95 | 7,6904 | 115,6017 | 0,001513 | 0,001590 |

**Schwefeldioxyd, durch Wasser absorbirt. (Apparat III.)**

Das Gas wurde dargestellt durch Auftröpfeln von concentrirter Schwefelsäure auf reines Natriumbisulfit; getrocknet wurde es durch concentrirte Schwefelsäure. Um es vollständig zu reinigen, wurde es vermittelst Eis und Kochsalz verflüssigt. Die atmosphärische Verunreinigung des Gases wird etwa $^1/_{80}$ Proc. betragen haben, was jedoch auf die Werte des

Absorptions-Dilatations-Coefficienten keinen merklichen Einfluss ausüben dürfte. Das Fläschchen, in dem sich das verflüssigte Schwefeldioxyd befand, wurde mittels eines kurzen dickwandigen Schlauches mit dem unteren Hahne des Apparates verbunden und dann das Gas durchströmen gelassen.

Tabelle 4.

| $g$ | $G$ | Proc. | $\Delta v$ | $\Sigma \Delta v$ | $\delta = \frac{\Sigma \Delta v}{G}$ | $d = \frac{\Delta v}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 33610 | 33610 | 5 | 34,8692 | 34,8692 | 0,001037 | 0,001037 |
| 33710 | 67320 | 10 | 93,7781 | 74,6473 | 0,001108 | 0,001180 |
| 33600 | 100920 | 15 | 42,6611 | 117,3085 | 0,001162 | 0,001269 |
| 33370 | 134290 | 20 | 43,0118 | 160,3203 | 0,001193 | 0,001288 |
| 34130 | 168420 | 25 | 45,1157 | 205,4360 | 0,001219 | 0,001321 |
| 33730 | 202150 | 30 | 43,4404 | 248,8764 | 0,001231 | 0,001288 |
| 33500 | 235650 | 35 | 43,9469 | 292,8233 | 0,001242 | 0,001311 |
| 32820 | 268470 | 40 | 43,6352 | 336,4585 | 0,001253 | 0,001329 |
| 33125 | 301595 | 45 | 44,2586 | 380,7171 | 0,001262 | 0,001336 |
| 33370 | 334965 | 50 | 44,6482 | 425,3653 | 0,001269 | 0,001338 |
| 32875 | 367840 | 55 | 44,3754 | 469,7407 | 0,001277 | 0,001349 |
| 32965 | 400805 | 60 | 44,7260 | 514,4667 | 0,001283 | 0,001356 |
| 33925 | 434730 | 65 | 46,1676 | 560,6343 | 0,001289 | 0,001360 |
| 33645 | 468375 | 70 | 45,9728 | 606,6071 | 0,001295 | 0,001366 |
| 34055 | 502430 | 75 | 46,8689 | 653,4760 | 0,001300 | 0,001376 |

**Ammoniak, durch Wasser absorbirt. (Apparat IV.)**

Das Gas wurde durch gelindes Erhitzen einer dickflüssigen Mischung von zwei Teilen Chlorammonium und einem Teil Calciumhydroxyd dargestellt. Getrocknet wurde es mittels Calciumoxyds, das sich in einer etwa 1 m langen Röhre befand. Zur besseren Reinigung wurde es in der schon vorher beschriebenen Weise mittels fester Kohlensäure verflüssigt. Die atmosphärische Verunreinigung dürfte etwa $^1/_{800}$ Proc. betragen haben. Ehe ich das Gas durch den Apparat strömen liess, füllte ich vorher noch $F$ und einen am oberen Hahne befestigten kurzen Gummischlauch ganz mit Quecksilber an. Dasselbe liess ich dann, nachdem ich diesen Gummischlauch mit dem Fläschchen, das das flüssige Ammoniak enthielt, fest

verbunden hatte, von dem durch geringes Oeffnen des Hahnes am Fläschchen sich entwickelnden Ammoniakgase verdrängen. Ich war so sicher, dass alle Luft aus $F$ verdrängt war.

Tabelle 5.

| $g$ | $G$ | Proc. | $\Delta v$ | $\Sigma \Delta v$ | $\delta = \frac{\Sigma \Delta v}{G}$ | $d = \frac{\Delta v}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 95050 | 95050 | 3 | 96,8545 | 96,8545 | 0,0010190 | 0,0010190 |
| 95015 | 190065 | 6 | 96,2701 | 193,1246 | 0,0010160 | 0,0010132 |
| 95075 | 285140 | 9 | 95,4520 | 288,5766 | 0,0010120 | 0,0010039 |
| 94370 | 379510 | 12 | 94,2053 | 382,7819 | 0,0010086 | 0,0009982 |
| 93415 | 472925 | 15 | 92,9975 | 475,7794 | 0,0010060 | 0,0009955 |
| 92875 | 565800 | 18 | 92,0235 | 567,8029 | 0,0010035 | 0,0009908 |
| 95715 | 661515 | 21 | 94,6728 | 662,4757 | 0,0010014 | 0,0009891 |
| 95425 | 756940 | 24 | 93,7767 | 756,2524 | 0,0009990 | 0,0009827 |
| 94535 | 851475 | 27 | 92,4910 | 848,7434 | 0,0009967 | 0,0009783 |
| 93950 | 945425 | 30 | 91,5949 | 940,3383 | 0,0009946 | 0,0009749 |
| 94350 | 1039775 | 33 | 91,8677 | 1032,2060 | 0,0009927 | 0,0009736 |
| 95545 | 1135320 | 36 | 92,8027 | 1125,0087 | 0,0009909 | 0,0009712 |
| 95445 | 1230765 | 39 | 92,6858 | 1217,6945 | 0,0009893 | 0,0009710 |
| 93665 | 1324430 | 42 | 90,8547 | 1308,5492 | 0,0009880 | 0,0009699 |
| 94940 | 1419370 | 45 | 91,9454 | 1400,4946 | 0,0009867 | 0,0009684 |
| 94770 | 1514140 | 48 | 91,6339 | 1492,1285 | 0,0009854 | 0,0009669 |
| 95205 | 1609345 | 51 | 91,9066 | 1584,0341 | 0,0009842 | 0,0009653 |
| 94875 | 1704220 | 54 | 91,4780 | 1675,5121 | 0,0009831 | 0,0009641 |

Um nun noch zu untersuchen, welche Dichte die vom Wasser absorbirten Gase nach der Absorption besitzen, habe ich in der folgenden Tabelle ihre specifischen Gewichte aus den in den vorhergehenden Tabellen gefundenen Werten für die Absorptions-Dilatations-Coefficienten $\delta$ berechnet. Die erste Columne der Tabelle enthält den ungefähren Sättigungsgrad des Wassers mit dem betreffenden Gase in Procenten ausgedrückt und zwar von je 10 zu 10 Proc. In jeder folgenden Columne stehen die betreffenden Werte der specifischen Gewichte für ein bestimmtes Gas. Die letzte Reihe enthält dann noch die aus den „Phys.-Chem. Tabellen von Landolt und Börnstein“ entnommenen Werte für die specifischen Gewichte der verflüssigten Gase.

Tabelle 6.

| Proc. | $SO_2$ | $CO_2$ | O | $NH_3$ | H |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 2,5825 | 1,2904 | 1,2604 | 0,7526 | 0,0782 |
| 20 | 2,3985 | 1,3007 | 1,2582 | 0,7606 | — |
| 30 | 2,3245 | 1,3024 | — | 0,7658 | 0,0786 |
| 40 | 2,2836 | — | 1,2831 | 0,7699 | — |
| 50 | 2,2548 | 1,3050 | 1,2671 | 0,7739 | 0,0776 |
| 60 | 2,2302 | 1,3041 | — | — | 0,0782 |
| 70 | 2,2096 | 1,3050 | 1,2705 | — | — |
| 80 | — | 1,3067 | 1,2615 | — | 0,0783 |
| 90 | — | 1,3033 | — | — | 0,0784 |
| 95 | — | 1,2990 | 1,2626 | — | — |
| flüssig 0° | 1,4336 | 0,9471 | bei −129,5° 0,7555 | 0,6364 | bei 275 Atm. 0,025 |

Sehen wir nun zu, wie sich die Resultate meiner Versuche zu dem für die Volumenänderungen angegebenen Gesetze verhalten.

Wir finden, dass die Werte der Absorptions-Dilatations-Coefficienten $\delta$ und $d$ von Wasserstoff und Sauerstoff nur wenig hin und her schwanken. Bei Kohlendioxyd nehmen die $\delta$ und $d$ anfangs ab, bleiben dann constant, um dann schliesslich wieder bei ungefähr 90 Proc. anzusteigen. Bei Schwefeldioxyd wachsen die $\delta$-Werte ganz stetig, während die $d$ bis 25 Proc. eine Zunahme, dann eine Abnahme erleiden, bei 40 Proc. wieder ihren Wert bei 25 Proc. erreichen und dann stetig steigen. In der Tab. 5 für Ammoniak fallen sowohl die $\delta$ wie die $d$ ganz stetig. Diese Aenderungen und ihr gegenseitiges Verhalten zeigt ganz deutlich die graphische Darstellung der $\delta$-Werte, wenn man als Abscissen die Sättigungsgrade des Wassers mit dem betreffenden Gase in Procenten ausgedrückt nimmt und als Ordinaten die Werte der $\delta$ (vgl. Fig. 3).

Wir finden also, dass für wenig absorbirbare Gase das Gesetz von der Proportionalität der Volumenzunahme gegenüber der absorbirten Gasmenge volle Gültigkeit besitzt; dies Gesetz gilt jedoch nicht mehr für stärker absorbirbare Gase.

Betrachten wir nun die Werte für die specifischen Gewichte der im Wasser gelösten Gase und vergleichen sie mit denjenigen der verflüssigten Gase, so finden wir die auffallende Thatsache, dass die im Wasser gelösten Gase ein grösseres specifisches Gewicht besitzen als die verflüssigten Gase selbst.

Und es handelt sich hier nicht um kleine Unterschiede, sondern dieselben sind fast bei allen ganz beträchtlich. Es müssen daher ungeheure Kräfte sein, mit denen sich die einzelnen Molecüle anziehen. Berechnet man dieselben nach den Be-

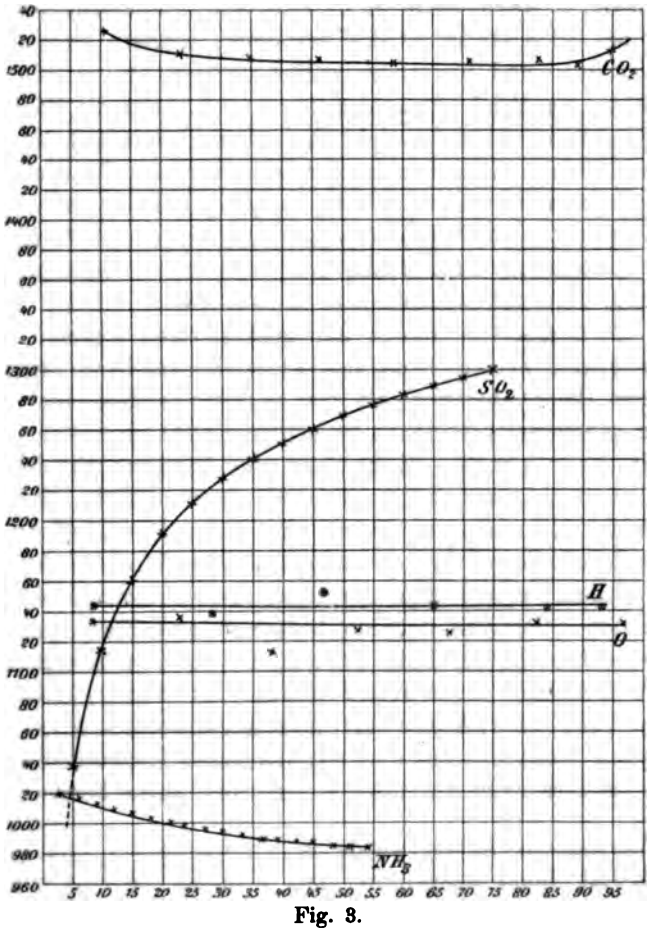



Fig. 3.

stimmungen von Natterer, so findet man, dass diese Kräfte 2500—3000 Atm. betragen.

Was eine theoretische Erörterung der Volumenänderungen von Flüssigkeiten durch Absorption von Gasen betrifft, so ist eine solche mit grossen Schwierigkeiten verbunden, und bis jetzt ist es noch nicht gelungen, ein allgemein gültiges Gesetz

hierfür aufzustellen. Betrachtet man die Absorptions-Dilatations-Coefficienten verschiedener Gase bei der Absorption in verschiedenen Flüssigkeiten, so findet man, dass diese Grösse sowohl abhängt von der Natur des Gases als auch der der Flüssigkeit. Auch sieht man, dass die Volumenänderungen nicht bei allen Gasen analog verlaufen, sondern einmal sind sie constant, und ein anderes Mal nehmen sie zu oder ab. Man hätte eigentlich erwarten müssen, dass, wenn die Volumenänderungen auf einer rein physikalischen Eigenschaft der Gase beruhen, diese Aenderungen bei zunehmender Concentration sich vergrössern würden. Den Vorgang bei der Absorption kann man sich nämlich so denken, dass ein jedes Flüssigkeitsmolecül sich mit einer Hülle von verdichteten Gasmolecülen umgiebt, die mit zunehmender Concentration immer dicker wird. Nun müssten infolge der gegenseitigen Anziehung die Gasmolecüle, welche direct das Flüssigkeitsmolecül umgeben, grössere Dichte besitzen als die nächstfolgenden, und diese wieder grössere als die ihnen benachbarten etc., sodass schliesslich in einer gewissen Entfernung die Anziehungskraft nicht mehr ausreicht, um die Gasmolecüle zu verdichten, das Gas also nicht mehr absorbirt wird. In dieser Weise würde sich also Schwefeldioxyd bei der Absorption in Wasser verhalten, bei welchem eine stetige Zunahme der Volumenänderungen stattfindet. Bei den anderen bisher untersuchten Gasen ist dies jedoch nicht der Fall, wo man für Ammoniak sogar eine stetige Abnahme der $\delta$-Werte findet. Es müssen also noch Kräfte ganz verwickelter Art hier mitwirken, welche wahrscheinlich nicht nur auf den physikalischen Eigenschaften der Gase, sondern auch auf ihrer chemischen Natur beruhen.

Vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Bonn ausgeführt; mit Freuden benutze ich die Gelegenheit, auch an dieser Stelle dem Leiter des Institutes, Herrn Prof. Dr. H. Kayser, sowie Herrn Privatdocent Dr. A. Hagenbach meinen verbindlichsten Dank auszusprechen für die gütige Hülfe, die sie mir immer während meiner Arbeit gewährt haben.

Bonn, Physikal. Institut, August 1901.

(Eingegangen 5. August 1901.)

## 5. *Zur Theorie der Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase;* *von Max Reinganum.*

Wir schreiben die Virialgleichung von Clausius[1]) in der Form:

$$3pv = nmu^2 + \sum r f(r) + \sum r F(r). \tag{1}$$

Es bedeuten $p$ und $v$ Druck und Volumen des Gases; $n$, $m$ und $u^2$ Zahl, Masse und mittleres Quadrat der Geschwindigkeit der kugelförmig gedachten Molecüle; $r$ den Abstand zweier beliebiger Molecüle, $f(r)$ und $F(r)$ die Werte der zwischen ihnen wirkenden Abstossungs- und Anziehungskräfte.

Wir haben also links das Virial des äusseren Druckes, rechts die fortschreitende Energie der Molecüle, das Virial der Abstossungskräfte $W_e$ und dasjenige der Anziehungskräfte $W_i$, indem wir das gesamte Virial der Kräfte uns gleich in zwei Teile zerlegt denken.

Ueber die *Abstossungskräfte* machen wir die Hypothese, dass die Dauer des Stosses für die Zwecke der Zustandsgleichung (und auch der anderen gastheoretischen Probleme) vernachlässigt werden kann, wir behandeln sie also wie elastische Momentankräfte.[2])

Die *Anziehungskräfte* sollen sehr rasch, jedoch continuirlich mit wachsender Entfernung unmerklich werden, und keine in Betracht kommende Function der molecularen Geschwindigkeit sein.

In diesen Grundhypothesen bleiben wir ganz auf dem Boden der van der Waals'schen Theorie.

1) R. Clausius, Pogg. Ann. **141.** p. 124. 1870; L. Boltzmann, Gastheorie **2.** p. 139. 1898.

2) Ob diese Annahme richtig ist, lässt sich natürlich a priori nicht sagen. Doch ist sie jedenfalls die einfachere, und es lässt sich zeigen, dass die Eigentümlichkeiten, welche man nur durch ein continuirliches Abstossungsgesetz erklären zu können glaubte, sich allein durch die ohnehin anzunehmenden Anziehungen vor den Stössen erklären lassen.

*Wir wollen uns aber insofern von der ursprünglichen Form derselben entfernen, als wir nicht die Hypothese einführen wollen, dass sich im Innern des Gases die Kräfte der Molecüle völlig gegenseitig aufheben.* Es erscheint vielmehr als Consequenz unserer Grundanschauung, dass wenigstens in genügend verdünnten Gasen die Anziehungskräfte bei jedem Vorübergang oder Stoss zweier Molecüle zur Wirkung kommen.[1]) *Es soll also die gegenseitige planetarische Beeinflussung der Molecüle in der Zustandsgleichung in Rücksicht gezogen werden.*

Wir betrachten der Reihe nach die drei Glieder der rechten Seite von (1).

Was das *erste Glied* anbetrifft, welches die doppelte fortschreitende Energie der Molecüle enthält, so ist zu bemerken, dass diese Grösse ganz unabhängig von den inneren Kräften sein muss und allein proportional der absoluten Temperatur ist. Es ist dies eine Consequenz der allgemeinen Untersuchungen von Boltzmann.

Das erste Glied hat also dieselbe Grösse, wie bei idealen Gasen.

Für die Masseneinheit des Gases ist

$$n \cdot m = 1 \tag{2}$$

und

$$\frac{n \cdot m \cdot u^2}{3} = \frac{u^2}{3} = RT, \tag{3}$$

indem wir in der üblichen Weise die Gasconstante durch $R$ und die absolute Temperatur durch $T$ bezeichnen.

Durch (3) ist also das Glied der lebendigen Kraft in der Virialgleichung bestimmt.

Zur Berechnung der beiden folgenden Glieder von (1) denken wir uns um das Centrum eines Molecüles eine Kugelschale mit den Radien $r$ und $r + dr$ gelegt. Wir führen eine Constante $\sigma$ ein mit der Bedeutung, dass für einen Abstand der Centren zweier Molecüle $r > \sigma$ die beiden Molecüle Anziehungskräfte aufeinander ausüben, für $r < \sigma$ jedoch Abstossungskräfte. Letz-

1) Diese Grundvorstellung ist schon von verschiedenen Physikern angedeutet worden, ohne dass dieselbe eine consequente Durchführung erfahren hätte. Vgl. van der Waals, Continuität 2. Aufl. p. 117—118; H. A. Lorentz, Wied. Ann. 12. p. 135. 1881; W. Sutherland, Phil. Mag. 36. p. 529. 1893.

tere sollen für ein $r = \sigma - \delta$, worin $\delta$ eine äusserst kleine Grösse ist, schon unendlich gross werden. $\sigma$ hat also die Bedeutung des Moleculardurchmessers.

Wegen der raschen Abnahme der Anziehungskräfte mit der Entfernung kommen bei der Betrachtung der Wechselwirkung der Molecüle nur Werte von $r$ in Betracht, welche noch von molecularer Grössenordnung sind.

In dem Falle grösserer Verdünnung des Gases, auf welchen wir uns hier beschränken, ist daher die Zahl der in einem Augenblick in Wechselwirkung befindlichen Molecüle klein gegen die Gesamtzahl der Molecüle.

Alsdann ist nach einem höchst bedeutungsvollen Theorem von Boltzmann[1]), welches die räumliche Verteilung materieller, mit Kräften begabter und im Wärmegleichgewicht befindlichen Punkte bestimmt, die Zahl der Molecülpaare, deren Molecüle einen gegenseitigen Abstand zwischen $r$ und $r + dr$ haben:

$$dn = \frac{2\pi n^2 \cdot r^2}{v} \cdot e^{-2h\chi(r)} \cdot dr. \tag{4}$$

Hierin bedeutet $\chi(r)$ die Arbeit, die geleistet wird, wenn sich zwei Molecüle aus einer Entfernung, in der sie keine Kräfte aufeinander ausüben, bis zur Entfernung $r$ einander nähern.

$h$ ist definirt durch die Beziehung:

$$h = \frac{3}{2mu^2}. \tag{5}$$

Wegen (3) folgt:

$$2h = \frac{n}{RT}. \tag{6}$$

Um die in (1) geforderten Summirungen auszuführen, haben wir also $r \cdot f(r)$ bez. $rF(r)$ mit dem durch (4) gegebenen Ausdruck für die Zahl der Molecüle $dn$ zu multipliciren, und die Integration über alle vorkommenden Werte von $r$ auszuführen.

Zunächst schreiben wir (1) mit Rücksicht auf (3) in der Form:

$$p \cdot v = RT + \tfrac{1}{3}\sum r f(r) + \tfrac{1}{3}\sum r F(r). \tag{7}$$

---

1) Ueber das Theorem von L. Boltzmann vgl. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 105. p. 695. 1896; ferner Boltzmann, Gastheorie II. p. 136. p. 150 u. a. O.

Wir betrachten zunächst das Glied der ***Abstossungskräfte*** in dieser Gleichung. Multiplication von (4) mit $\frac{1}{3} r f(r)$ und Integration zwischen den Grenzen $\sigma$ und $\sigma - \delta$ ergiebt:

$$(8) \qquad \tfrac{1}{3}\sum r f(r) = \frac{2 \cdot \pi \cdot n^2}{3 \cdot v} \int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} r^3 \cdot f(r) \cdot e^{-2h\chi(r)} \cdot dr .$$

$\chi(r)$ zerfällt in zwei Teile. Es ist:

$$\chi(r) = \int_{\sigma}^{\infty} F(r) \cdot dr + \int_{r}^{\sigma} f(r) \cdot dr .$$

Der erste Teil stellt die Arbeit dar, die aufzuwenden ist, um zwei Molecüle aus unendlicher Entfernung bis zur Berührung zu nähern. Dieses Glied bleibt für die Integration constant und kann vor das Integralzeichen gesetzt werden. Dasselbe ist negativ, da es die Wirkung der Anziehungskräfte darstellt. Wir schreiben übersichtlicher:

$$(9) \qquad e^{-2h\int_{\sigma}^{\infty} F(r) \cdot dr} = e^{\frac{c}{T}},$$

worin $c$ eine positive Constante bedeutet. Wegen (6) gilt:

$$(10) \qquad c = \frac{n \cdot \int_{\sigma}^{\infty} F(r) \cdot dr}{R} \quad \text{---} .$$

$c$ hat also eine leicht ersichtliche physikalische Bedeutung.

Ferner können wir in (8), da die Integrationsgrenzen $\sigma$ und $\sigma - \varepsilon$ unendlich benachbart sind, $r$ da, wo es unter keinem Functionszeichen steht, mit dem Werte $\sigma$ vor das Integralzeichen schreiben. Gleichung (8) wird daher:

$$(11) \qquad \tfrac{1}{3}\sum r f(r) = \frac{2\pi\sigma^3 \cdot n^2 \cdot e^{\frac{c}{T}}}{3 \cdot v} \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} f(r) \cdot e^{-2h\int_{r}^{\sigma} f(r) \cdot dr} \cdot dr .$$

Das Integral in diesem Ausdruck ist nunmehr ganz dasselbe, zu welchem Boltzmann bei Nichtberücksichtigung der Anziehungskräfte gelangt ist.[1])

1) L. Boltzmann, Gastheorie II. p. 151.

Wir setzen:

$$\int_r^\sigma f(r) \cdot dr = y$$

und können das Integral schreiben:

$$\int_0^\infty e^{-2hy} \cdot dy,$$

da für $r = \sigma$, $y = 0$ und für $r = \sigma - \delta$ $y = \infty$ ist.

Letzteres Integral ist gleich:

$$\int_0^\infty e^{-2hy} \cdot dy = \frac{1}{2h} = \frac{mu^2}{3} = mRT.$$

Es wird daher (10):

$$(12) \quad \tfrac{1}{3}\sum r f(r) = \frac{2\pi\sigma^3 n^2 \cdot m \cdot R \cdot T \cdot e^{\frac{c}{T}}}{3 \cdot v} = \frac{R \cdot b \cdot e^{\frac{c}{T}} \cdot T}{v},$$

indem wir in der üblichen Weise setzen:

$$(13) \quad \tfrac{2}{3}\pi \cdot n \cdot \sigma^3 = b,$$

und beachten, dass $nm = 1$ ist.

Hätten wir die Anziehungen vor den Stössen vernachlässigt, so erhielten wir $c = 0$ und, wie auf anderem Wege schon H. A. Lorentz und auf dem hier betretenen Wege Boltzmann gezeigt hat:

$$\tfrac{1}{3}\sum r f(r) = \frac{R \cdot b \cdot T}{v}.$$

*Durch die Anziehungen vor den Stössen wird also das Virial der Stosskräfte im Verhältnis* $e^{\frac{c}{T}}$ *vergrössert.*

Einsetzen in (7) ergiebt:

$$(14) \quad pv = RT\left(1 + \frac{b e^{\frac{c}{T}}}{v}\right) + \tfrac{1}{3}\sum r F(r).$$

Da wir uns nur auf grosse Volumina beschränken, so können wir die bekannte, von H. A. Lorentz herrührende

Umformung vornehmen und erhalten die Form der Gleichung von van der Waals:

$$\left(p - \frac{\sum r F(r)}{3 . v}\right)\left(v - b e^{\frac{c}{T}}\right) = R T. \tag{15}$$

*Also auch in der van der Waals'schen Gleichung erscheint die Grösse b mit dem Factor $e^{\frac{c}{T}}$ versehen.*

Nennen wir den „inneren Druck" $P_i$, so gilt:

$$P_i = - \frac{\sum r F(r)}{3 . v}; \tag{16}$$

$$(p + P_i)\left(v - b e^{\frac{c}{T}}\right) = R T. \tag{17}$$

**Virial der Anziehungskräfte.**

Wir bilden in derselben Weise wie das Virial der Stosskräfte dasjenige der Anziehungskräfte, doch haben wir hier von $r = \infty$ bis $r = \sigma$ zu integriren.

Wir erhalten in derselben Weise, wie (8) gebildet wurde:

$$\tfrac{1}{3}\sum r F(r) = \frac{2 \pi n^2}{3 . v} \int_{\sigma}^{\infty} r^3 . F(r) . e^{-2 h \chi(r)} . dr. \tag{18}$$

Hierin ist

$$\chi(r) = \int_{r}^{\infty} F(r) . dr.$$

Da die Integrationsgrenzen nicht unendlich benachbart sind, so muss die Function $F(r)$ im allgemeinen bekannt sein, wenn man die Integration in (18) ausführen will.

Ueber die Function $F(r)$ lässt sich von vornherein so viel sagen, dass wenn man sie durch $-k/r^q$ darstellen kann, worin $q$ eine beliebige Zahl bedeutet, $q > 4$ sein muss.

Andernfalls erhält das Integral (18) einen unendlichen Wert. Dieses würde besagen, dass man bei der Summenbildung von $r F(r)$ nicht von $r = \infty$ ab integriren darf, sondern die Dimensionen der Gas- oder Flüssigkeitsmenge einzuführen hat. Damit hingen aber die molecularen Kräfte nicht nur von der näheren Umgebung eines Teilchens, sondern von der gesamten Gasmenge ab, was der Erfahrung widersprechen würde.

Wegen der Auflösung des Integrales für den Grenzfall $q = 4$ sei auf eine kürzlich erschienene Arbeit von mir verwiesen.[1])

An dieser Stelle soll die Lösung für ein beliebiges $q > 4$ gegeben werden, und zwar in ganz analoger Weise, wie in der soeben citirten Arbeit, nach einer rein kinetischen und einer mehr thermodynamischen Methode, welche beide zu demselben Ziele führen.

Wir setzen

$$F(r) = \frac{-k}{r^q}, \tag{19}$$

worin $k$ und $q$ beliebige positive Zahlen bedeuten.

Durch Substitution in (18) erhalten wir:

$$\tfrac{1}{3}\sum r F(r) = \frac{-2.\pi.n^2.k}{3.v}\int_\sigma^\infty r^3 - \frac{2hk.r^{1-q}}{q-1}.dr, \tag{20}$$

da

$$\chi(r) = \int_r^\infty F(r)\,dr = \frac{+k.r^{1-q}}{1-q}. \tag{20a}$$

Die Function unter dem Integralzeichen in (20) lautet in Reihenentwickelung:

$$r^{3-q} + \frac{2hk.r^{4-2q}}{q-1} + \frac{4h^2.k^2.r^{5-3q}}{2!(q-1)^2} + \frac{8h^3.k^3.r^{6-4q}}{3!(q-1)^3} + \cdots$$

Das bestimmte Integral ergiebt:

$$-\left[\frac{\sigma^{4-q}}{4-q} + \frac{2hk.\sigma^{5-2q}}{(q-1)(5-2q)} + \frac{4h^2k^2.\sigma^{6-3q}}{2!(q-1)^2(6-3q)} + \cdots\right].$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\left\{\begin{aligned}\tfrac{1}{3}\sum r F(r) = \frac{2n\pi^2k.\sigma^{4-q}}{3.v(4-q)}\Big[1 + \frac{2hk(4-q).\sigma^{1-q}}{(q-1)(5-2q)} \\ + \frac{4h^2k^2(4-q)\sigma^{2-2q}}{2!(q-1)^2(6-3q)} + \cdots\Big].\end{aligned}\right. \tag{21}$$

---

1) M. Reinganum, Archives Néerlandaises, Jubelband für H. A. Lorentz p. 574. 1900.

Diese Gleichung verwandelt sich bei Berücksichtigung der Relationen (2), (3) und (5), sowie der aus (10) und (20a) folgenden Beziehung:

$$-2h\chi(r) = \frac{2h \cdot k\sigma^{1-q}}{q-1} = \frac{c}{T} \tag{22}$$

in

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{3}\sum r F(r) = \frac{-Rbc(q-1)}{v(q-4)} \Big[ 1 + \frac{(2q-4)}{(2q-5)}\frac{c}{T} \\ + \frac{(q-4)c^2}{2!(3q-6)\cdot T^2} + \frac{(q-4)\cdot c^3}{3!(4q-7)\cdot T^3} + \dots \Big] . \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Diese Gleichung für das Virial der Anziehungskräfte convergirt für hohe Temperaturen zu der folgenden:

$$\tfrac{1}{3}\sum r F(r) = \frac{-Rbc(q-1)}{v(q-4)} = \frac{-a_\infty}{v}, \tag{24}$$

indem wir mit $a_\infty$ den Grenzwert des nicht von $v$ abhängigen Bestandteils der Function für sehr hohe Temperatur bezeichnen.

Für eine beliebige Temperatur gilt also[1]):

$$\left\{ \begin{aligned} a(T) = \frac{Rbc(q-1)}{q-4} \Big[ 1 + \frac{q-4}{2q-5}\frac{c}{T} + \frac{(q-4)c^2}{2!(3q-6)T^2} \\ + \frac{q-4}{3!(4q-7)}\frac{c^3}{T^3} + \dots \Big] . \end{aligned} \right. \tag{25}$$

Folglich:

$$\tfrac{1}{3}\sum r F(r) = \frac{-a(T)}{v} . \tag{25a}$$

In Gleichung (14) eingesetzt, ergiebt dies:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{RTbe^{\frac{c}{T}} - a(T)}{v^2} \tag{26}$$

mit der Bedeutung (25) für $a(T)$.

Den Zähler auf der rechten Seite kann man in eine einzige nur von der Temperatur abhängige Grösse $A$ zusammenfassen, *sodass für grosse Volumina die Gleichung der Isotherme nur eine Constante enthält.*[2]) Wir können dann schreiben:

$$pv = RT + \frac{A(T)}{v} . \tag{27}$$

1) Die Grösse $a(T)$ tritt also an die Stelle der van der Waals'schen Grösse $a$.

2) Diese Bemerkung hat kürzlich in der weiter unten citirten Arbeit auch Hr. van Laar gemacht, allerdings unter bestimmten specielleren Voraussetzungen über die Form von $a(T)$. Auch Hr. M. Thiesen (Wied.

Numerische Berechnungen von $A$, die ich für eine Reihe von Temperaturen an Isopentan angestellt habe, teile ich in einer folgenden Arbeit mit.

Durch Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung können wir wieder die Gleichung (26) in die Form der van der Waals'schen Gleichung überführen und erhalten:

$$\left(p + \frac{a(T)}{v^2}\right)\left(v - b\,e^{\frac{c}{T}}\right) = RT \tag{28}$$

mit derselben Bedeutung von $a(T)$, wie sie durch (25) gegeben ist.

Durch eine ähnliche einfache Umformung wird (27) zu:

$$\underline{p(v + B) = RT,} \tag{29}$$

worin

$$B = -\frac{A(T)}{RT}. \tag{30}$$

Wir leiten nunmehr die Function $a(T)$ aus einer ganz anderen Ueberlegung ab, wobei wir von einer thermodynamischen Beziehung Gebrauch machen.

Da $-\chi(r)$ die Arbeit darstellt, die aufzuwenden ist, um zwei Molecüle bis auf praktisch unendliche Entfernung voneinander zu bringen, so ist $-\sum\chi(r)$, über alle Molecülpaare erstreckt, die Arbeit, die zur unendlich weiten Entfernung aller Molecüle voneinander aufzuwenden ist. *Diese Arbeit ist aber die innere Ausdehnungswärme*[1]) *bei isothermer Ausdehnung auf unendliches Volumen.* Wir bezeichnen sie mit $U_\infty$.

$$U_\infty = -\sum\chi(r).$$

Analog wie für $\frac{1}{3}\sum r\,F(r)$ die Gleichung (18) gebildet wurde, ergiebt sich für $U_\infty$ durch Multiplication von $-\chi(r)$ mit $dn$:

$$-\sum\chi(r) = U_\infty = -\frac{2\pi n^2}{v}\int_\sigma^\infty r^2.\chi(r).e^{-2h\chi(r)}.dr. \tag{31}$$

---

Ann. 24. p. 467. 1885) gelangt durch eine nicht weiter begründete Reihenentwickelung zu derselben Form für verdünnte Gase und wendet sie auf die Beobachtungen von Regnault an. Ebenso sei an die Formen der Zustandsgleichungen von Rankine und Thomson erinnert.

1) Wir verstehen unter innerer Ausdehnungswärme den Teil der absorbirten Wärme, der nicht für äussere Arbeit verwandt wird.

Die Integration von $\sigma$ bis $\sigma - \delta$ ergiebt einen unendlich kleinen Beitrag zu $U_\infty$, den wir vernachlässigen können.

Der Vergleich von (18) und (31) ergiebt das Resultat, ***dass das Verhältnis von Virial zu Potential bez. innerer Ausdehnungswärme bei geringen Dichten unabhängig vom Volumen ist.*** Wir schreiben:

$$\frac{\frac{1}{3}\sum r F(r)}{\sum \chi(r)} = g = \frac{-\frac{1}{3}\sum r F(r)}{U}. \tag{32}$$

Die Grösse von $g$ hängt offenbar vom Wirkungsgesetz der Kräfte ab. Sie ist aber auch im allgemeinen als Function der Temperatur zu betrachten, da (18) wie (31) die der Temperatur umgekehrt proportionale Grösse $h$ enthalten.

Das Verhältnis (32) kann offenbar dann keine Function der Temperatur sein, wenn die Gleichung (32) nicht nur für die Summen, sondern auch für je zwei beliebige Molecüle erfüllt ist, d. h. wenn $g$ unabhängig von $r$ ist. Wir stellen diejenigen Kraftgesetze fest, für welche diese Bedingung gilt, und schreiben daher:

$$\frac{\frac{1}{3} r F(r)}{\chi(r)} = g. \tag{33}$$

Ferner ist

$$-\frac{\partial \chi(r)}{\partial r} = F(r).$$

Folglich:

$$\frac{\partial \chi(r)}{\partial r} = \frac{-3g \cdot \chi(r)}{r},$$

$$\log \chi(r) = -3g \cdot \log r + \log C,$$

$$\chi(r) = C \cdot r^{-3g}.$$

Wir setzen $3 \cdot C \cdot g = k$ und erhalten:

$$-\frac{\partial \chi(r)}{\partial r} = F(r) = -k \cdot r^{-3g-1}. \tag{34}$$

Da $g$ eine beliebige positive Zahl ist, so sind also die betrachteten Kraftgesetze diejenigen, welche umgekehrt einer beliebigen Potenz der Entfernung wirken. ***Es sind dies also dieselben Anziehungsgesetze wie in der ersten Betrachtung.*** Es ist also zu setzen:

$$3g + 1 = q. \tag{35}$$

Wegen (32), (25a) und (35) schreiben wir:

$$\frac{\frac{1}{3}\sum r f(r)}{\chi(r)} = \frac{-\frac{1}{3}\sum r f(r)}{U} = \frac{a(T)}{U.v} = \frac{q-1}{3}$$

$$U = \frac{3.a(T)}{(q-1).v}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{-3a(T)}{(q-1).v^2}. \tag{37}$$

Für letztere Grösse lässt sich auch aus der Thermodynamik eine Beziehung ableiten, die mit (37) combinirt eine Differentialgleichung für $a(T)$ ergiebt, aus der wir die Form dieser Function bestimmen können.

Es bedeute $dQ$ die bei einer umkehrbaren isothermen Ausdehnung um $dv$ absorbirte Wärme; dann gilt nach dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie[1]):

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = T\frac{\partial p}{\partial T}.$$

Ferner ist:

$$\partial Q = -\partial U + p\,\partial v,$$

worin $\partial U$ die Zunahme der inneren Ausdehnungswärme des Systems bedeutet.

Wir erhalten:

$$-\frac{\partial U}{\partial v} = T\frac{\partial p}{\partial T} - p. \tag{38}$$

Wir schreiben die Zustandsgleichung (14) mit Rücksicht auf (25a) in der Form:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{RTbe^{\frac{c}{T}}}{v^2} - \frac{a(T)}{v^2},$$

lassen jedoch die Function $a(T)$ beliebig. Wir bilden durch Differenziren nach $T$, Multiplication mit $T$ und Subtraction von $p$, die Function (38). Man erhält:

$$T\frac{\partial p}{\partial T} - p = -\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{a}{v^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial a}{\partial T} - \frac{Rbce^{\frac{c}{T}}}{v^2}. \tag{39}$$

Dies setzen wir dem negativen Wert des Ausdruckes (37) gleich und erhalten bei gleichzeitiger Umformung:

$$\frac{\partial a}{\partial T} = \frac{a(q-4)}{T(q-1)} - \frac{R.b.c.e^{\frac{c}{T}}}{T}. \tag{40}$$

---

1) Vgl. z. B. W. Nernst, Theor. Chemie, 3. Aufl. p. 26.

Die Function $a$ ist also durch eine Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt.

Dieselbe lässt sich lösen mit Hülfe des integrirenden Factors:

$$e^{-\frac{q-4}{q-1}\ln T} = T^{-\frac{q-4}{q-1}} = T^{-l},$$

indem wir setzen:

$$\frac{q-4}{q-1} = l. \tag{41}$$

Man erhält:

$$d(a \,.\, T^{-l}) = \frac{-Rbce^{\frac{c}{T}}}{T^{1+l}}\, dT.$$

$$a_{(T)} = -Rbc \,.\, T^{l} \int \frac{e^{\frac{c}{T}}}{T^{1+l}}\, dT. \tag{42}$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen lautet in Reihenentwickelung:

$$\frac{1}{T^{1+l}} + \frac{c}{T^{2+l}} + \frac{c^2}{2!\,T^{3+l}} + \frac{c^3}{3!\,T^{4+l}} + \ldots$$

Die Integration ergiebt:

$$-\left[\frac{1}{l \,.\, T^{l}} + \frac{c}{(1+l)\,T^{1+l}} + \frac{c^2}{2!\,(2+l) \,.\, T^{2+l}} + \ldots\right].$$

Für $a$ ergiebt sich:

$$a_{(T)} = \frac{Rbc}{l}\left[1 + \frac{c \,.\, l}{(1+l)\,T} + \frac{c^2 \,.\, l}{2!\,(2+l)\,T^2} + \ldots\right] + K, \tag{43}$$

worin $K$ die Integrationsconstante bedeutet.

Um die Uebereinstimmung von (43) mit (25) nachzuweisen, führen wir den Wert (41) für $l$ ein. Alsdann ergiebt sich:

$$\begin{cases} a(T) = \dfrac{Rbc(q-1)}{(q-4)}\left[1 + \dfrac{q-4}{2q-5} \cdot \dfrac{c}{T}\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{c^2(q-4)}{2!\,T^2(3q-6)} + \ldots\right] + K. \end{cases} \tag{44}$$

*Dieser Wert für $a(T)$ stimmt mit dem oben (25) gefundenen bis auf eine willkürlich bleibende Integrationsconstante überein.*

Aus der kinetischen Ableitung können wir also entnehmen, dass die Constante $K$ in Wirklichkeit Null ist.

Als Grenzwert für hohe Temperaturen ergiebt sich daher wieder (wenn wir $K$ gleich Null setzen):

$$a_\infty = \frac{R\,b\,c\,(q-1)}{q-4}. \tag{45}$$

Die Uebereinstimmung der auf den beiden Wegen erhaltenen Resultate darf wohl als eine Stütze dafür angesehen werden, dass wir uns bei der Anwendung des Boltzmann'schen Theorems und der Virialgleichung auf einer sicheren Grundlage befinden.

Wir hätten umgekehrt von der ersten Betrachtung und der rein kinetischen Gleichung (31) für die Ausdehnungswärme ausgehen können, und wären dann zu der thermodynamischen Beziehung (38) gelangt. Damit ist aber eine wichtige Beziehung des zweiten Hauptsatzes für unvollkommene Gase kinetisch bewiesen.

Der Grund dieser Uebereinstimmung zwischen kinetischer Theorie und Thermodynamik ist wohl darin zu suchen, dass das Theorem von Boltzmann in nahem Zusammenhang mit der mechanischen Grundlage des zweiten Hauptsatzes steht.

Wir betrachten noch eine angenäherte Integration der von mir gegebenen Gleichung (18) für das Virial der Anziehungskräfte[1]), welche Hr. van Laar kürzlich gegeben hat[2]), welche wir nach der oben angewandten Methode durchführen wollen.

Wenn die Anziehungskräfte äusserst rasch mit der Entfernung abnehmen, und schon bei einer Entfernung der Centren unmerklich werden, welche $\sigma$ nicht viel übersteigt, so können wir in (18) mit Annäherung $r^3$ mit einem Mittelwert $s^3 > \sigma^3$ vor das Integralzeichen setzen und analog wie bei dem Virial der Stosskräfte verfahren. Gleichung (18) wird also:

$$\tfrac{1}{3}\sum r\,F(r) = \frac{2\cdot\pi\cdot n^2\cdot s^3}{3\cdot v}\int_\sigma^\infty F(r)\cdot e^{-2h\int_r^\infty F(r)\,dr}\,dr. \tag{46}$$

1) Vgl. auch p. 68 meiner weiter unten angeführten Dissertation.

2) J. J. van Laar, Archiv. Teyler (II) 7. 3. Teil. p. 31 des Sonderabdruckes. Haarlem 1901.

Wir setzen wieder:

$$\int_r^\infty F(r) \cdot dr = y$$

und erhalten:

$$\int_y^0 e^{-2hy} \cdot dy = \frac{1}{2h}\left[1 - e^{\frac{c}{T}}\right],$$

indem wir beachten, dass:

$$-2h\int_a^\infty F(r) \cdot dr = \frac{c}{T}.$$

Wir erhalten:

$$\tfrac{1}{3}\sum r F(r) = \frac{-2 \cdot \pi \cdot n^2 \cdot s^3\left[e^{\frac{c}{T}} - 1\right]}{3 \cdot v \cdot 2h}.$$

Setzt man:

(47) $$\tfrac{2}{3}\pi \cdot n s^3 = b',$$

so ergiebt sich:

(48) $$-\frac{v}{3}\sum r F(r) = a = RT \cdot b'\left(e^{\frac{c}{T}} - 1\right)$$

oder:

(49) $$a = Rb' \cdot c\left[1 + \frac{1}{2!}\frac{c}{T} + \frac{c^2}{3!\,T^2} + \ldots\right]$$

und

(50) $$a_\infty = R \cdot b' \cdot c.$$

Der van Laar'sche Ausdruck stimmt, wie man sich leicht überzeugen kann, in dem Falle mit dem unsrigen (24) und (25) bez. (44) und (45) überein, dass $q$ gegen 4 eine sehr grosse Zahl ist, d. h. bei Kraftgesetzen, bei welchen die Kraft um ein Vielfaches rascher als proportional der 4ten Potenz der Entfernung abnimmt.

Das Beobachtungsmaterial deutet hingegen darauf hin, dass das Anziehungsgesetz sich nicht viel von dem Gesetz der 4ten Potenz unterscheiden wird. Aus dem Verhältnis von Ausdehnungswärme und Virial scheinen als Grenzen etwa Kraftwirkung nach 4ter bis 5ter Potenz der Entfernung zu folgen.

Da wir jedoch die strenge Ableitung nur für eine bestimmte Gruppe von Wirkungsgesetzen gegeben haben, für die

nämlich das Verhältnis von Potential zu Virial unabhängig von der Entfernung $r$ ist, so kann der Temperaturcoefficient doch ein etwas anderer sein, als wie er aus unseren Gleichungen folgt, obwohl das Verhältnis von Potential zu Virial so ist, als hätten wir ein Kraftgesetz nahezu nach der $4^{\text{ten}}$. Potenz der Entfernung.

Es ist daher immerhin möglich, dass man den Verlauf von $a$ zweckmässig durch eine empirische Gleichung von der *Form* der van Laar'schen Gleichung darstellen kann, ohne dass man jedoch für die Constanten jene einfache Bedeutung erwarten kann.

Um die Fragen der Zustandsgleichung weiter aufzuklären, wäre die Theorie auch für grössere Dichten zu entwickeln. Einer vollständigen Theorie bei grösseren und beliebigen Dichten stehen aber zur Zeit noch ausserordentliche Schwierigkeiten entgegen.

Man kann jedoch in einer mehr empirischen Weise weiter vordringen. Wir können nämlich aus den beobachteten Isothermen durch die thermodynamische Beziehung für die innere Ausdehnungswärme:

$$U_\infty = \int_v^\infty \left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) dv = -\sum \chi(r).$$

die potentielle Energie für eine Reihe von Volumina und Temperaturen bestimmen. Hierdurch erhalten wir bedeutsame Aufschlüsse über die Abhängigkeit derselben von Volumen und Temperatur, und es lassen sich hieraus auf den Verlauf des Virials $\frac{1}{3}\sum r F(r)$ Schlüsse ziehen. Unter der Annahme, dass das Verhältnis von Virial zu Potential so ist, als wäre $q$ nahezu 4, habe ich auf diesem Wege aus der Ausdehnungswärme das Virial der Anziehungskräfte berechnet, und durch Einsetzen in die Virialgleichung das Virial der Abstossungskräfte bestimmt.[1]) Neuere Berechnungen der Grösse $U_\infty$ denke ich demnächst mitzuteilen.

Der erwähnte Weg würde bedeutend an Sicherheit gewinnen, wenn es gelingt, eine bestimmte Annahme über den

1) M. Reinganum, Theorie und Aufstellung einer Zustandsgleichung. Dissert., Göttingen 1899.

Wert des Verhältnisses von Virial zu Potential der Anziehungskräfte nicht nur hypothetisch, auf Grund allgemeiner Betrachtung des Beobachtungsmateriales, einzuführen, sondern aus einer bestimmten Theorie der Molecularwirkungen abzuleiten. Es bietet sich hier die Hypothese, die Molecularkräfte als elektrostatische Wirkungen der Ionenladungen aufzufassen; hierbei sind, wie es schon von Helmholtz geschehen ist, neutralen Molecülen gleichviel positive wie negative Ladungen zuzuschreiben. Quantitative Resultate dieser Theorie für den gegenseitigen Abstand dieser Ladungen auf den Molecülen, welche auf verschiedene Weisen zu erhalten sind[1]), erlaube ich mir demnächst mitzuteilen.

1) Vgl. auch M. Reinganum, Ueber die Theorie der Zustandsgleichung und der inneren Reibung der Gase, 72. Nat.-Vers. zu Aachen; Physikal. Zeitschr. **16**. p. 241. 1900.

(Eingegangen 22. August 1901.)

## 6. *Beitrag zur Prüfung einer Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase;* von *Max Reinganum.*

In der vorhergehenden Arbeit[1]) sind auf theoretischem Wege einige Grössen erhalten worden, deren absolute Werte sich unmittelbar aus dem vorliegenden experimentellen Material bestimmen lassen, ohne dass eine bestimmte Hypothese über das Wirkungsgesetz der Molecularkräfte nötig wird.

Für eine der daselbst abgeleiteten Beziehungen, die sich ohne weiteres anwenden lassen, sollen Berechnungen mitgeteilt werden, die ich an den von S. Young vorzüglich bestimmten Isothermen des Isopentans[2]) angestellt habe. Es soll damit gleichzeitig gezeigt werden, wie man für die Zustandsgleichung wichtige Grössen ohne willkürliche Festsetzungen aus den Beobachtungen ableiten kann.

Wir betrachten die Gleichung (27) p. 540 der vorhergehenden Arbeit:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{A(T)}{v^2}, \tag{1}$$

worin nach (26) l. c.:

$$A(T) = RTbe^{\frac{c}{T}} - a(T). \tag{2}$$

Die Buchstaben haben dieselbe Bedeutung wie früher.

Gleichung (1) und (2) gelten bei jedem beliebigen Wirkungsgesetz der Kräfte. Für den speciellen Fall, dass die Anziehung umgekehrt proportional der $q^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung erfolgt, gilt nach (25):

$$a(T) = \frac{Rbc(q-1)}{q-4}\left[1 + \frac{(q-4)}{(2q-5)}\frac{c}{T} + \frac{(q-4).c^2}{(3q-6)\,2!\,T^2} + \ldots\right]. \tag{3}$$

Indem wir die Gleichung (1) auf die Beobachtungen anwenden, können wir $A$ bei einer Temperatur für verschiedene Volumina bestimmen, und können hierdurch die Aussage von (2) prüfen, dass $A$ unabhängig vom Volumen ist. Ferner können wir $A$ für eine Reihe von Temperaturen bestimmen,

1) M. Reinganum, Ann. d. Phys. **6**. p. 533. 1901.

2) S. Young, Proc. of the Phys. Soc. London p. 602. 1894—1895; Zeitschr. f. physik. Chem. **29**. p. 193. 1899.

und erhalten $A$ als Function der Temperatur. Damit ist der Gesamtwert der Temperaturfunction

$$RTbe^{\frac{c}{T}} - a(T)$$

bekannt.

Hierbei ist möglichst grosse Genauigkeit anzustreben, da alsdann der Aufschluss um so sicherer ist, den wir über die Grössen $b$, $c$ und die Function $a$ erhalten können. Es ist nun deshalb schwer, eine sehr genaue Kenntnis von $A$ zu erreichen, weil wir uns auf das Gebiet kleiner Drucke und grosser Volumina beschränken müssen, da nur hierfür die Theorie und auch die Erfahrung einen vom Volumen unabhängigen Wert von $A$ ergiebt. Für grosse Volumina ist aber in (1) der Unterschied zwischen $p$ und $RT/v$ sehr gering, sodass kleine Beobachtungsfehler auf $A/v^2$ und $A$ einen grossen Einfluss haben müssen.

Von Ungenauigkeiten, welche in der Kenntnis von $RT$ liegen, können wir uns aber befreien, wenn wir (1) auf je zwei Volumina bei derselben Temperatur anwenden, und durch Elimination von $RT$ die Grösse $A$ berechnen. Wenn wir diese Berechnung für möglichst viele Volumpaare durchführen, so erhalten wir durch Mittelbildung einen ziemlich sicheren Wert für $A$.

Wir betrachten das Gas bei dem Druck $p_1$ und dem Volumen $v_1$, und andererseits bei dem Druck $p_2$ und dem Volumen $v_2$. Dann gilt:

$$p_1 \cdot v_1 - RT = \frac{A}{v_1},$$

$$p_2 \cdot v_2 - RT = \frac{A}{v_2},$$

$$A = \frac{(p_1 v_1 - p_2 v_2) v_1 \cdot v_2}{v_2 - v_1}. \tag{4}$$

Diese Gleichung ist in der Anwendung etwas umständlich. Wir können eine einfachere Gleichung erhalten, wenn wir mit (1) eine Umformung vornehmen und dabei entstehende Glieder höherer Ordnung weglassen. Wir können dies unbedenklich thun, da wir uns doch auf grosse Volumina beschränken, und deshalb schon in Gleichung (1) Glieder höherer Ordnung vernachlässigt sind. Wir schreiben (1):

$$p = \frac{RT}{v^2}\left(v + \frac{A}{RT}\right). \tag{5}$$

Ferner ist

$$\left(v + \frac{A}{RT}\right)\left(v - \frac{A}{RT}\right) = v^2 - \frac{A^2}{R^2T^2}. \tag{6}$$

Wir schreiben

$$-\frac{A}{RT} = B \tag{7}$$

und vernachlässigen in (6) $B^2$ neben $v^2$. Dann wird (5) wegen (6) zu[1]):

$$p(v + B) = RT. \tag{8}$$

Es sei nochmals bemerkt, dass die Grössen $A$ und $B$ sich von den Grössen $a$ und $b$ dadurch unterscheiden, dass sie aus einer Combination der letzteren entstanden sind.

Wenden wir (8) auf zwei Volumina an, so erhalten wir durch Elimination von $RT$:

$$B = \frac{p_1 \cdot v_1 - p_2 v_2}{p_2 - p_1}. \tag{9}$$

Nach dieser Gleichung wurden die Beobachtungen berechnet. Aus (7) ist dann leicht der Wert von $A$ zu finden.

Es fragt sich noch, in welcher Weise das Material am zweckmässigsten benutzt werden kann.

Young giebt zunächst seine Beobachtungen in der Form, dass zu jedem gemessenen Druck das beobachtete Volumen, reducirt auf 1 g Substanz, mitgeteilt wird. Dieses Material zerfällt in acht Versuchsreihen, die sich durch die Grösse der angewandten Volumina unterscheiden. Die Versuchsreihe VIII enthält die grössten Volumina und geringsten Drucke (1 bis 4 Atm.) und ist daher diejenige, welche für unsere Zwecke in Betracht kommen kann.

Ferner giebt Young seine Beobachtungen in einer höchst übersichtlichen tabellarischen Zusammenstellung wieder, in welcher die auf graphischem Wege abgeglichenen Daten angegeben sind. Diese Zusammenstellung lässt sich sehr zweckmassig bei grösseren Dichten verwenden. Dagegen erscheint es bei den geringen Dichten, wie sie hier in Betracht kommen, vorteilhafter, auf die direct beobachteten Werte zurückzugehen.

Die Versuchsreihe VIII wurde in der Weise verwertet, dass je zwei Bestimmungen combinirt wurden, und hieraus $B$ berechnet wurde.

Z. B. enthält die Versuchsreihe 12 Bestimmungen bei 100° C. Es wurde dann die 1. und 7., 2. und 8.,... 6. und 12. Bestimmung combinirt und jedesmal $B$ berechnet. Durch diese Art der Combination waren die Volumenunterschiede in

1) Vgl. Gleichung (29) der citirten Arbeit.

jeder Berechnung, und damit die Sicherheit der Resultate, möglichst gleichmässig. Bei einer ungeraden Anzahl von Beobachtungen wurde die Bestimmung bei dem geringsten Druck nicht verwertet.

Ich lasse die einzelnen Berechnungen tabellarisch folgen, da man auf diese Weise am besten einen Ueberblick über die Art der Verwertung des Materiales und die Schwankungen von $B$ und $A$ erhält.

In der ersten Columne stehen paarweise die Drucke in mm Quecksilber, in der zweiten die Volumina in ccm pro g Substanz, in der dritten die Werte für $B$. Die Mittelwerte stehen unter den betreffenden Columnen. Die $\pm$ Werte bedeuten den wahrscheinlichen Fehler des Mittelwertes. Zur Berechnung von $A$ aus $B$ müssen nach (7) die Werte von $R$ und $T$ bekannt sein. Da das Moleculargewicht von Isopentan 72,1 beträgt (O = 16,00), so ergiebt sich $R = 865{,}4$.[1]) Zur Bestimmung der absoluten Temperatur wurde der Schmelzpunkt von Eis genau gleich 273° C. gesetzt.

Da $RT$ bei dieser Berechnung nur mit den vorher bestimmten Werten von $B$ multiplicirt wird, so ist bei den Schwankungen, die in $B$ vorkommen, eine grössere Genauigkeit der Kenntnis von $RT$, eventuell eine genauere Kritik des absoluten Nullpunktes, nicht nötig.

| 40° C. | | | 50° C. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $v$ | $B$ | $p$ | $v$ | $B$ |
| 827 | 312,7 | 15,88 | 814 | 330,0 | 16,02 |
| 980 | 261,4 | | 1158 | 227,2 | |
| 873 | 295,5 | 17,66 | 903 | 295,6 | 14,99 |
| 1044 | 244,2 | | 1246 | 210,1 | |
| 924 | 278,5 | 19,01 | 1015 | 261,4 | 15,50 |
| 1117 | 227,1 | | 1348 | 193,0 | |
| | | 17,52 | 1082 | 244,3 | 15,47 |
| | | ± 0,60 | 1468 | 176,0 | |
| | | | | | 15,48 |
| | | | | | ± 0,14 |

1) Dabei ist die allgemeine Gasconstante $R \cdot M$ zu 0,0821 angenommen, wenn der Druck in Atmosphären und das Volumen in Litern gemessen wird. Vgl. W. Nernst, Theor. Chem., III. Aufl. p. 43. 1900.

60° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 839 | 330,1 | 12,89 |
| 1397 | 193,1 | |
| 933 | 295,7 | 12,71 |
| 1542 | 176,1 | |
| 1049 | 261,5 | 13,30 |
| 1673 | 159,0 | |
| 1199 | 227,3 | 13,72 |
| 1857 | 141,9 | |
| 1290 | 210,2 | 13,58 |
| 1964 | 133,4 | |
| | | 13,24 |
| | | ± 0,19 |

70° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 866 | 330,2 | 12,30 |
| 1444 | 193,1 | |
| 965 | 295,7 | 13,41 |
| 1574 | 176,1 | |
| 1085 | 261,6 | 13,06 |
| 1732 | 159,0 | |
| 1239 | 227,8 | 12,74 |
| 1922 | 142,0 | |
| 1334 | 210,2 | 12,51 |
| 2164 | 124,9 | |
| | | 12,80 |
| | | ± 0,13 |

80° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 898 | 330,2 | 11,04 |
| 1492 | 193,2 | |
| 993 | 295,8 | 11,12 |
| 1627 | 176,2 | |
| 1118 | 261,7 | 11,84 |
| 1789 | 159,1 | |
| 1277 | 227,4 | 11,37 |
| 1988 | 142,0 | |
| 1377 | 210,3 | 12,00 |
| 2236 | 124,9 | |
| | | 11,48 |
| | | ± 0,12 |

90° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 920 | 330,3 | 11,23 |
| 1537 | 198,2 | |
| 1024 | 295,9 | 11,21 |
| 1678 | 176,2 | |
| 1152 | 261,7 | 11,18 |
| 1846 | 159,1 | |
| 1317 | 227,4 | 10,61 |
| 2054 | 142,0 | |
| 1418 | 210,3 | 10,21 |
| 2314 | 124,9 | |
| | | 10,89 |
| | | ± 0,14 |

100° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 822 | 382,2 | 10,26 |
| 1462 | 210,4 | |
| 860 | 365 | 10,86 |
| 1584 | 193,2 | |
| 947 | 330,4 | 9,599 |
| 1732 | 176,8 | |
| 1054 | 296,0 | 10,47 |
| 1904 | 159,2 | |
| 1186 | 261,8 | 9,900 |
| 2120 | 142,1 | |
| 1357 | 227,5 | 10,01 |
| 2389 | 124,9 | |
| | | 10,18 |
| | | ± 0,12 |

120° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 832 | 399,6 | 9,548 |
| 1547 | 210,5 | |
| 909 | 365,2 | 9,664 |
| 1678 | 193,4 | |
| 1002 | 330,5 | 9,184 |
| 1834 | 176,4 | |
| 1113 | 296,1 | 8,558 |
| 2020 | 159,3 | |
| 1254 | 261,9 | 9,040 |
| 2248 | 142,1 | |
| 1435 | 227,6 | 8,719 |
| 2586 | 125,0 | |
| | | 9,119 |
| | | ± 0,120 |

140° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 838 | 417,1 | 7,342 |
| 1632 | 210,6 | |
| 956 | 365,4 | 8,403 |
| 1770 | 193,5 | |
| 1053 | 330,7 | 8,023 |
| 1933 | 176,5 | |
| 1172 | 296,3 | 7,784 |
| 2133 | 159,3 | |
| 1321 | 262,1 | 7,784 |
| 2377 | 142,2 | |
| | | 7,867 |
| | | ± 0,116 |

160° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 847 | 484,7 | 7,629 |
| 1716 | 210,7 | |
| 958 | 382,8 | 7,110 |
| 1861 | 193,6 | |
| 1107 | 330,9 | 7,266 |
| 2036 | 176,6 | |
| 1233 | 296,4 | 7,170 |
| 2247 | 159,4 | |
| 1388 | 262,2 | 6,951 |
| 2503 | 142,3 | |
| | | 7,225 |
| | | ± 0,075 |

180° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 963 | 400,2 | 7,121 |
| 1800 | 210,8 | |
| 1051 | 365,7 | 7,156 |
| 1951 | 193,7 | |
| 1159 | 331,1 | 6,650 |
| 2135 | 176,7 | |
| 1290 | 296,6 | 6,105 |
| 2358 | 159,5 | |
| 1455 | 262,4 | 7,051 |
| 2625 | 142,3 | |
| 1677 | 228,0 | 8,128 |
| 2970 | 125,2 | |
| | | 7,035 |
| | | ± 0,124 |

200° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 964 | 417,8 | 6,341 |
| 1744 | 228,1 | |
| 1098 | 366,0 | 6,628 |
| 1880 | 211,0 | |
| 1209 | 331,2 | 5,879 |
| 2041 | 193,8 | |
| 1349 | 296,8 | 6,569 |
| 2233 | 176,7 | |
| 1521 | 262,5 | 6,029 |
| 2466 | 159,6 | |
| | | 6,289 |
| | | ± 0,098 |

220° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 966 | 435,4 | 6,171 |
| 1820 | 228,2 | |
| 1093 | 383,4 | 5,573 |
| 1963 | 211,0 | |
| 1261 | 331,4 | 5,642 |
| 2180 | 193,9 | |
| 1407 | 297,0 | 6,043 |
| 2332 | 176,8 | |
| 1587 | 262,6 | 5,933 |
| 2573 | 159,7 | |
| | | 5,872 |
| | | ± 0,077 |

250° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 854,0 | 523,0 | 4,267 |
| 1686 | 262,8 | |
| 915 | 488,2 | 5,064 |
| 1934 | 228,8 | |
| 1025 | 435,8 | 5,372 |
| 2088 | 211,2 | |
| 1161 | 383,6 | 4,675 |
| 2269 | 194,0 | |
| 1340 | 331,6 | 4,719 |
| 2480 | 177,0 | |
| 1495 | 297,2 | 5,149 |
| 2740 | 159,8 | |
| | | 4,874 |
| | | ± 0,108 |

280° C.

| $p$ | $v$ | $B$ |
|---|---|---|
| 876 | 540,8 | 4,415 |
| 1786 | 263,0 | |
| 970 | 488,5 | 5,220 |
| 2049 | 228,5 | |
| 1084 | 436,1 | 4,350 |
| 2213 | 211,4 | |
| 1230 | 384,0 | 5,850 |
| 2402 | 194,2 | |
| 1420 | 331,9 | 4,418 |
| 2631 | 177,1 | |
| 1583 | 297,4 | 4,492 |
| 2907 | 159,9 | |
| | | 4,791 |
| | | ± 0,105 |

Man sieht, dass die Schwankungen der Werte $B$ bei ein und derselben Temperatur ganz unregelmässiger Natur sind und daher *$B$ als unabhängig vom Volumen gesetzt werden kann. Es bestätigt sich also in diesem Punkte die Theorie.*

Die $\pm$ Werte bedeuten die wahrscheinlichen Fehler des Mittelwertes.

Der Verlauf von $B$ und $A$ mit der Temperatur lässt eine bestimmte Regelmässigkeit erkennen. In der folgenden Tabelle sind die Mittelwerte für $B$ und die hieraus berechneten Werte von $A$ zusammengestellt, und in der letzten Columne die Werte für $A$, wie sie aus einer graphischen Abgleichung abgelesen sind. Letztere ist in der Figur wiedergegeben.

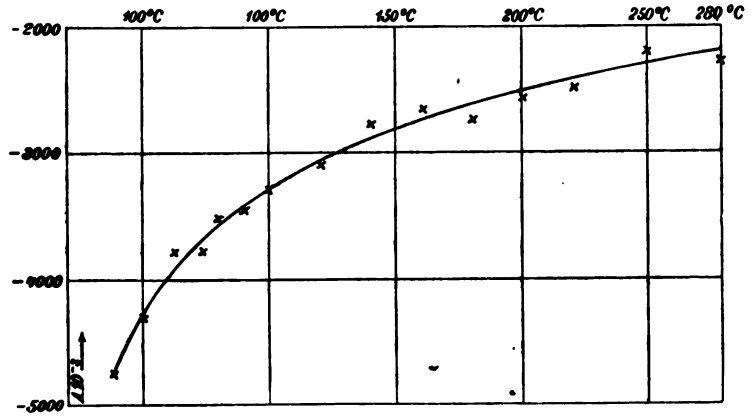
| $t°$ C. | $T_{abs.}$ | $B$ | $-A.10^{-8}$ | $-A.10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 313 | 17,52 | 4745 | 4745 |
| 50 | 323 | 15,48 | 4327 | 4310 |
| 60 | 333 | 13,24 | 3816 | 3975 |
| 70 | 343 | 12,80 | 3799 | 3725 |
| 80 | 353 | 11,48 | 3507 | 3545 |
| 90 | 363 | 10,89 | 3421 | 3400 |
| 100 | 373 | 10,18 | 3286 | 3280 |
| 120 | 393 | 9,119 | 3101 | 3190 |
| 140 | 413 | 7,867 | 2812 | 2920 |
| 160 | 433 | 7,225 | 2707 | 2780 |
| 180 | 453 | 7,035 | 2758 | 2650 |
| 200 | 473 | 6,289 | 2574 | 2540 |
| 220 | 493 | 5,872 | 2505 | 2435 |
| 250 | 523 | 4,874 | 2206 | 2305 |
| 280 | 553 | 4,791 | 2293 | 2180 |

Wir wollen an dieser Stelle die gewonnenen Werte von $A$ nur zu dem Zwecke verwenden, die Aussage der Gleichung

von van der Waals zu prüfen, dass $a$ und $b$ unabhängig von der Temperatur sind. In diesem Falle würde die Gleichung (2):

$$A = RTb - a.$$

*$A$ würde dann also eine lineare Function von $T$* sein. Aus der Tabelle wie aus der Curve (Figur) lässt sich aber ersehen, *dass $A$ keine lineare Function* ist, sondern namentlich bei tieferen Temperaturen einen beträchtlichen zweiten Differentialquotienten besitzt.




*Es sind daher entweder $b$ oder $a$, oder beide Grössen Functionen der Temperatur, wie es auch Gleichung (2) vorhersehen lässt.*[1])

Um sichere quantitative Schlüsse hierüber zu ziehen, muss jedoch die Grösse der Krümmung noch genauer festgelegt sein. Wir könnten die Werte von $A$ dadurch noch sicherer machen, dass wir $A$ auch aus grösseren Dichten berechnen. Hierbei kann man zwar nicht von je zwei Volumina ausgehen, da $A$ für grössere Dichten selbst Volumenfunction ist, dafür kann man dann aber mit genügender Sicherheit den Absolut-

1) Es ist bekannt, dass von einer Reihe von Forschern für die Grössen $a$ und $b$ der van der Waals'schen Gleichung Temperatur- bez. Volumenfunctionen eingeführt wurden, um einen besseren Anschluss an die Erfahrung zu erzielen. Vgl. z. B. über diese Versuche, soweit sie nicht jüngeren Datums sind, Winkelmann's Handbuch der Physik (II) 2. p. 868. 1896. — Alle diese Versuche leiden jedoch, wo sie auf die Erfahrung angewandt wurden, an dem Fehler gänzlicher Willkürlichkeit in der Wahl der Constanten.

wert von $R$ in (1) einsetzen und sich daher mit *einer* Gleichung begnügen. Dann kann man einen Grenzwert für $A$ für grosse Volumina durch Extrapolation erhalten. Es ist daher noch $A$ auch auf diese und andere Weisen zu bestimmen und mit den hier abgeleiteten Werten zu vergleichen.

Eine weitere Beziehung der vorhergehenden Arbeit, die sich unmittelbar anwenden lässt, folgt aus der Gleichung (38) daselbst und lautet:

$$U_\infty = \int_v^\infty \left( T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dv. \tag{10}$$

In dem Studium dieser Function scheint mir eines der wichtigsten Momente zu einem Fortschritt in der Kenntnis der Zustandsbeziehungen zu liegen. Die Beziehung (10) hat nämlich den Vorzug, nicht nur für grosse Volumina, sondern für alle Dichten eine einfache theoretische Bedeutung zu haben. Denn da die fortschreitende Energie ganz unabhängig von der Dichte sein muss, so ist die Ausdehnungswärme $U_\infty$ auch bei grösseren Dichten ein directes Maass für die potentielle Energie der Molecüle untereinander. Dies ist für die Zustandsgleichung bei grösseren Dichten von Bedeutung. Berechnungen hierüber sollen später mitgeteit werden.

(Eingegangen 22. August 1901.)

## 7. *Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung flüssiger Luft;* von *Leo Grunmach.*

(Aus den Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, mitgeteilt vom Verfasser.)[1]

In einer früheren Abhandlung, welche der Akademie vorgelegt worden ist[2]), habe ich gezeigt, in welcher Weise man die Oberflächenspannung condensirter Gase bei Anwendung der Capillarwellenmethode bequem und sicher messen kann, und sie auch bereits für einige condensirte Gase bestimmt. Inzwischen habe ich meine Untersuchungen auf andere condensirte Gase ausgedehnt, insbesondere zahlreiche Messungen an flüssiger Luft ausgeführt, deren Mitteilung den Gegenstand des vorliegenden Aufsatzes bilden soll.[3])

Die Versuchsanordnung und Beobachtungsmethode war dieselbe wie bei meinen früheren Versuchen.[4]) Die flüssige Luft wurde unmittelbar vor dem Beginn der Messungen aus den zur Aufbewahrung dienenden doppelwandigen versilberten Dewar'schen Sammelgefässen durch Filter in ebensolche halbkugelförmige Dewar'sche Gefässe hineinfiltrirt. Diese ruhten möglichst erschütterungsfrei auf einem Dreifusse, welcher durch einen in der Grundplatte des Stimmgabelstativs befindlichen kreisförmigen Ausschnitt hindurchragend, also *unabhängig vom Stimmgabelstativ*, fest aufgestellt war. Die Gefässe sind ebenso wie die Stimmgabelspitzen auf das Sorgfältigste rein zu halten.

1) L. Grunmach, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Gesamtsitzung vom 25. Juli 1901. p. 914.

2) L. Grunmach, l. c. p. 829. 1900; Ann. d. Phys. **4**. p. 367. 1901.

3) Diese Versuche sind von mir ausgeführt worden in der „Centralstelle für wissenschaftliche und technische Untersuchungen" zu Neubabelsberg. Ich benutze gern die Gelegenheit, dem ersten Director derselben, Hrn. Prof. Dr. Will, für das gefällige Entgegenkommen, mit welchem er mir das Laboratorium dieses Instituts für meine Versuche zur Verfügung gestellt hat, auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

4) L. Grunmach, l. c. p. 832. 1900; ferner Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **1**. Nr. 1. p. 17. 1899; Ann. d. Phys. **3**. p. 660. 1900.

Da die flüssige Luft sich in ihrer chemischen Zusammensetzung bekanntlich mit der Zeit stark ändert und zwar bei offenem Stehen wegen des leichteren und schnelleren Verdampfens des Stickstoffs immer sauerstoffreicher wird, so wurde, um einen etwaigen Einfluss des Sauerstoffgehaltes auf die Oberflächenspannung festzustellen, mit flüssiger Luft von verschiedenem Sauerstoffgehalt gearbeitet und letzterer bei jeder Beobachtungsreihe auf gasanalytischem Wege bestimmt. Diese Bestimmungen geschahen nach einer von Hrn. W. Hempel[1]) ausgebildeten Absorptionsmethode, welche auf der Thatsache beruht, dass eine rasche und vollständige Sauerstoffabsorption stattfindet, ohne dass nebenbei irgend welche andere Gasentwickelung erfolgt, wenn man das Sauerstoffgas mit metallischem Kupfer (in Form von Drahtbündeln oder kleinen Röllchen von Drahtnetz) und einer Lösung zusammenbringt, welche zu gleichen Teilen aus einer gesättigten Lösung von kohlensaurem Ammoniak und einer einfach verdünnten Ammoniaklösung vom specifischen Gewicht 0,93 besteht. Eine kleine Probe der zu untersuchenden flüssigen Luft wurde mittels eines Löffelchens möglichst rasch unter eine in einem grossen Wasserbehälter befindliche mit Wasser gefüllte Glasglocke gebracht, wo sie natürlich sofort verdampfte. Nachdem sie die Temperatur der umgebenden Wassermasse angenommen, wurde mittels einer Winkler'schen Gasbürette ein genau abgemessenes Volumen dieser Luft (am bequemsten 100 ccm) in die das Reagens enthaltende Absorptionspipette geleitet, wo sie etwa 5 Minuten verblieb. Nach dieser Zeit ist eine vollständige Absorption des Sauerstoffs erfolgt, und man bestimmt den Sauerstoffgehalt aus dem Volumen des übriggebliebenen in die Gasbürette zurückgeleiteten Stickstoffs.[2])

Bezüglich der Erregung der Capillarwellen auf flüssiger Luft möchte ich besonders darauf aufmerksam machen, dass man, um stets sicher messbare Capillarwellen zu erhalten, die Stimmgabelspitzen *nicht tief, sondern nur eben in die Flüssigkeit*

1) W. Hempel, Gasanalytische Methoden, III. Aufl. p. 143. 1900.

2) Die Mehrzahl der Sauerstoffbestimmungen war Hr. Dr. Helmuth v. Öttingen so gefällig auszuführen. Ich spreche ihm, sowie Hrn. Dr. Knüpfer, für die mir gewährte Unterstützung meinen besten Dank aus.

*eintauchen lassen* und die Stimmgabel nur durch sanftes Anschlagen erregen darf; dann, aber auch nur dann, treten sie mit einer Schärfe und Constanz auf, wie man sie schöner kaum bei reinem Quecksilber erhält. Bei tieferem Eintauchen dagegen treten, auch ohne besondere Erregung der Stimmgabel, merkwürdige Bewegungen der Flüssigkeitsoberfläche auf, welche die Ausbildung feststehender Interferenzwellen stören, sodass man letztere wohl durch eine photographische Momentaufnahme fixiren, aber nur sehr unsicher mit dem Mikrometermikroskop messend verfolgen kann.

Es sollen die Ergebnisse von acht Beobachtungsreihen, die mit flüssiger Luft von verschiedenem Sauerstoffgehalt angestellt worden sind, mitgeteilt werden. Während einer jeden Messungsreihe wurde eine Probe der jeweilig untersuchten flüssigen Luft entnommen und deren Sauerstoffgehalt gasanalytisch ermittelt. Vor und nach jeder Beobachtungsreihe der Wellenlängen wurde mit dem Mikrometermikroskop die Entfernung der Stimmgabelspitzen ausgemessen und diese andererseits mittels des Horizontalcomparators auf das Genaueste zu 2,0402 cm bestimmt. Die Siedetemperatur der flüssigen Luft wurde mittels des der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt gehörigen, von C. Richter in Berlin aus Jenaer Glas $59^{III}$ verfertigten Petroleumäther-Thermometers Nr. 39 gemessen und im Mittel $-190{,}3^{0}$ C. gefunden. Die Oberflächenspannung $\alpha$ berechnet sich aus der Gleichung

$$\alpha = \frac{n^2 \lambda^3 \sigma}{2\pi},$$

in welcher $\lambda$ die Wellenlänge, $\sigma$ die Dichte und $n$ die Schwingungszahl bedeutet, und zwar in Dynen pro cm, wenn $\lambda$ in cm gegeben ist. Für die benutzte Stimmgabel P. T. R. II. 38 ist nach der von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt ausgeführten Prüfung

$$n_t = 253{,}13 - 0{,}025\ (t - 19{,}1^{0}).$$

Dichtebestimmungen habe ich an drei Proben flüssiger Luft mittels der Mohr'schen Waage ausgeführt und gefunden

1. für frisch hergestellte flüssige Luft vom Sauerstoffgehalt 49,9 Proc. die Dichte 0,984,

2. für flüssige Luft, die einige Stunden offen gestanden, vom Sauerstoffgehalt 60,2 Proc. die Dichte 1,015,

3. für flüssige Luft, durch die 1 Stunde lang Druckluft hindurchgejagt worden war, vom Sauerstoffgehalt 67,6 Proc. die Dichte 1,042.[1])

Ich gehe nunmehr zur Mitteilung der Beobachtungen der einzelnen Versuchsreihen I—VIII über (vgl. die Tabelle auf folgender Seite).

Der Barometerstand und die relative Feuchtigkeit waren im Mittel bei den Versuchsreihen

| I—IV: | V—VI: | VII—VIII: |
|---|---|---|
| 763,2 mm und 27 Proc. | 763,5 mm und 31 Proc. | 762,4 mm und 40 Proc. |

Ordnet man die specifischen Cohäsionen und die Oberflächenspannungen nach dem Sauerstoffgehalt der flüssigen Luft, so erhält man folgende Zusammenstellung:

| Sauerstoffgehalt | Specifische Cohäsion $a^2 = \frac{n^2 \lambda^2}{\pi}$ | Oberflächenspannung $\alpha = \frac{a^2}{2}\sigma$ | Temperatur |
|---|---|---|---|
| 49,9 Proc. | 23,60 | 11,61 Dynen/cm | −190,3° C. |
| 63,9 | 23,12 | 11,89 | −190,3 |
| 65,3 | 23,30 | 12,05 | −190,3 |
| 66,8 | 22,92 | 11,90 | −190,3 |
| 67,6 | 22,86 | 11,91 | −190,3 |
| 74,4 | 22,94 | 12,23 | −190,3 |
| 76,45 | 23,30 | 12,51 | −190,3 |
| 76,7 | 23,50 | 12,68 | −190,3 |

Demgemäss scheint die specifische Cohäsion der flüssigen Luft innerhalb der beobachteten Grenzen unabhängig von deren

---

1) Diese Werte stimmen verhältnismässig gut überein mit Dichtebestimmungen der Herren A. Ladenburg und C. Krügel (Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. (I) 32. p. 46. 1899), welche für

flüssige Luft vom Sauerstoffgehalt 53,83 Proc. die Dichte 0,9951
„ „ „ „ 64,2 „ „ „ 1,029
„ „ „ „ 93,6 „ „ „ 1,112

gefunden haben. Für die sauerstoffreichere (mehr als 67,6 Proc. Sauerstoff enthaltende) flüssige Luft habe ich diese Zahlen in Verbindung mit den meinigen zur Berechnung der Dichte verwertet.

| Nr. der Versuchsreihe | Sauerstoffgehalt in Procenten der flüssigen Luft | Dichte $\sigma$ | Spitzenentfernung in Mikrometerpartes | Mittlere halbe Wellenlänge $\lambda/2$ in Mikrometerpartes | Mittlere Temperatur $t$ der Stimmgabel in ° C. | Schwingungszahl $n_t$ der Stimmgabel bei der Temperatur $t$ | Spec. Cohäsion der flüssigen Luft $a^2 = \frac{n^2\lambda^3}{\pi}$ | Oberflächenspannung der flüssigen Luft $\alpha = \frac{a^2\sigma}{2}$ in Dynen/cm | Bemerkungen über die Herstellung der flüssigen Luft |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 63,9 | 1,028 | 1470,9 | 37,6 | 24 | 253,01 | 23,12 | 11,89 | Die Luft war Tags vorher verflüssigt und in einer Dewar'schen Flasche aufbewahrt worden. |
| II. | 66,8 | 1,039 | 1467,45 | 37,4 | 23 | 253,03 | 22,92 | 11,90 | Die Luft war Tags vorher verflüssigt und in einer Dewar'schen Flasche aufbewahrt worden. |
| III. | 74,4 | 1,066 | 1471,1 | 37,5 | 22 | 253,06 | 22,94 | 12,23 | Die Luft war Tags vorher verflüssigt und in einer Dewar'schen Flasche aufbewahrt worden. |
| IV. | 76,7 | 1,075 | 1465,0 | 37,65 | 23,05 | 253,04 | 23,50 | 12,63 | Die Luft war Tags vorher verflüssigt und in einer Dewar'schen Flasche aufbewahrt worden. |
| V. | 65,3 | 1,034 | 1463,5 | 37,5 | 20,8 | 253,09 | 23,30 | 12,05 | Die Luft war 2 Tage vor den Beobachtungen verflüssigt und in einer Dewar'schen Flasche mit engem Hals aufbewahrt worden. |
| VI. | 76,45 | 1,074 | 1461,7 | 37,45 | 20,6 | 253,09 | 23,30 | 12,51 | Wie vorher; nur wurde die flüssige Luft vor den Messungen in eine weite Porzellanschale gegossen und blieb in derselben, um den Stickstoff schneller fortzuschaffen, etwa eine halbe Stunde offen stehen. Vor der Messung wurde sie natürlich, wie immer, filtrirt. |
| VII. | 49,9 | 0,984 | 1445,5 | 37,2 | 21,7 | 253,06 | 23,60 | 11,61 | Die flüssige Luft war unmittelbar vor Beginn der Messungen hergestellt worden. |
| VIII. | 67,6 | 1,042 | 1449,1 | 36,9 | 22,7 | 253,04 | 22,86 | 11,91 | Die flüssige Luft war einige Stunden vor Beginn der Messungen hergestellt worden. Um sie schneller vom Stickstoff zu befreien, wurde Druckluft etwa eine Stunde lang durch die flüssige Luft hindurchgejagt. |

Sauerstoffgehalt zu sein und im Mittel den Wert 23,2 zu besitzen, welcher sich als Mittel aus den vorstehenden Werten ergiebt; naturgemäss muss dann die Oberflächenspannung der flüssigen Luft mit wachsendem Sauerstoffgehalt zunehmen, wie auch aus der Zusammenstellung ersichtlich ist.[1])

1) Während der Drucklegung dieses Aufsatzes finde ich in der Literatur, dass Hr. James Dewar aus Messungen capillarer Steighöhen (Nature Nr. 1653. p. 248. 1901) für das Verhältnis der Oberflächenspannungen des Wassers und der flüssigen Luft den Wert 15,2 : 2 ermittelt, ferner dass Hr. Carl Forsch (Physikal. Zeitschr. Nr. 15. p. 177. 1900) als vorläufigen Wert der Oberflächenspannung flüssiger Luft von der Dichte 1,1 (ebenfalls nach Messungen capillarer Steighöhen) 1,2 bis 1,3 mg/mm mitteilt.

(Eingegangen 24. August 1901.)

## 8. *Zur Sichtbarmachung der Deformation von Wechselströmen;* *von Robert Weber.*

Der zeitliche Verlauf eines einfachen Wechselstromes ist akustischen, hydraulischen und optischen Vorgängen vergleichbar und dadurch auch leicht zu erfassen. Die eigentümlichen Verhältnisse aber, wie sie die Einfügung von Selbstinduction und Capacität u. s. f. in einem Wechselstromkreis erzeugen, sind jedoch nicht so geläufig vergleichbar und zudem in ihrer Wirkung nicht unmittelbar zu erkennen.

Die Braun'sche Röhre ist daher ein äusserst erwünschtes Mittel, um den Einfluss der Selbstinduction, der Capacität und ihrer Verbindungen auf den Wechselstrom, sowie die Natur des letzteren selbst sichtbar zu machen. Dass und wie dieses geschehen kann, haben bekanntlich Braun, dann Wehnelt und Donath, dann Weinhold[1]) in verschiedener Weise gezeigt.

Der nachfolgend beschriebene Apparat kann in einfacher Weise dasselbe leisten.

Ein polarisirter Elektromagnet ist aus einem 25 cm langen Stahlmagneten und einem geraden Elektromagneten so gebildet, dass der aus einem Bündel feiner Eisendrähte bestehende Kern des letzteren auf ersterem aufsitzt und beider Längsaxen zusammenfallen. Ausserdem sind das eine Ende des Kernes und das eine Ende des Stahlmagnetes in einem besonderen Stück weichen Eisens gefasst und so magnetisch möglichst verbunden. Die Spule des Elektromagneten ist 5 cm lang, hat 3000 Windungen dünnen Drahtes und 280 Ohm Widerstand. Der Stahlmagnet hat ein magnetisches Moment von etwa 8600 Einheiten. Vor dem Kerne des Elektromagneten ist, in einstellbarer Entfernung, eine Kapsel angebracht, wie sie König zu akustischen Untersuchungen vorgeschlagen hat. Die Membran (aus gut geleimtem Papier) ist zwischen Holz geklemmt und geleimt;

1) A. Weinhold, Elektrotechn. Zeitschr. Heft 20. p. 409. 1901.

dieselbe steht zur Axe der Magnete senkrecht und trägt in ihrer Mitte einen aufgeklebten Cylinder weichen Eisens von 1 cm Durchmesser und 0,2 cm Höhe. Nach König's Vorbild sind noch das Gaszuleitungsrohr und der kleine Brenner angebracht. Die Spule des Elektromagneten liegt im Stromkreis des zu untersuchenden Wechselstromes. Das Flammenbild wird im drehenden Spiegel betrachtet.

Fig. 1 giebt einen schematischen Schnitt und Fig. 2 giebt die Ansicht dieses Apparates.

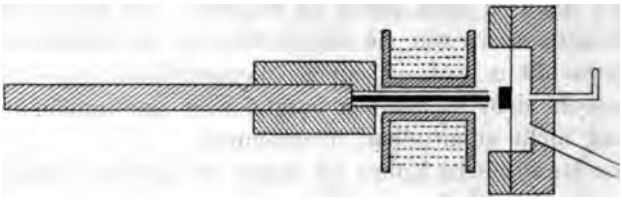


Fig. 1.

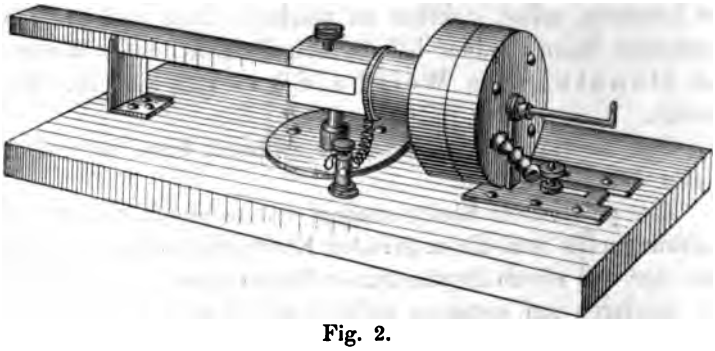


Fig. 2.

Die Flamme ist am empfindlichsten, wenn dieselbe (nicht das ausströmende Gas) einen ziemlich lauten reinen Ton giebt.

Je nach der Elasticität und Grösse der Membran, je nach Gasdruck und Grösse der Brenneröffnung, und je nach der Entfernung des kleinen auf die Membran aufgeklebten Eisenstückes vom Kern des Elektromagneten, und endlich je nach dem Verhältnis von Stromstärke und magnetischer Intensität wird die Flamme mehr oder weniger gross und empfindlich. Es ist daher notwendig, bei jeder Zusammenstellung der Stromverhältnisse die König'sche Kapsel auf die vorteilhafteste Entfernung vom Elektromagneten einzustellen.

Die Figg. 3a bis 10b geben einige Gruppen von Flammenbildern. Dieselben haben aus den angegebenen Gründen in

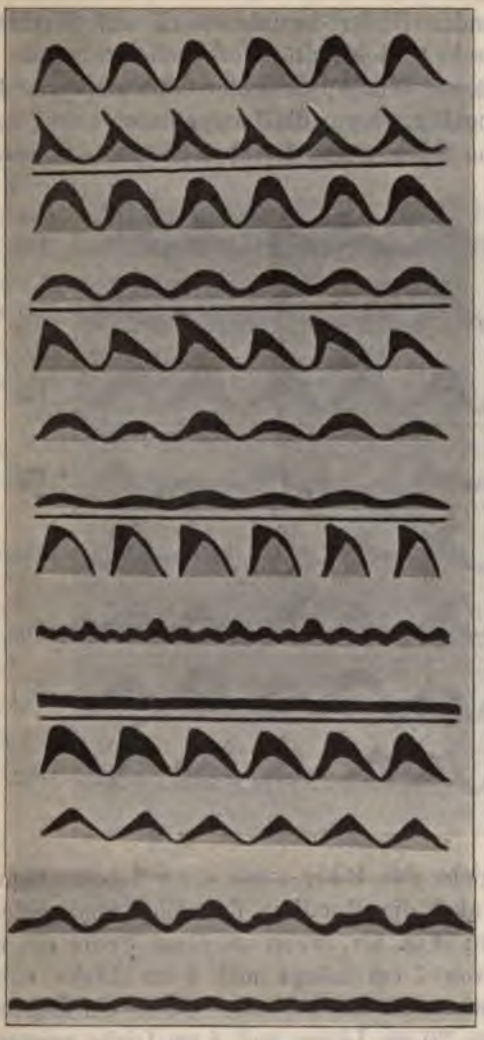


Fig. 3a.
Fig. 3b.
Fig. 4a.
Fig. 4b.
Fig. 5a.
Fig. 5b.
Fig. 5c.
Fig. 6a.
Fig. 6b.
Fig. 6c.
Fig. 7a.
Fig. 7b.
Fig. 7c.
Fig. 7d.

ihrer Form nichts Absolutes, sondern können nur nach Gruppen untereinander verglichen werden.

Insbesondere beziehen sich Figg. 3a u. 3b auf Gleichstrom. Der Stromkreis enthielt eine Batterie, den Apparat und einen

rotirenden Stromwender. Das Bild 3a wurde erhalten bei langsamer und Bild 3b bei sehr schneller Drehung des Stromwenders.

Alle folgenden Bilder beziehen sich auf Wechselstrom, der vom städtischen Elektricitätswerk geliefert wurde.

Bei Fig. 4a war dem Apparat eine Glühlampe von 100 Volt vorgeschaltet; bei Fig. 4b war die Lampe durch eine 7 cm lange, dicht gewundene Spule (ohne Kern) von 280 Ohm ersetzt.

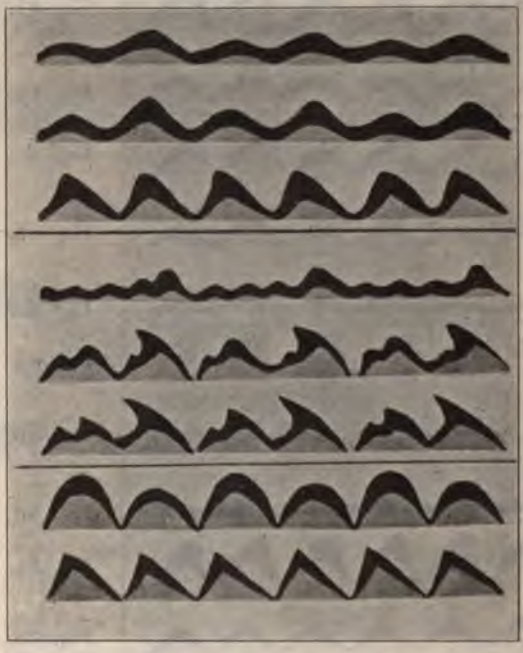


Fig. 8a.
Fig. 8b.
Fig. 8c.
Fig. 9a.
Fig. 9b.
Fig. 9c.
Fig. 10a.
Fig. 10b.

Fig. 5a giebt das Bild, wenn diese letztere Spule eingeschaltet ist, aber die Membran dem Elektromagneten etwas genähert wurde; Fig. 5b, wenn in diese Spule ein massiver Eisencylinder von 7 cm Länge und 4 cm Dicke eingesteckt war; Fig. 5c, wenn der Eisencylinder durch ein dichtes Eisendrahtbündel von 30 cm Länge und 4 cm Dicke ersetzt war.

Fig. 6a giebt das Flammenbild, wenn der Apparat allein eingeschaltet; Fig. 6b, wenn ein Condensator von 1,3 Mikrofarad Capacität, Fig. 6c, wenn ein Condensator von 0,1 Mikrofarad vorgeschaltet ist.

Fig. 7a ergab sich bei demselben Stromkreis wie Fig. 4b; sodann Fig. 7b, wenn der kernlosen Spule ein Condensator von 1,3 Mikrofarad parallel geschaltet war; ferner Fig. 7c, wenn der Eisencylinder eingesteckt, und 7d, wenn das Eisendrahtbündel eingesteckt war.

Bei Fig. 8a waren dieselbe Spule und Condensator wie bei Fig. 7a, aber alles in Reihe geschaltet; dann giebt die Zufügung des Eisencylinders Fig. 8b, und das Eisendrahtbündel die Fig. 8c.

Zu Fig. 9 war nur der Condensator von 1,3 Mikrofarad dem Apparat vorgeschaltet und dann die elektromotorische Kraft des eintretenden Wechselstromes geändert; und zwar war $E = 30$ Volt bei Fig. 9a, dann $E = 60$ Volt bei Fig. 9b und dann $E = 80$ Volt bei Fig. 9c.

Endlich giebt Fig. 10 die Wirkung einer Polarisationsbatterie von 40 kleinen Elementen (Eisen in Sodalösung). Es war Fig. 10a das Bild, wenn der Apparat allein eingeschaltet war und Fig. 10b, wenn ihm noch jene Batterie vorgeschaltet wurde.

Neuchâtel, August 1901.

(Eingegangen 4. September 1901.)

## 9. *Ueber die Wirkung der Becquerelstrahlen auf Bacterien;*

*von E. Aschkinass und W. Caspari.*[1])

Downes und Blunt beobachteten im Jahre 1877, dass die Entwickelung von Bacterien durch die Einwirkung des Lichtes eine bedeutende Schädigung erleidet.[2]) Durch eine grosse Zahl von Untersuchungen der folgenden Jahre sind diese Beobachtungen noch in mannigfacher Weise bestätigt und erweitert worden, und bekanntlich hat die Erkenntnis der bactericiden Wirkungen des Lichtes neuerdings in der durch Finsen eingeführten Lichttherapie auch praktische Erfolge gezeitigt. Die Empfindlichkeit der Bacterien ist aber nicht für alle Spectralgebiete von gleicher Grösse; vornehmlich sind es die blauen, violetten und ultravioletten Strahlen, denen die schädigende Wirksamkeit zukommt. So giebt sich also der in physikalischer Hinsicht so vielfach zu Tage tretende Unterschied zwischen diesen kurzwelligen Strahlen und denen der übrigen Teile des Spectrums auch in dem Verhalten der Bacterien zu erkennen. Eine ähnliche Differenzirung vermochten wir unlängst festzustellen, als wir versuchten, einen etwaigen Einfluss der Becquerelstrahlen auf das Wachstum dieser Lebewesen nachzuweisen.

Wir benutzten zu unseren Beobachtungen den Micrococcus prodigiosus. Dieses Bacterium ist für den vorliegenden Zweck besonders geeignet, weil die Entwickelung seiner Colonien unter intensiver Rotfärbung und starker Geruchsbildung vor sich geht und sich daher die Intensität seiner Lebensenergie sehr leicht und deutlich verfolgen lässt.

Es stand uns ein stark radioactives Präparat zur Verfügung, welches wir der Güte des Hrn. Prof. Dr. Miethe ver-

1) Ausführlicher mitgeteilt in Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. **86.** p. 603. 1901.

2) A. Downes und Th. Blunt, Proc. Roy. Soc. **26.** p. 488. 1877; **28.** p. 199. 1878.

dankten. Dasselbe bestand aus etwa 1 g Radium-Baryum-Bromid. Das Salz war in einer 6 mm hohen Messingkapsel auf einer Kreisfläche von 3 cm Durchmesser ausgebreitet, und dieses Gefäss konnte durch einen Deckel von 0,1 mm dickem Aluminiumblech verschlossen werden. Die Bacterienculturen bereiteten wir zunächst nach folgendem, vielfach angewandten Verfahren: In verflüssigtem Nähragar wurden Keime in grosser Menge möglichst gleichmässig suspendirt, und dann die Nährflüssigkeit auf eine niedrige Glasschale von ca. 9 cm Durchmesser (sogenannte Petrischale) ausgegossen; dort liess man sie abkühlen und erstarren. Ein darüber gelegter Glasdeckel verhinderte den Zutritt fremder Keime.

Nach Buchner[1]) verfährt man nun zum Nachweis der bactericiden Wirkung der *Lichtstrahlen* folgendermaassen: Auf die äussere Glaswand der Schale werden lichtundurchlässige Marken, z. B. Buchstaben aus schwarzem Papier oder Metallblech aufgeklebt, und das Ganze etwa 1 bis 2 Stunden lang dem Sonnenlichte ausgesetzt. Wo dieses letztere die Keime trifft, werden dieselben getötet. Eine Entwickelung tritt daher ausschliesslich an den lichtgeschützten Stellen ein, sodass nach 1 bis 2 Tagen ein deutliches, scharf begrenztes Bild der schattengebenden Körper erscheint. An den Punkten, zu welchen das Licht gelangen konnte, zeigt sich dann die Agarplatte ebenso klar durchsichtig, wie zuvor; unterhalb der Marken dagegen ist der Nährboden mit rot gefärbten Colonien üppig durchwachsen.

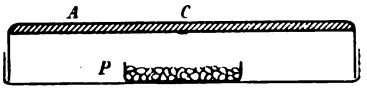
Um eine etwaige Wirkung der Becquerelstrahlen festzustellen, verfuhren wir in ganz analoger Weise: Der Glasdeckel der Petrischale wurde mit einer grossen, 1 cm dicken Bleiplatte bedeckt, welche in der Mitte einen kreisförmigen Ausschnitt von 25 mm Durchmesser besass. Ueber diese Oeffnung wurde das active Präparat mit nach unten gekehrtem Aluminiumdeckel gelegt. So wurde nur der Teil der Agarschicht, welcher sich unterhalb der Oeffnung des Bleidiaphragmas befand, von den Becquerelstrahlen, die das Präparat aussandte, getroffen. Wenn also diese Strahlen ähnlich wirkten wie Licht,

1) H. Buchner, Centralblatt f. Bacteriol. **11.** p. 781. 1892; **12.** p. 217. 1893.

so war zu erwarten, dass in der centralen Partie der Agarplatte das Wachstum der Bacterien gehemmt würde, bez. eine Abtötung der Zellen erfolgte, während sich an den übrigen Stellen die Colonien ungeschwächt entwickeln müssten. Der Versuch ergab aber jedesmal ein völlig negatives Resultat: unterschiedslos zeigte die ganze Platte ein gleichmässig energisches Wachstum. Die Becquerelstrahlen erwiesen sich also in der bisher benutzten Versuchsanordnung als völlig wirkungslos.

Nun ist aber bekanntlich die Gesamtemission eines Radiumpräparates durchaus nicht homogen; vielmehr kann man im wesentlichen zwei verschiedene Gruppen von Strahlen unterscheiden, von denen die einen nur sehr schwach, die anderen in sehr erheblichem Maasse beim Durchgang durch beliebige Medien absorbirt werden.[1]) In unseren bisherigen Versuchen haben nur die ersteren ihre Wirksamkeit entfalten können, weil nur sie im stande waren, den das Präparat verschliessenden Deckel zu durchdringen; der andere Teil der Becquerelstrahlen wurde dagegen von dem Aluminiumblech zurückgehalten.

Um auch die Wirksamkeit dieser leicht absorbirbaren Strahlenart auf Bacterien zu prüfen, wählten wir die folgende Versuchsanordnung: Der Nähragar *A* (vgl. Fig.) wurde in die Petrischale gegossen, ohne zuvor mit Keimen inficirt worden zu sein und nach dem Erkalten im Centrum *C* oberflächlich mit Prodigiosuskeimen geimpft. Dann wurde die Schale umgedreht und das radioactive Präparat *P*, nachdem es von seinem Deckel befreit war, unmittelbar unter der Bacteriencolonie *C* innerhalb des Glasgefässes aufgestellt. In dieser Weise wurde eine grössere Anzahl von Versuchen ausgeführt, bei denen die Expositionsdauer zwischen 2 und 4 Stunden, die Distanz des Präparates *P* von *C* zwischen 4 und 10 mm variirte. In allen Fällen ergab sich als Resultat, dass die bestrahlten Bacterien in ihrer Entwickelung völlig gehemmt wurden, während jedesmal auf einer gleichzeitig in der näm-




1) Vgl. H. Becquerel und P. u. S. Curie, Rapports prés. au congrès international de physique 3. p. 47 u. 79. Paris 1900.

lichen Weise präparirten Controlplatte, welche der Wirkung der Strahlen entzogen blieb, das Wachstum keinerlei Störung erfuhr. Auf der Controlplatte war also nach einem Tage das Centrum kräftig rot weiter entwickelt, und von hier aus hatte sich das Wachstum in dünner Schicht fast über die ganze Oberfläche der Agarschicht ausgebreitet; die bestrahlte Platte dagegen hatte ihr ursprüngliches Aussehen nicht verändert. Die Entwickelungshemmung blieb aber wiederum gänzlich aus, wenn wir, ohne im übrigen die zuletzt beschriebene Versuchsanordnung zu verändern, das Präparat mit seinem dünnen Aluminiumdeckel verschlossen. Ebensowenig war eine Wirkung zu bemerken, als wir unser Präparat durch ein gleich grosses Quantum inactiven Baryumbromids ersetzten. Es konnte mithin der beobachtete Effect, wenn er überhaupt den Becquerelstrahlen zuzuschreiben war, nur durch den stark absorbirbaren Anteil derselben hervorgerufen worden sein.

Die Radioactivität einer Substanz, wie des von uns benutzten Brombaryums, giebt sich aber nicht nur durch die Emission von Becquerelstrahlen zu erkennen, sondern bringt noch eine Reihe anderer Zustandsänderungen in dem umgebenden Raume hervor. Die Luft, die das Präparat umspült, erlangt die Fähigkeit, in anderen Körpern Activität zu erzeugen[1]); sie wird ferner von den Strahlen selbst ionisirt; schliesslich entweicht dem Baryumsalze eine geringe Menge Brom.[2]) Durch besondere Versuche überzeugten wir uns[3]), dass es keine von diesen Zustandsänderungen war, welche die beobachtete Wirkung auf die Bacterien hervorrief. Wir halten es daher für erwiesen, dass die stark absorbirbaren Becquerelstrahlen selbst einen entwickelungshemmenden Einfluss auf Bacterien ausüben.

Wenn wir unser Präparat mit einem Blatt Aluminiumfolie von 0,001 mm Dicke bedeckt hielten, so trat die schädigende Wirkung der Strahlen noch sehr deutlich zu Tage,

1) E. Rutherford, Phil. Mag. **49.** p. 1 u. 161. 1900; P. Curie u. A. Debierne, Compt. rend. **132.** p. 548 u. 768. 1901.

2) F. Giesel, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. **2.** p. 8. 1900; vgl. auch P. u. S. Curie, l. c.

3) Ueber die Einzelheiten dieser Versuche vgl. unsere eingangs citirte ausführliche Mitteilung.

wenn auch unverkennbar schwächer als zuvor. Die Strahlen werden also von einer so ausserordentlich dünnen Metallschicht bereits etwas absorbirt, zum grossen Teil aber noch hindurchgelassen. Diese Beobachtung stimmt mit den Angaben von Hrn. und Frau Curie vollkommen überein.[1]) Andererseits sind nach den Beobachtungen derselben Autoren jene Strahlen nicht im stande, Luftschichten von mehr als einigen Centimetern Dicke zu durchsetzen. Dementsprechend entwickelten sich bei einem weiteren Versuche die Bacterien ungeschwächt, als der Abstand unserer Strahlungsquelle von der Agarschicht 6 cm betrug.

Aus unseren Untersuchungen geht somit hervor, dass die beiden auf physikalischem Wege deutlich unterscheidbaren Arten der Becquerelstrahlen auch in ihrer Wirkung auf die lebende Substanz tiefgreifende Differenzen zeigen. Es ergänzt und bestätigt also auch hier das physiologische Experiment die physikalische Beobachtung.

Berlin, Tierphysiol. Inst. d. Landwirtschaftl. Hochschule, Juni 1901.

1) P. u. S. Curie, l. c.

(Eingegangen 1. August 1901.)

## 10. *Ueber zwei einfache Methoden, Refractometerkreise zu calibriren;* *von V. H. Veley und J. J. Manley.*

Refractometerkreise sind bei Untersuchungen und Analysen in gewöhnlichem Gebrauch, und dennoch, wie es scheint, wird eine andere Calibrirung als die des Instrumentenmachers selten unternommen, auch werden einfache Methoden dazu in den Lehrbüchern der physikalischen Wissenschaft nicht beschrieben.

Fehler der Instrumente können auf die Werte einer Beobachtung über Brechungsindices in der fünften oder sechsten Decimalstelle eine Wirkung haben, selbst wenn andere Bedingungen, wie die Temperatur, constant bleiben.

Während einer Arbeit über die Brechungsindices der Salpetersäure von verschiedenen Concentrationen haben wir von zwei einfachen Methoden Gebrauch gemacht, und glauben, dass eine Beschreibung derselben anderen Forschern nützlich sein könnte.

Die gewöhnliche Methode, astronomische Kreise zu calibriren, wurde ursprünglich von Bessel[1]) erfunden und später von Mauvais[2]) ausgebildet; dabei wird der Wert jedes Grades oder eines Teiles davon durch verschiebbare Mikroskope, mit Mikrometerschrauben versehen, festgesetzt; letztere werden dann mit einer Normalschraube verglichen. Unsere zwei Methoden können 1. als eine zweifache Fernrohrreflexion und 2. als eine zweifache Bleilotmethode beschrieben werden.

Das eigentliche Instrument, von dem wir Gebrauch gemacht haben, wurde vor einigen Jahren von Becker, Mayerstein's Nachfolger, gemacht, und glich jenem, welches von Willigen[3]) völlig beschrieben hat. Die Teilung des Kreises, von 27 cm Durchmesser, giebt ein Zehntel Minuten an und wird mittels zwei verschiebbarer Mikroskope abgelesen; diese sind mit Mikrometerschrauben versehen, von welchen drei Umdrehungen mit je einer Abteilung der Scala übereinstimmen.

1) F. W. Bessel, Astronomische Nachrichten 21. p. 3. 1844.

2) V. Mauvais, Compt. rend. 37. p. 677. 1853.

3) von Willigen, Archives Musée Teyler 1. p. 79. 1868 und 2. p. 238. 1869.

Da der Kopf jeder Mikrometerschraube in 60 Teile abgeteilt ist, so kann der Beobachter mit Genauigkeit bis zu 2″ lesen. Zuerst wurde jeder Schraubenkopf willkürlich in drei Teile abgeteilt, dann wurde eine gewählte Abteilung bei einer constanten Temperatur durch jeden Teil der beiden Schrauben gemessen; es bestand zwischen den beiden eine constante Differenz von 4″, auf welche eine Temperaturänderung von 9—20° C. keine Wirkung hatte.

Da in den meisten Bestimmungen von Brechungsindices gewöhnlich ein Winkel von nicht mehr als 30° hinreichend ist, so wurde dieser als bequemer Bruchteil des ganzen Kreises angenommen; ein solcher Winkel, d. i. 150—180°, wurde als Normale zu Vergleichungen der weiteren Bruchteile gebraucht.

Eine Beschreibung unserer Methoden folgt, wobei die Mikrometerschrauben mit den Ziffern I und II bezeichnet werden.

### Erste oder zweifache Fernrohrmethode.

Der abgeteilte Kreis wurde zuerst an die bereits von Mikrometer I abgelesene Abteilungslinie 150° der Scala geklemmt; ein Spiegel *m* (vgl. Fig. 1), gebildet durch Versilbern und Poliren einer optisch flachen Glasfläche, wurde an der Prismentafel in solcher Weise angebracht, dass die reflectirende Fläche sich unmittelbar über der centralen und senkrechten Axe des Refractometers befand. Ein Fernrohr *A* auf massivem und festem Stativ trug eine kleine Platte *p*, auf deren Vorderfläche feine gekreuzte Linien gezogen waren.

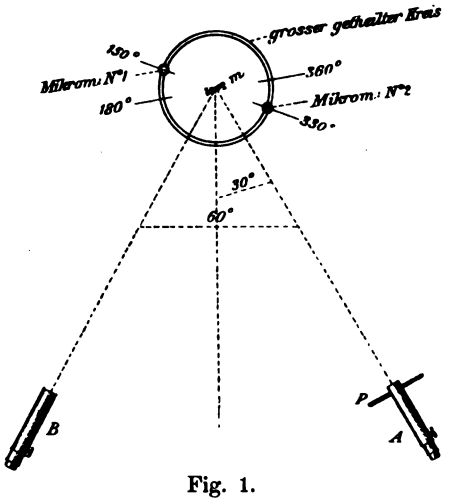



Fig. 1.

Das Ganze wurde in einer Entfernung von ungefähr 1,5 m vom Spiegel aufgesetzt, letzterer wurde dann gewendet und

justirt, bis das reflectirte Bild der gekreuzten Linien mit dem Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes im Fernrohr coincidirte, indem die weitere Einstellung durch die Mikrometerschrauben bewerkstelligt wurde. Darauf wurde der abgeteilte Kreis mit der Prismatafel um 30° gedreht, d. h. bis an die Linie 180°. Ein zweites Fernrohr *B* wurde aufgesetzt und eingestellt, bis der Durchschnittspunkt seines Fadenkreuzes mit dem Bilde der gekreuzten Linien coincidirte. Der Winkel, eingeschlossen von den beiden Axen der beiden Fernröhre, war also zweimal so gross, wie der Normalwinkel. Die Prismatafel wurde dann abgeklemmt, zurückgewendet und justirt, bis das reflectirte Bild der gekreuzten Linien mit dem Fadenkreuze im Fernrohr *A* coincidirte; die Tafel wurde dann dem abgeteilten Kreise wieder angeklemmt und das Ganze umgedreht bis an die durch das Mikrometer I abgelesene Linie 210°.

Wenn also dieser zweite Winkel 180—210° dem Normalwinkel 150—180° gleich ist, so wird das Bild der gekreuzten Linien mit dem Fadenkreuze vom Fernrohr *B* coincidiren; jede Abweichung wird leicht bestimmt, wenn man den abgeteilten Kreis mit dem Spiegel justirt und die winkelige Verschiebung mittels der Mikrometerschraube misst.

### Zweite oder Bleilotmethode.

Bei dieser Methode wurde das Refractometer fest aufgesetzt, sodass der Mittelpunkt *a* (vgl. Fig. 2) seines abgeteilten Kreises 4,53 m von einer der Wände eines Zimmers entfernt war. Zwei Bleilote wurden bereitet, indem man Bleikugeln von ungefähr 1,6 cm Durchmesser an geschwärzte Fasern von roher Seide anbrachte; die Kugeln wurden von oben an festen Stützen an der Wand aufgehängt und in Gefässe von Colzaöl versenkt, um alle Oscillationen zu hemmen. Der abgeteile Kreis wurde bis an die Scalenlinie 150° (Mikrometer I) umgedreht, auch wurde das Refractometerfernrohr gedreht, bis die Axe mit der Linie *a b* einen Winkel von annähernd 15° bildete; darauf wurde das Fernrohr dem Kreise angeklemmt.

Das Bleilot *P* wurde dann so aufgehängt, dass sein Bild beinahe mit dem Fadenkreuze des Fernrohres coincidirte,

indem die Mikrometerschraube des letzteren gedreht wurde, um genaue Coincidirung zu erlangen, ohne Verschiebung des geteilten Kreises. Der Kreis wurde darauf abgeklemmt, samt Fernrohr gedreht, wieder geklemmt und justirt bis an die Linie 180°. Die Axe des Fernrohres ist also durch den Normalwinkel 150—180° gedreht worden, und ihre neue Stellung ist durch punktirte Linien auf der Skizze bezeichnet.

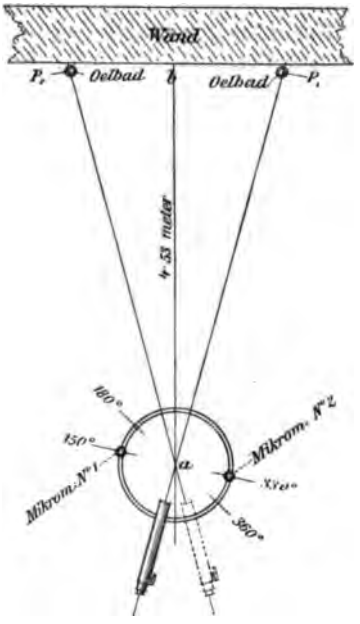


Fig. 2.

Das Bleilot $P^2$ wurde alsdann aufgehängt und justirt, bis sein Bild mit dem Fadenkreuze im Fernrohr coincidirte. Um den Winkel 180—210° mit dem Normalwinkel zu vergleichen, wurde das Fernrohr allein abgeklemmt, zurückgewendet, wieder geklemmt und wieder auf genaue Coincidirung für $P_1$ justirt; das Ganze wurde umgedreht, wie vorher, und für $P^2$ justirt, indem die kleinen Differenzen mittels der Mikrometerschraube bestimmt wurden. Der ganze Refractometerkreis wurde nach den beiden Methoden calibrirt mit Gebrauch der beiden Mikrometerschrauben I und II.

Die Werte, die wir mit beiden Methoden erhalten haben, folgen tabellarisch zusammengestellt mit der Gesamtzahl der Differenzen und ihrer Mittelwerte.

Aus der letzten Columne, in welcher die Terminalmittelwerte angegeben sind, sieht man, dass der grösste Fehler $\pm$ 1 in 4154 ist und der kleinste 1 in 18000.

Die Fehler der kleinsten Abteilung des Normalwinkels 150—180° und des entsprechenden Winkels 330—360° wurden später mittels der beiden Mikrometerschrauben und grundsätzlich nach der Bessel'schen Methode bestimmt.

| Scala | Methode I | | | Methode II | | | Mittelwerte der Gesamtzahlen der Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Diff vom Normalmikrometer | | Gesamtzahl der Diff. | Diff. vom Normalmikrometer | | Gesamtzahl der Diff. | |
| | Nr. 1 | Nr. 2 | | Nr. 1 | Nr. 2 | | |
| 60) 0— 30° | +20″ | −40″ | −20″ | +36″ | −42″ | − 6″ | −26″ |
| 30— 60 | +30 | −20 | +10 | +28 | −18 | +10 | +20 |
| 60— 90 | ± 0 | ± 0 | — | +12 | −22 | −10 | −10 |
| 90—120 | ± 0 | ± 0 | — | ± 0 | − 8 | − 8 | − 8 |
| 120—150 | ± 0 | ± 0 | — | ± 0 | − 8 | − 8 | − 8 |
| 150—180 | Stand: | Stand: | — | Stand: | Stand: | — | — |
| 180—210 | ± 0 | ± 0 | — | + 8 | ± 0 | + 8 | + 8 |
| 210—240 | +40 | −40 | — | +12 | −12 | — | — |
| 240—270 | +40 | −40 | — | + 6 | ± 0 | + 6 | − 6 |
| 270—300 | +60 | −60 | — | +12 | − 4 | + 8 | + 8 |
| 300—330 | +30 | −40 | −10 | +36 | −16 | +20 | +10 |
| 330—360 | +70 | −60 | +10 | +12 | −28 | −16 | − 6 |
| | | Total | −10″ | | Total | +4″ | − 6″ |

Oxford, Universität, 10. August 1901.

(Eingegangen 17. August 1901.)

## 11. *Ueber die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effectverlustes im Eisen von der Stärke der Magnetisirung; von H. Maurach.*

Vorliegende Arbeit stellt sich zur Aufgabe zu untersuchen, ob die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effectverlustes im Eisen von dem magnetischen Momente desselben mittels der Steinmetz'schen Formel:

$$V = y \,.\, M_1^{1,6}\ ^{1})$$

im ganzen Bereiche herstellbarer magnetisirender Kräfte dargestellt werden kann, oder ob der Exponent — er heisse $x$ — einen von der Grösse der magnetisirenden Kraft bez. des magnetischen Momentes abhängigen Wert hat. Im vorstehenden Ausdrucke bezeichnet $V$ den Effectverlust, $y$ eine von der Art des Materiales abhängige Constante und $M_1$ das magnetische Moment der Volumeneinheit. Für Durchführung der Versuche wurde ein Wechselstrom-Ringtransformator von nachstehenden Hauptdaten gewählt:

| | |
|---|---|
| Mittlerer Radius $R$ des Eisenringes . . . . . | 13,1 cm |
| Querschnitt $f$ des Eisenringes . . . . . | 82 qcm |
| Volumen $W$ des Eisenringes . . . . . | 6700 ccm |
| Anzahl $N_1$ der Primärwindungen . . . . . | 720 |
| Anzahl $N_2$ der Secundärwindungen . . . . . | 80 |
| Widerstand $w_1$ der Kupferdrahtwindungen im Primärkreis | 1,901 Ω |
| Widerstand $w_2$ der Kupferdrahtwindungen im Secundärkreis | 0,028 Ω |

Zur Anwendung gelangte die ballistische Methode, bei welcher bekanntlich jede Aenderung des magnetischen Momentes in dem zu untersuchenden Eisenkörper durch Messung des elektrischen Stromes bestimmt wird, der in der inducirten Drahtspule auftritt. Aendert sich nämlich die Stärke des

1) Der Zusammenhang zwischen dem magnetischen Moment und dem Begriffe „Kraftlinienanzahl", beide auf die Einheit bezogen, ist bekanntlich durch die Beziehung $\mathfrak{B} = 4\pi M_1$ gegeben, worin $\mathfrak{B}$ die Kraftlinienanzahl bedeutet.

magnetischen Momentes, so wird während der Dauer der Aenderung ein Strom erzeugt, dessen ganze Elektricitätsmenge

$$\int_0^t j\,dt$$

dieser Aenderung proportional ist. Liegt, wie bei unserem Transformator der zu magnetisirende Eisenkörper in einer Drahtspule, so sind plötzliche Aenderungen des Magnetismus dadurch hervorzubringen, dass man einen magnetisirenden Strom wirken lässt und ihn stufenweise steigert oder vermindert. Zwecks Durchführung der Versuche wurde der Ringtransformator mit seinen Secundärwindungen, welche als inducirende Stromwindungen verwandt wurden, an eine Accumulatorenbatterie angeschlossen und die zur Durchführung des magnetischen Kreisprocesses erforderliche Aenderung der Stromstärke durch regulirbare Rheostaten erzielt, während die Stromstärke durch eine Tangentenbussole gemessen und die Unterbrechung des Stromkreises durch einen Momentschalter bewirkt wurde.

Mit seinen Primärwindungen, welche als Inductionsspule dienten, war der Transformator mit einem, mit Nebenschluss versehenen ballistischen Galvanometer und mit einer zur Aichung des Galvanometers miterforderlichen Drahtspule $S_1$ verbunden. Die Form der Magnetisirungscurve ist nun durch Beobachtung aller der Ausschläge gegeben, welche die einzelnen schwachen, mit der Tangentenbussole zu messenden Magnetisirungsströme am Galvanometer bewirken und ist der ganze in irgend einem Stadium vorhandene Magnetismus durch die Summe aller vorangegangenen Galvanometerausschläge bestimmt. Unter der Annahme, dass die Magnetisirungsspule $N_2$ gleichmässig über den ganzen Eisenring gewickelt ist, sodass ihre Wirkung in jedem Ringquerschnitte dieselbe ist, ist der absolute Wert der magnetisirenden Kraft $H$ des Eisenringes durch die Gleichung gegeben:

$$H = \frac{4\pi N_2 . i}{2\pi R} = \frac{2 N_2 . i}{R},$$

$$H = \frac{2 N_2}{10 R} . i^{\text{Amp.}} = \frac{2.80}{131} . i^{\text{Amp.}} = 1{,}22137 . i^{\text{Amp.}}$$

im vorliegenden Falle.

Der absolute Wert des magnetischen Momentes pro Cubikcentimeter $M_1$ des Eisenringes ermittelt sich, wie folgt:

Bezeichnet man mit $e = j \cdot w_1'$ die inducirte elektromotorische Kraft, mit $dt$ das unendlich kleine Zeitintervall, mit $M = M_1 \cdot W$ das magnetische Moment und mit $l$ die mittlere Länge des Eisenringes, so ergiebt sich:

$$e = j \cdot w_1' = -\frac{d}{dt}\left[M \cdot \frac{4\pi N_1}{l}\right] = -\frac{d}{dt}\left[M_1 \cdot W \cdot \frac{4\pi N_1}{l}\right]$$

$$= -\frac{d}{dt}[M_1 \cdot f \cdot 4\pi N_1].$$

Vorstehenden Ausdruck integrirt, liefert:

$$w_1' \int_{t_1}^{t_2} j\,dt = -4\pi N_1 f\,[M_1(t_2) - M_1(t_1)],$$

$$\int_{t_1}^{t_2} j\,dt = +\frac{1}{w_1'} \cdot 4\pi N_1 f \cdot M_1,$$

indem für den Moment $t_2$ die inducirte Stromstärke und damit auch $M_1$ den Wert Null hat.

Wird mit $G$ die Galvanometerconstante und mit $u$ der Ablenkungswinkel des Magneten des Galvanometers bezeichnet, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\text{(I)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} j\,dt = G \cdot \sin\frac{u}{2} = \frac{1}{w_1'} \cdot 4\pi N_1 \cdot M_1 f.$$

Zur Elimination der im vorstehenden Ausdruck ausser $M_1$ unbekannten „Galvanometerconstanten" $G$ wurde unter Zuhülfenahme einer zweiten, $S_1$ gleichartigen Spule $S_2$ eine zweite Messung vorgenommen, indem unter Weglassung des Transformators die Spule $S_2$ in den inducirenden Stromkreis und in den inducirten Stromkreis ausser der in demselben bereits vorhandenen Spule $S_1$ ein Widerstand von gleicher Grösse wie der Widerstand der Primärwicklung $N_1$ des Transformators eingeschaltet wurde. Beide Spulen $S_1$ und $S_2$ wurden in

derselben verticalen Axenrichtung in gewisser Distanz aufgestellt, während im übrigen die Messungsanordnung wie zuvor blieb. Durch die so getroffene Anordnung blieb der Widerstand des inducirten Stromkreises gegenüber der ersten Messungsanordnung unverändert. Wird nunmehr die bei der zweiten Messungsanordnung im Inductionsstromkreise erzeugte elektromotorische Kraft mit $e'$ benannt, so resultirt:

$$e' = j' \,.\, w_1' = - L \frac{dj'}{dt} - P \cdot \frac{di'}{dt},$$

in welchem Ausdruck $L$ das Selbstpotential der Spule $S_1$ im Inductionsstromkreise, $P$ das gegenseitige Potential des Spulenpaares $S_1/S_2$, $i'$ die inducirende Stromstärke und $j'$ die inducirte Stromtärke bedeuten. Die Integration liefert:

$$\int_{t_1}^{t_2} j' w_1' \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left( L \frac{dj'}{dt} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left( P \frac{di'}{dt} \right) dt,$$

$$w_1' \int_{t_1}^{t_2} j' \, dt = - L [j']_{t_1}^{t_2} - P [i']_{t_1}^{t_2}.$$

Die inducirende Stromstärke $i'$ hat zur Zeit $t_1$ den Wert der von der Accumulatorenbatterie abgegebenen Stromstärke $J$, während sie zur Zeit $t_2$ die Grösse Null hat. Die inducirte Stromstärke $j'$ hat zur Zeit $t_1$ wie zur Zeit $t_2$ den Wert Null, sodass das Glied $L [j']_{t_1}^{t_2}$ auch diesen Wert hat.

Folglich ergiebt sich:

$$w_1' \int_{t_1}^{t_2} j' \, dt = - P [i']_{t_1}^{t_2} = + P \,.\, J,$$

oder:

$$\text{(II)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} j' \, dt = \frac{P \,.\, J}{w_1'} = G \,.\, \sin \frac{u'}{2}$$

nach früherem.

Die Division dieser Gleichung mit Gleichung (I) liefert:

$$\frac{\sin\frac{u'}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{P.J}{4\pi f.N_1.M_1},$$

woraus für $M_1$ folgt:

$$(III) \qquad M_1 = \frac{P.J}{4\pi f.N_1} \cdot \frac{\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{u'}{2}}.$$

In Gleichung (III) sind alle Grössen zur Bestimmung des absoluten Wertes des magnetischen Momentes pro Volumeneinheit $M_1$ bekannt, da ausser den direct gegebenen und zu messenden Grössen $f$ und $N_1$ bez. $J$, $u$ und $u'$ der absolute Wert des gegenseitigen Potentiales $P$ des Spulenpaares $S_1/S_2$ zu $0{,}477 . 10^8$ berechnet wurde. Um den magnetischen Kreisprocess durchzuführen, hat man in jedem einzelnen Falle die magnetisirende Kraft $H$ von dem Anfangswerte $H = 0$ bis zu einem positiven Maximum $+H$ ansteigen zu lassen, dann dieselbe wieder auf Null zurück- und unter Richtungswechsel bis zu einem negativen Maximum $-H$ fort-, demnächst wieder auf Null zurück- und endlich unter nochmaliger Richtungswendung bis zum positiven Maximum zurückzuführen. Beide Magnetisirungscurven umschliessen eine bestimmte Fläche, deren Grösse $\int H . dM_1$ ein Maass für die Energievergeudung bildet, die während des Cyklus infolge der Hysteresis verbraucht wird.

Die Bestimmung des Exponenten $x$ der Gleichung:

$$V = y . M_1^x$$

vollzieht sich nun, wie folgt:

Vergleicht man zwei, durch den cyklischen Magnetisirungsprocess erhaltene, die Energieverluste $V$ bez. $V'$ darstellende Flächen, bei denen die Werte der maximalen Momente $M_1$ bez. $M_1'$ in engen Grenzen liegen, so erhält man den Exponenten $x$ durch Division der Gleichungen

$$V = y . M_1^x \quad \text{und} \quad V' = y . M_1'^x,$$

indem resultirt:

$$\frac{V'}{V} = \left[\frac{M_1'}{M_1}\right]^x \quad \text{und daraus} \quad x = \frac{\log V' - \log V}{\log M_1' - \log M_1}.$$

Im vorstehenden Ausdrucke für $x$ sind alle Grössen bekannt, da die Werte von $V'$ bez. $V$ durch Ausmessung der entsprechenden Flächen und die Werte von $M_1'$ bez. $M_1$ durch Rechnung nach früherem zu bestimmen sind.

Das Aequivalent der durch cyklischen Wechsel bedingten Arbeit ist Wärme. Aus diesem Grunde wird die Eisenmasse warm, wenn die Magnetisirung derselben irgend einer Aenderung unterworfen wird. Ausser der Erwärmung durch Hysteresis erfährt das Eisen noch eine Temperaturerhöhung durch die Wirbelströme, die jedoch nicht merklich in Betracht kommen, wenn wie im vorliegenden Falle das Eisen genügend fein unterteilt ist.

Zwecks Bestimmung der Temperaturerhöhung, welche das Eisen durch eine cyklische Magnetisirung erfährt, ist der Wert $\int H.dM_1$ in Wärmeeinheiten auszudrücken und durch die Dichte sowie die specifische Wärme des Eisens zu dividiren. Der Arbeitswert einer Grammcalorie ist 42 000 000 absolute Arbeitseinheiten, die Dichte des im vorliegenden Falle verwendeten Transformatoreisens betrug 7,76, die specifische Wärme desselben 0,11. Demnach ist die durch einen magnetischen Kreisprocess infolge von Hysteresis erzeugte Temperaturerhöhung:

$$\frac{\int H\,dM_1}{42000000 \,.\, 7{,}76 \,.\, 0{,}11} = 2{,}79 \,.\, 10^{-8} \int H\,dM_1 \text{ Grad.}$$

In nachfolgender Tabelle sind die Resultate aller durchgeführten cyklischen Magnetisirungen des Transformatoreisens zusammengestellt.

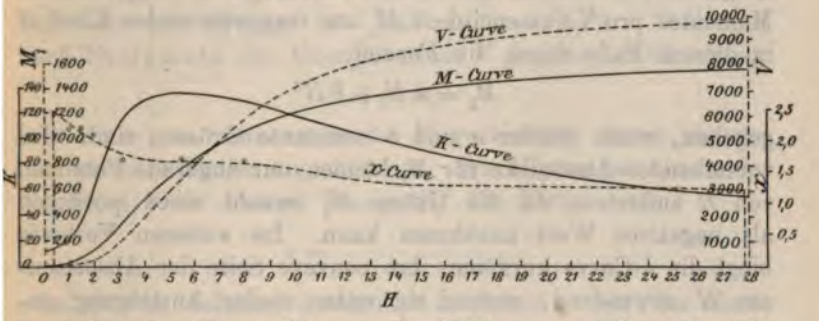
In derselben bedeuten $H$ und $M_1$ die absoluten Grenzwerte der magnetisirenden Kraft bez. des magnetischen Momentes pro Volumeneinheit, $k = M_1 / H$ das Verhältnis jener Grenzwerte, $V$ die während eines Kreisprocesses verbrauchte Energie in absoluten Einheiten und $x$ den Exponenten der Gleichung:

$$V = y \,.\, M_1^x.$$

| $H$ | $M_1$ | $K$ | $V$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,3095 | 4,7801 | 15,44 | 0,120 | 2,47 |
| 0,4007 | 6,5059 | 16,24 | 0,257 | |
| 0,9243 | 17,2834 | 19,24 | 5,52 | 2,17 |
| 1,1626 | 27,7797 | 23,89 | 15,43 | |
| 1,3960 | 50,0068 | 35,82 | 29,35 | 2,16 |
| 1,6622 | 78,1337 | 47,01 | 76,81 | 2,06 |
| 2,0468 | 123,5062 | 60,34 | 197,24 | |
| 2,6038 | 237,7948 | 91,33 | 504,5 | 1,94 |
| 3,1091 | 356,6727 | 114,69 | 1107,7 | |
| 3,3901 | 421,0642 | 124,19 | 1282,0 | 1,72 |
| 4,7250 | 646,7972 | 136,89 | 2685,0 | |
| 5,2250 | 720,2930 | 137,85 | 3095,0 | 1,68 |
| 5,7490 | 798,3960 | 138,85 | 3681,0 | |
| 6,9501 | 950,3564 | 136,73 | 4768,0 | 1,67 |
| 7,5151 | 1007,8141 | 134,10 | 5262,0 | 1,63 |
| 8,0774 | 1081,9256 | 133,99 | 5908,0 | 1,66 |
| 8,9580 | 1164,8976 | 130,03 | 6683,0 | 1,46 |
| 10,0012 | 1238,6120 | 123,83 | 7195,0 | 1,44 |
| 11,1172 | 1288,3640 | 115,89 | 7615,0 | |
| 11,6862 | 1316,6386 | 112,67 | 7870,0 | 1,33 |
| 12,9101 | 1355,7063 | 105,01 | 8162,0 | |
| 13,2797 | 1361,1741 | 102,49 | 8194,0 | 1,34 |
| 14,0630 | 1382,0605 | 98,29 | 8304,0 | 1,36 |
| 16,6760 | 1434,8198 | 85,70 | 8809,0 | 1,22 |
| 18,3635 | 1449,7071 | 78,94 | 8926,0 | |
| 21,6333 | 1500,5357 | 69,36 | 9349,0 | 1,22 |
| 25,4402 | 1538,5325 | 60,48 | 9645,0 | |
| 27,7885 | 1567,1104 | 56,39 | 9817,0 | |

Die Tabelle findet ihren graphischen Ausdruck in umseitig stehender Figur. Die Curve des magnetischen Momentes pro Volumeneinheit $M_1$ besteht, wie aus der Figur ersichtlich, im wesentlichen aus 4 Teilen. Sie beginnt langsam ansteigend mit dem Teile zwischen den magnetischen Kräften $H=0{,}3095$ und $H=2{,}8$. Dieser Teil der Curve kehrt seine convexe Seite der Abscissenaxe $H$ zu. Hieran reiht sich ein annähernd

geradliniges Stück der Curve bis zur Kraft $H = 6{,}2$. Von dieser Stelle an ist die Curve nicht mehr geradlinig, sie ist weniger steil als vorher und kehrt gleichzeitig ihre concave Seite der Abscissenaxe $H$ zu. Im vierten Teil der Curve, etwa bei einer magnetisirenden Kraft $H = 16{,}3$ beginnend, geht die Curve in eine schwach ansteigende, annähernd gerade Linie über. Die graphische Darstellung zeigt, dass die Magnetisirung anfangs schneller als die magnetisirende Kraft $H$ wächst, darauf der magnetisirenden Kraft nahezu proportional ist und mit weiter zunehmender magnetisirender Kraft nur noch langsam steigt, ohne jedoch einen bestimmten Grenzwert




zu erlangen. Dieser Grenz- oder Sättigungswert konnte nicht mit der angewandten Untersuchungsmethode erzielt werden, weil die unter Anwendung starker magnetisirender Kräfte eintretende starke Erwärmung der inducirenden Stromwindungen des Transformators der Isolation seiner einzelnen Teile schädlich geworden wäre.

Der complicirte Charakter der Magnetisirungscurve macht es schwierig, den Zusammenhang zwischen der magnetisirenden Kraft $H$ und dem magnetischen Momente der Volumeneinheit $M_1$ analytisch darzustellen. Dieser Zusammenhang kann nur durch die Exponentialgleichung

$$M_1 = A e^{\alpha H} + B e^{\beta H} + C e^{\gamma H}$$

gefunden werden, in welcher Gleichung $A$, $B$ und $C$, sowohl wie $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ constante Grössen und $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeuten. Beschränkt man sich auf mittlere Werte der magnetisirenden Kraft $H$, so kann die Lamont'sche Formel:

$$M_1 = \frac{H}{a + b H}$$

Anwendung finden, in welchem Ausdrucke $a$ und $b$ gleichfalls constante Grössen sind, die ebenso wie jene der Vorgleichung von den physikalischen und chemischen Eigenschaften des Eisens abhängig sind.

In der Figur sind noch die Werte von der Susceptibilität $k$ als Function von $H$ aufgetragen. Die Curve von der Grösse $k$ ist von Beginn an bis zur Kraft $H$ gleich ca. 1,0 mit grosser Annäherung eine gerade Linie. Die Grösse $k = M_1/H$ kann für schwache Kräfte durch die Formel:

$$k = a + b H^2$$

dargestellt werden und ist die Beziehung des magnetischen Momentes pro Volumeneinheit $M_1$ zur magnetisirenden Kraft $H$ in diesem Falle durch die Formel:

$$M_1 = a H + b H^3$$

gegeben, worin wieder $a$ und $b$ constante Grössen sind. Im vorstehenden Ausdrucke für $M_1$ können nur ungerade Potenzen von $H$ auftreten, da die Grösse $M_1$ sowohl einen positiven als negativen Wert annehmen kann. Im weiteren Verlaufe biegt die $k$-Curve kurz um, ihre convexe Seite der Abscissenaxe $H$ zuwendend, worauf sie unter steiler Ansteigung annähernd die Form einer Geraden annimmt. Bei der Kraft $H$ gleich ca. 3,0 nimmt die $k$-Curve eine von der geraden Linie abweichende Form an, indem sie weniger steil wird und gleichzeitig ihre concave Seite der Abscissenaxe $H$ zukehrt. Bei dem Werte $H = 5{,}5$ erreicht die Grösse $k$ ihren maximalen Wert gleich ca. 139. Weiterhin fällt die Curve der Grösse $k$ beständig, jedoch immer ihre concave Seite der Abscissenaxe zukehrend bis zur Kraft $H$ gleich ca. 14,5, wo eine Wendestelle in der $k$-Curve eintritt, indem dieselbe bei weiterem Abfall nunmehr wieder, wie anfangs, ihre convexe Seite der Abscissenaxe $H$ zuwendet. Die als Function der magnetisirenden Kraft $H$ aufgetragenen Werte des Energieverlustes $V$ geben eine Curve, die in ihren anfänglichen und mittleren Stadien einen ähnlichen Verlauf wie die Curve des magnetischen Momentes pro Volumeneinheit $M_1$ zeigt, nur erkennt man leicht, dass der Energieverlust $V$ verhältnismässig viel schneller wächst als die Stärke der Magnetisirung. Die $V$-Curve steigt anfangs langsam an, ihre convexe Seite der Ab-

scissenaxe $H$ zukehrend. Von der Kraft $H = 2{,}2$ bis 8,0 steigt diese Curve steil an und zwar proportional der Abscissenänderung. Von $H = 8{,}0$ an nimmt die $V$-Curve einen weniger steilen Verlauf, dabei ihre concave Seite der Abscissenaxe zuwendend. $V$ erreicht anscheinend ein Maximum bei einer Kraft $H = 27{,}7$.

Die gleichfalls als Function der magnetisirenden Kraft $H$ aufgetragenen Werte des Exponenten $x$ der Gleichung

$$V = y \,.\, M_1^{\,x}$$

sind nicht, wie Steinmetz angiebt, von der Grösse $H$ bez. $M_1$ unabhängig. In unserem Falle bewegt sich der Wert von $x$ zwischen den Grenzen $x = 2{,}47$ und $x = 1{,}22$. Will man nach Steinmetz den Energieverlust $V$ gemäss der Gleichung:

$$V = y \,.\, M_1^{\,1{,}6}$$

bestimmen, so muss man die Magnetisirung durch kleinere und grössere Kräfte ausschliessen. Im allgemeinen kann der Exponent $x$ der Formel $V = y \,.\, M_1^{\,x}$ die Form

$$x = \frac{a}{1 + b\,H + c\,H^2}$$

erhalten, in welchem Ausdrucke $a$, $b$ und $c$ von der Natur des Materiales abhängige constante Grössen sind.

Wie aus der Figur ersichtlich, zeigt die $x$-Curve von Beginn an zunächst einen nach der Abscissenaxe $H$ zu etwas steil abfallenden Verlauf. Bei der Kraft $H$ gleich ca. 3,2 wird der Verlauf der Curve weniger steil, indem sie an dieser Stelle umbiegt und ihre schwache Neigung gegen die Abscissenaxe $H$ nahezu unverändert bis zur grössten, hier in Betracht kommenden magnetisirenden Kraft $H = 27{,}7885$ beibehält. —

(Eingegangen 16. September 1901.)

## 12. *Glossen zu der selbstthätigen Quecksilberluftpumpe; von Georg W. A. Kahlbaum.*

Vor 10 Jahren, am 21. September 1891, habe ich den in *Halle* versammelten Naturforschern zum ersten Male die selbstthätige Quecksilberpumpe[1]) vorgeführt, nachdem ich zwei Jahre früher in *Heidelberg* die von mir gebaute Handpumpe[2]) gezeigt hatte.

Da fast täglich neue Luftpumpen auftauchen und empfohlen werden, sei es erlaubt, kurz mitzuteilen, was unzählige nach allen Richtungen hin angestellte Versuche, und zehnjährige, fast täglich gesammelte Erfahrung an dieser alten gelehrt haben.

Die Pumpe arbeitet, das darf als bekannt vorausgesetzt werden, nach dem Sprengel'schen Princip, und mit nur einem Fallrohr.

Das Anwenden mehrerer Fallrohre erscheint nicht zweckdienlich. Der Apparat wird dadurch complicirt, ohne dass die Leistungsfähigkeit nennenswerth gesteigert wird. Allerdings findet bei Pumpen mit verkürztem Fallrohr eine solche Steigerung statt[3]); diese Pumpen bleiben aber in allen Fällen hinter denen mit langem Fallrohr zurück; sie sind also nur unter ganz bestimmten Bedingungen zu empfehlen.

Da alle für wissenschaftliche Zwecke bestimmten Pumpen — bis heute rund 150 — (die für die Technik bestimmten fallen fort) von mir persönlich geprüft wurden, bin ich in der Lage, über die Leistungsfähigkeit genaue Auskunft geben zu können. Als Mittel ergab sich für die 30 ersten physikalischen Pumpen: Rund 500 cm³ wurden evacuirt in

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Minuten | bis | auf | 0,5 | mm | Druck |
| 15 | „ | „ | „ | 0,000165 | „ | „ |
| 30 | „ | „ | „ | 0,000069 | „ | „ |

1) G. W. A. Kahlbaum, Wied. Ann. **53.** p. 199. 1894.

2) G. W. A. Kahlbaum, Zeitschr. f. physikal. u. chem. Unterricht. **8.** p. 90. 1894.

3) Vergl. H. Boas, Zeitschr. f. Instrumentenk. **16.** p. 146. 1896.

Da diese Zahlen Mittelwerte darstellen, die an 30 ohne Wahl herausgegriffenen Pumpen beobachtet wurden, so dürfen sie als ein ganz vorzügliches Resultat bezeichnet werden, sowohl was den erreichten Grad der Verdünnung, als was die aufgewendete Zeit betrifft.

Als Maassstab sei herangezogen, dass Neesen als bestes Resultat bei einem Vergleich seiner Kolben- mit seiner Tropf-(Sprengel-)Pumpe angiebt:

Kolbenpumpe in 17 Stunden auf 0,000079 mm
Tropfpumpe „ 5 „ „ 0,000091 „ [1])

Raps giebt an, dass er 400 $cm^3$ in 6 Minuten bis auf etwa 0,001 mm entleert habe.[2])

Kiss hat mit der Schuller'schen Pumpe bei 225 $cm^3$ Lumen in 15 Minuten 0,0135 mm Druck, in 30 Minuten 0,004 mm erreicht, und nach 2 Stunden die Maximalleistung von 0,00005 mm Druck.[3])

Donle[4]) erzielte bei der Hälfte unseres Rauminhaltes nach 2 Stunden das „Vacuum guter Röntgen-Röhren“[5]) und nach einer weiteren halben Stunde „eine Luftleere, sodass die Funkenentladung eines Ruhmkorff'schen Inductoriums (10 cm Schlagweite) nicht mehr durch die Röhre ging.“[5])

Beides wird bei unserer Anordnung etwa in 10 Minuten erreicht. Donle fügt hinzu, dass „in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Neesen etwa $^3/_4$ dieser Zeit nötig waren, um den Druck auf den Bruchteil des Millimeters zu vermindern.“[5])

Wir verwenden darauf, wie oben gezeigt, 3 Minuten Zeit.

F. und H. Schulze-Berge[6]) geben für ihre Rotationsluftpumpe keine genauen Zahlen an.

---

1) Neesen giebt die Grösse des von ihm evacuirten Raumes nicht an; da aber der Kugelinhalt seiner Kolbenpumpe 800 $cm^3$ betrug, dürfte dieselbe kaum mehr als 500 $cm^3$ betragen haben. Zeitschr. f. Instrumentenk. **15.** p. 277. 1895.

2) A. Raps, l. c. p. 150.

3) K. Kiss, l. c. p. 70.

4) W. Donle, l. c. **20.** p. 78. 1900.

5) l. c. p. 81.

6) F. u. H. Schulze-Berge, Wied. Ann. **50.** p. 368. 1893.

Es hat denn auch bei einer von Neesen im April 1899 vorgenommenen Prüfung[1]) bei 8 Concurrirenden in 3 von 4 Fällen unser Princip die besten Resultate ergeben, obgleich zum Teil unter für uns besonders ungünstigen Bedingungen — Fehlen eines Trockenrohres an unserer Pumpe — gearbeitet wurde.

Denn ganz im Gegensatz zu der Auffassung Neese's ist daran festzuhalten, dass die geringe Raumersparnis durch Fortlassen des Trockenrohres, gegenüber dem Einfluss der dann unvermeidlichen Feuchtigkeit, gar nicht in Betracht kommt. Trockenheit, möglichst absolute Trockenheit, ist erste Bedingung für das Erreichen, und für das schnelle Erreichen, eines weitgetriebenen Vacuums. Auf 100 oder 200 $cm^3$ mehr Raum kommt es bei einer richtig construirten Pumpe gar nicht an. — Das Folgende wird dies noch besonders erhärten.

Aus den Prüfungen der „chemischen" Pumpen[2]) — solchen mit nur einem und einfachen Luftfang — ergab sich, dass die 30 ersten Pumpen — für die Feststellung der Mittelwerte sind also im ganzen 60, 30 physikalische und 30 chemische Pumpen herangezogen — für das Evacuiren von rund 6000 $cm^3$ auf im Mittel 0,52 mm Druck nur 30 Minuten aufwendeten.

Wir ziehen zum Vergleich wiederum Donle heran, der, um den Druck bis unter einen Millimeter zu bringen, bei 250 $cm^3$ Inhalt 90 Minuten brauchte.[3])

Demnach darf also auch dieses unser Resultat ein ausgezeichnetes genannt werden, und es beweist dasselbe, dass auch bei verhältnismässig grossen Räumen die Entleerung bis zu einem Millimeter Druck und darunter keineswegs langsam, sondern mit erwünschter Schnelligkeit vor sich geht, und dass sich auch hier das Sprengel'sche Princip, im Gegensatz zu Neesen[4]) und Donle's[5]) Ansicht, dem Verdrängungsprincip zum mindesten ebenbürtig erweist.

---

1) F. Neesen, Zeitschr. f. Instrumentenk. **19.** p. 149. 1899.
2) G. W. A. Kahlbaum, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. **27.** p. 1836. 1894.
3) W. Donle, Zeitschr. f. Instrumentenk. **20.** p. 81. 1900.
4) F. Neesen, l. c. **15.** p. 273. 1895.
5) W. Donle, l. c. **20.** p. 81. 1900.

*Die Schnelligkeit der Wirkungsweise hängt ganz allein von einem richtigen Abstimmen des Verhältnisses von Zufluss und Ablauf des Quecksilbers ab* und ist für jede einzelne Pumpe besonders zu regeln. Eine Aufgabe, die durchaus nicht, wie Krafft meint, allein „Sache des Glasbläsers" ist.[1])

Wie ausserordentlich wichtig dieses „Abstimmen" ist, hat Neesen's Prüfung deutlich ergeben. Danach stellte sich die Leistungsfähigkeit einer unserer Originalpumpen zu einer nachgemachten wie 2,5 : 9 und wie 4,5 : 15, und zu der von Desaga hergestellten, von Krafft empfohlenen Babo-Pumpe wie 2,5 : 21 und wie 4,5 : 57, und dort waren alles Sprengel-Pumpen. Für grössere Räume versagte letztere ganz.[2])

Die mit unserer Pumpe erreichten Maximalleistungen bei den Prüfungen — nicht Maximalleistungen überhaupt, die noch weiter gingen — überstiegen die angegebenen Zahlen nach jeder Richtung recht erheblich. Es wurden die oben genannten Räume z. B. evacuirt

| | in 15 Minuten | in 30 Minuten |
|---|---|---|
| durch eine physikalische Pumpe auf: | 0,00007 mm Dr. | 0,000003 mm Dr. |
| „ „ Handpumpe auf: | 0,000013 „ „ | 0,000002 „ „ |

und durch eine chemische Pumpe 6000 $cm^3$ in 20 Minuten auf 0,2 mm Dr.

Leider war es unmöglich, trotz aller aufgewendeten Mühe, die gleichen so ausserordentlich günstigen Verhältnisse immer wieder festzuhalten, wir mussten uns an einem Mittelmaass, wie es die weiter oben gegebenen Zahlen zeigten, genügen lassen; aber diese Zahlen beweisen die Richtigkeit unserer Behauptung, dass unter sonst gleichen Umständen ganz allein das Verhältnis von Zu- und Ablauf des Quecksilbers die Leistungsfähigkeit der Sprengelpumpe regelt.

Mit dem Fallen des Quecksilbers, dem Princip der Sprengelpumpe, ist aber ein arger Uebelstand verknüpft. Durch das Reiben des Quecksilbers an der Glaswand treten elektrische Erscheinungen in der Pumpe auf, die dahin führen, dass an der Aufschlagstelle des fallenden auf das, das Fallrohr verschliessende Quecksilber, die Glaswand durch elektrische Funken in ganz feinen Canälen durchbohrt wird. Die Wan-

1) F. Krafft, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. **29.** p. 1316. 1896.
2) F. Neesen, Zeitschr. f. Instrumentenk. **19.** p. 149. 1899.

dung wird langsam matt, das Fallrohr entglast sich, bis es endlich springt.

Dieses Entglasen tritt natürlich von Anbeginn an auf und nicht, wie Krafft meint, „plötzlich zuletzt".[1]) Das Eintreten des Springens hängt von der Betriebsdauer und dem Grad der Verdünnung ab, ein Einfluss der Wandstärke konnte nicht festgestellt werden. Krafft[2]) schätzt die Lebensdauer eines Fallrohres auf etwa 100 Gebrauchsstunden.

Jedenfalls springen endlich alle Fallrohre. Dass damit Wert und Brauchbarkeit der Sprengelpumpen wesentlich beeinträchtigt wird, liegt auf der Hand.

Dieser Mangel ist jetzt völlig behoben. Das Fallrohr wird in zwei Teile zerschnitten, die durch einen gewöhnlichen Napfschliff mit Quecksilberverschluss miteinander verbunden werden; dicht unter dem Schliff, an der Aufschlagstelle des fallenden Quecksilbers, wird das Fallrohr in einer Länge von rund 80 mm um etwa 1,5 mm erweitert und in diese Erweiterung ein Schutzrohr aus Stahl, dessen lichte Weite genau der des Fallrohres entspricht, eingepasst.[3])

Mit dieser einfachen Anordnung ist erreicht, dass die Pumpe, man darf sagen, beliebig lange ununterbrochen arbeiten gelassen werden kann, wenn nur etwa alle 300 Arbeitsstunden die Luftfänge von neuem gefüllt werden. Eine Operation, die, wenn die Teile des Apparates mittels der von mir angegebenen Hähne[4]) getrennt sind, ohne das Vacuum des abgeschlossenen Teiles im geringsten zu influiren, in etwa einer halben Stunde vollzogen ist.

Bei Dauerbetrieb ist selbstredend darauf zu achten, dass nicht etwa mit sinkendem Luftdruck die Aufschlagstelle ausserhalb des Stahlrohres in das Glas hinab gedrückt wird, weil damit ja der Nutzen des Stahlrohres dahinfallen würde. Deshalb ist es notwendig, während der Dauer eines solchen Versuches auch den Gang des Barometers zu beobachten, um durch jeweiliges Heben oder Senken des Schlittens die Lage der Auf-

1) F. Krafft, Ber. d. Deutsch. chem. Ges. **29.** p. 1816. 1896.
2) l. c.
3) D.R.P. Nr. 98479 vom 14. December 1897.
4) G. W. A. Kahlbaum, Zeitschr. f. Instrumentenk. **14.** p. 21. 1894.

schlagstelle so zu reguliren, dass sie immer etwa in die Mitte des Stahlrohres fällt.

Nicht angängig ist es, das Stahlrohr beliebig lang zu machen, bez. wie das versucht wurde, den ganzen unteren, als Barometerverschluss dienenden Teil des Fallrohres durch ein Metallrohr zu ersetzen.

Einmal wäre die Undurchsichtigkeit vom Uebel, und zweitens benetzt das Quecksilber den Stahl nicht. Würde also das gläserne durch ein stählernes Fallrohr ersetzt, so würde das Quecksilber, an den aus dem oberen Glasteil mitgerissenen Luftblasen, die an den Wänden kleben bleiben, vorüberlaufend, dieselben umgehen, nicht aber sie mit sich nehmen und weiterführen. Dadurch würde es gestaut und weit bis in den oberen Glasteil aufsteigen, sodass der Fallraum verkleinert und damit die Wirksamkeit der Pumpe stark beeinträchtigt, die aufzuwendende Zeit um Stunden und aber Stunden verlängert würde.

Darum ist jede Pumpe auf den mittleren Barometerstand ihres Bestimmungsortes besonders abgestimmt, damit beim Beginn des Arbeitens die Aufschlagstelle ausserhalb des Stahlrohres eingestellt werden kann.[1])

Erst wenn ganz kleine, kaum noch sichtbare Bläschen auftreten, wird der die Sammelflasche tragende Schlitten so weit gehoben, dass die Barometerkuppe sich innerhalb des Stahlrohres befindet. — Solange noch grössere Luftblasen auftreten, werden die Fallröhren so gut wie gar nicht angegriffen, da die Blasen, als Luftkissen wirkend, das Auftreten der gefahrbringenden elektrischen Entladung stark abschwächen.

Zu vermeiden ist auch, das Fallrohr in seinem unteren Teile mit einem Leiter, sei es auch nur ein feuchter Bindfaden oder dergleichen, in Berührung zu bringen, weil an

---

1) Für die Prüfung der Pumpen in Basel ist dies Einstellen auf einen für jede Pumpe bestimmten Barometerstand zuweilen von Nachteil, weil es nicht immer möglich ist, die Quecksilberkuppe zuerst unterhalb des Stahlrohres einzustellen. Da dadurch, wie wir sahen, das Evacuiren verlangsamt wird, so fällt die Prüfung ungünstiger aus. Wir haben bei unserer Zusammenstellung deshalb auch nur die 60 ersten Pumpen, bei denen ein Stahlrohr noch nicht angewendet wurde, berücksichtigt. Die Leistungsfähigkeit der Pumpe selbst wird durch das Glasrohr natürlich *nicht* beeinflusst, wie das auch die folgenden Zahlen ergeben.

solchen Stellen kleine Entladungen, das Glas durchdringend, das Fallrohr sprengen.

*Unter Anwendung all der gedachten Vorsichtsmaassregeln aber konnte z. B. bei der Destillation des Eisens die Pumpe mit nur einer etwa einhalbstündigen Unterbrechung zur Auffüllung der Luftfänge am 26. Januar, vom 12. Januar früh bis zum 6. Februar abends, also im ganzen 610 Stunden ununterbrochen arbeiten gelassen werden. Dabei betrug der Druck im Apparat, trotz der ständigen Erwärmung mittels eines Wassertrommelgebläses, womit eine Temperatur im Apparat von rund 1200° C. erzielt wurde, während der letzten 150 Stunden, d. h. nach 450-stündiger ununterbrochener Arbeit, im Mittel 0,00007 mm, und als am 6. Februar früh, d. h. nach 600stündiger Arbeit, langsam erkalten gelassen wurde, gemessen:*

*um 7 Uhr 0,00008 mm*
*„ 9 „ 0,00004 „*
*„ 11 „ 0,00002 „*
*„ 2 „ 0,00001 „*

*Hier wurde die Flamme ganz gelöscht und nach 610stündiger, ununterbrochener Arbeit der Druck abends*

*um 5 Uhr zu 0,0000018 mm*

*gemessen.*[1])

Dabei hatte der Apparat ein Lumen von rund 1500 cm³ bei einer Länge der die einzelnen Teile verbindenden Glasrohre von etwa 5 Metern und war an drei Stellen durch Schliffe, und an einer durch einen Dreiweghahn, beide meiner Construction, unterbrochen.

Diese ganz ausgezeichnete, bisher wohl noch nicht erreichte Leistung — Thompson[2]) citirt in seiner Zusammenstellung als absolut bestes von Rood in seiner Sprengelpumpe mit heissem Quecksilber erreichtes Resultat 0,000002 mm Druck, Bessel-

1) G. W. A. Kahlbaum, Laboratoriumsprotocolle. Tabellen zu den destillirten Metallen p. 24. Es ist das etwa der gleiche Druck, den Raps (Zeitschr. f. Instrumentenk. 13. p. 68. 1893) als besten von ihm überhaupt erhaltenen angiebt. Ich könnte noch mit tieferen dienen, doch haben die Angaben wegen der anhaftenden Fehler keinen absoluten Wert.

2) S. P. Thompson, The development of the mercurial airpumps. p. 26. London 1888.

Hagen[1]) giebt als Maximalleistung seiner Toeplerpumpe 0,000008 — lehrt, einmal dass die bei so lang andauerndem Betrieb unvermeidliche Anfüllung der Fänge mit Luft die Leistungsfähigkeit in keiner Weise einschränkt, und dass weiter die ebenfalls unvermeidliche Verschmutzung des Quecksilbers — im wesentlichen durch Oxydation durch die hebende Luft und Bildung von Schwefelquecksilber durch die Gummischläuche — ohne irgend welchen Einfluss ist. Die Oxydationshäutchen werden zum bei weitem grössten Teile in den Luftfängen zurückgehalten. Gelangt einmal ein kleines Stücklein solcher Haut bis in das Fallrohr, so wird dasselbe durch die Reibung des fallenden Quecksilbers an der Glaswand alsbald zerkleinert und mitgeführt, sodass sich auf diese Weise — und das ist für den Dauerbetrieb von der allergrössten Wichtigkeit — das Fallrohr mechanisch immer wieder von selbst reinigt. Darin allein liegt die Erklärung für eine so vorzügliche Wirksamkeit, trotz so lang andauerndem Betrieb.

Gar nicht zu vermeiden ist das Mitführen von Luft durch das mittels Luft gehobene Quecksilber. Zweifellos wird das Quecksilber, wenn es 600 Stunden hindurch mit Luft auf das allerinnigste geschüttelt wird, davon so viel aufnehmen, als nur immer möglich. Man sieht denn auch an der Ueberlaufstelle, also hinter den Luftfängen, wo die Menge des zuströmenden Metalles durch die von der Düse bedingte Verengung gestaut wird, Luftblase neben Luftblase sich absetzen, die nach und nach bis in das Fallrohr vorrücken. Man sollte nun glauben, dass diese mitgeführte Luft beim Fallen des Quecksilbers in dem evacuirten Rohr alsbald und vollständig an eben dies Vacuum abgegeben werde, und so den Grad der Verdünnung herabmindere; — dieser Gedanke hat offenbar auch Rood[2]) veranlasst, das Quecksilber aus einem evacuirten Gefäss in das Fallrohr seiner Sprengelpumpe gelangen zu lassen, — thatsächlich ist das aber nicht der Fall. Die mitgeführte Luft wirkt *nicht* vermehrend auf den Druck im Apparat.

---

1) E. Bessel-Hagen, Wied. Ann. **12.** p. 438. 1881.

2) O. N. Rood, The New-York Times. p. 2, Sp. 3. 19. Nov. 1880. Andere (Lebedew) haben das Gleiche vorgeschlagen.

Der Grund ist folgender: Ein Teil der mitgeführten Luft löst sich von dem fallenden Quecksilber offenbar überhaupt nicht, sondern wird gleich mit weitergeführt, aber auch jener Teil, der sich loslöst, gelangt gar nicht bis in den Apparat, er wird vielmehr von den nachfolgenden Quecksilberteilchen gleich wieder weiterspedirt.

In einem Falle konnte folgendes beobachtet werden. Ein Fallrohr war während der Nacht dicht unter der Aufschlagstelle gesprungen. In dem als Barometer wirkenden Teil dieses Rohres waren deutliche, etwa 1,5 mm im Diameter messende Luftbläschen sichtbar; und doch zeigte sich weder am Manometer, noch am Volumometer eine Druckerhöhung. Auch hier konnte die Luft gar nicht bis in den Apparat gelangen, das ununterbrochen fallende Quecksilber nahm alle bis in den oberen Teil des Fallrohres gelangende Luft sogleich wieder mit fort.

Darin eben liegt der gewaltige Vorzug des Sprengel'schen Principes, dass bei allen auf ihm basirten Pumpen auch die gesamte Arbeitszeit ausgenützt wird[1]); während bei allen Verdrängungspumpen nur ein ganz kleiner Teil der aufgewendeten Zeit wirklich gepumpt wird. Die ganze Zeit des Hubes und die des Rücklaufes des Quecksilbers bis zur Mündungsstelle des zu evacuirenden Apparates, d. h. etwa $^9/_{10}$ der Zeit, geht ungenützt verloren.[2]) Wenn also in dem oben angeführten Beispiel 600 Stunden ununterbrochen gearbeitet wurde, so wurde auch thatsächlich 600 Stunden hindurch an dem Apparat ununterbrochen gesogen, d. h. all' die Zeit hindurch konnten die sich beständig lösenden Luftteilchen von dem Destillationsgefäss ungehindert in die Pumpe gelangen; während beim Arbeiten mit einer Verdrängungspumpe nur etwa 60 Stunden,

---

1) F. J. Smith (Nature 48. p. 320. 1893) und M. Bloch (D.R.P. 70035 u. 70522. Oct. 1892) haben diesen Vorzug glücklich vermieden, indem sie ihre Sprengelpumpen intermittirend arbeiten lassen.

2) Neesen hat versucht, diesem Uebelstand, den er voll anerkennt, zum Teil wenigstens abzuhelfen. Wie weit ihm das gelungen und er nicht durch das Hinunterfallenlassen des Quecksilbers in das Quecksilbergefäss neue Mängel geschaffen, die zu vermuten nahe liegt, vermag ich, da ich den Apparat selbst nicht kenne, nicht zu beurteilen. Siehe Zeitschr. f. Instrumentenk. 17. p. 129. 1897.

und das noch fortwährend unterbrochen, dafür Gelegenheit geboten worden wäre. Das aber will nicht wenig besagen bei der grossen Langsamkeit, mit der sich geringe Druckdifferenzen — und es handelt sich zum Schluss ja nur noch um zehntausendstel Millimeter — auch bei Gasen, und gar in so ausgedehnten, complicirten Apparaten, ausgleichen.

Ich kann mich auch deshalb der Ansicht Jaumann's[1]) nicht anschliessen, der den Verdrängungspumpen, im besondern denen Toepler'scher Anordnung principiell den Vorrang einräumt, sondern halte an der entgegengesetzten, die schon Bessel-Hagen[2]) ausgesprochen hat, fest.

Von einschneidendster Bedeutung für die Leistungsfähigkeit der Pumpe ist auch das Anwenden möglichst weiter Zuleitungs- oder Verbindungsrohre bei Pumpe wie Apparat. Bei der Schuller'schen Pumpe alten Modells — jetzt ist es fortgelassen — z. B. war zwischen Pumpe und Apparat ein etwa 2 mm lichtweites, etwa meterlanges Spiralrohr, das wohl als Glasfeder wirken sollte, eingeschoben. Dadurch war die Leistungsfähigkeit des hübschen und sinnreichen Apparates ganz ausserordentlich geschwächt, denn als bei einem in *Wien* unternommenen Versuch das Rohr auf meine Anordnung entfernt wurde, hob sich damit die Leistungsfähigkeit sofort auf das Zehnfache.

Vergleichende Versuche, die ich nach dieser Richtung anstellte, ergaben folgendes Resultat. Zwischen Pumpe und Volumometer wurden zwei je etwa 1 Meter lange, Uförmig gebogene Glasrohre, vom Durchmesser 2,5 mm und 6 mm im Lichten, geschmolzen. Die Rohre trugen an der Biegestelle einen Fortsatz, der über einen Gummischlauch zu Quecksilberbehältnissen führte, so dass nach Belieben, ohne dass an dem Apparat das geringste geändert wurde, die Verbindung zwischen Pumpe und Volumometer durch das weite, das enge, oder beide Rohre vermittelt werden konnte. Hier wurde folgendes beobachtet:

---

1) G. Jaumann, Zeitschr. f. Instrumentenk. 17. p. 243. 1897.

2) Bessel-Hagen, Wied. Ann. 12. p. 426. 1881.

| | Enges Rohr | Weites Rohr | Beide Rohre |
|---|---|---|---|
| Beginn | 10,0 mm | 10,0 mm | 10,0 mm |
| nach 1 Minute | 5,5 „ | 6,0 „ | 6,0 „ |
| „ 2 „ | 3,0 „ | 3,0 „ | 3,5 „ |
| „ 3 „ | 1,8 „ | 2,0 „ | 2,0 „ |
| „ 4 „ | 1,0 „ | 1,2 „ | 1,0 „ |
| „ 5 „ | 0,7 „ | 0,7 „ | 0,7 „ |
| „ 15 „ | nicht abzulesen | 0,002 „ | 0,00180 „ |
| „ 45 „ | 0,00249 mm | 0,00027 „ | |
| „ 60 „ | 0,00056 „ | | |
| „ 120 „ | 0,00033 „ | | |
| „ 180 „ | 0,00030 „ | | |

Die kleine Tabelle zeigt den Einfluss der Rohrweiten sehr deutlich: Bis zum Druck von etwa 0,5 mm ist ein Unterschied nicht zu bemerken, dann aber bleibt bei dem engen Zuleitungsrohr der Erfolg weit zurück, so dass bei 180 Minuten Arbeitszeit noch nicht erreicht ist, was mit dem weiteren Rohr im vierten Teil der Zeit gelang. Bei der Verwendung beider Röhren ist der Erfolg der grösste.

Noch zwei Winke sei zu geben erlaubt. Es ist nicht immer möglich oder praktisch — so war es z. B. bei unseren Metalldestillationen der Fall — Schliffe und Hähne[1]) auch bei Apparaten, die weitmöglichst evacuirt werden sollten, gänzlich zu vermeiden. Einen durchaus luftdichten Verschluss sichern die von mir angegebenen Schliffe und Hähne, jedoch empfiehlt es sich, sei es, um das Verdampfen des Quecksilbers oder das bei den fortdauernden Erschütterungen des Apparates leicht eintretende Herausschleudern des Metalles aus den, besonders bei den Hähnen nur flachen Verschlussnäpfchen zu hindern, das Quecksilber mit einer Fettschicht zu bedecken.

Als solches hat sich, nach vielen, vielen Versuchen das *Flomenfett*, Marke *Schwalbe*, der Firma Kress & Co. in *Heilbronn* als für diesen Zweck bestes empfohlen.

Dieses Fett zieht sich beim Erstarren nicht merklich zusammen, giebt demnach einen vorzüglichen, luftdichten Verschluss — daher seine Anwendung bei den Strassburger Gänseleberpasteten, die mich es kennen lehrten.

1) Die gewöhnlichen Hähne mit geschlossenen Küken und eingeschmolzenen Röhrchen sind, eben dieses engen Röhrchens wegen, unbedingt fortzulassen.

Es hat einen sehr niederen Schmelzpunkt und ist so weich, dass sich die Hähne mit der Fettschicht über dem Quecksilber ohne jede Schwierigkeit drehen lassen und ohne dass die Fettschicht nach dem Drehen klafft. So vorzüglich sich das Fett zu diesem Zweck eignet, so wenig ist es als Schmierfett zu verwenden. Schliffe wie Hähne werden hart, und ihre Drehbarkeit ist vollkommen verhindert. Es ist deshalb wohl acht zu geben, dass das Fett nicht in die Schliffstellen eindringt.

Dieses Aufgiessen einer erstarrenden Fettschicht auf die Quecksilberverschlüsse bietet aber auch noch weitere erhebliche Vorteile, weil es die Oberfläche des Quecksilbers vor Staub schützt und es unbeweglich macht. Bleibt dasselbe frei, so setzt sich natürlich Staub an der Oberfläche ab. Diese Staubschicht kriecht bei häufigem Erschüttern, wie solches bei der arbeitenden Pumpe beständig statthat, an den Glaswänden herab und verhindert dadurch ein directes Anliegen des Quecksilbers an dem Glas. Es bildet sich eine Zwischenschicht von Staub, die luftdurchlässig ist, und Schliffe und Hähne erscheinen, trotz Quecksilberverschluss, undicht.

Einfaches Absaugen des Quecksilbers und Reinigen von Stempel und Scheide, innen wie aussen, hilft dann zwar immer, aber die Undichtigkeit wird stets erst gemerkt, wenn sie grob wird, deshalb ist es gut, ihr Auftreten durch Aufgiessen einer Fettschicht vorweg zu verhindern. —

Für die Zuleitung des Quecksilbers am Volumometer sowohl als an den Pumpen werden dickwandige Gummischläuche verwendet, die entweder umsponnen oder mit Leinwandumwicklung oder Einlage versehen sind. Dieselben sind kostspielig und oft schwer zu beschaffen; sie sind vollständig zu ersetzen durch gewöhnliche, nicht zu dünnwandige Gummischläuche, die man selbst mit käuflichem, sogenanntem Isolirband — — asphaltirten Leinwandstreifen — umwickelt. Der Kostenpunkt ist gleich Null und die Leistung ganz die gleiche. Das gleiche Mittel verwende ich auch da, wo Schläuche mit Klemmen verschlossen werden sollen, dort brechen sie gern, und da, wo Gasschläuche für längeren Gebrauch über Glas oder Metall gezogen werden, dort reissen sie gern. Beides wird durch einen Wickel von Isolirband, man darf sagen fast vollständig, gehindert.

Darf ich zum Schluss noch meine Erfahrungen über die Construction einer möglichst wirksamen Luftpumpe zusammenstellen, so sind dieselben folgende: Als Princip ist, wegen der Continuität des Betriebes, das Sprengel'sche zu wählen, eine Ueberlegenheit der Verdrängungspumpen lässt sich, auch für niedere Drucke, bei richtiger Ausmessung der Verhältnisse nicht nachweisen; dagegen ist die Menge des aufzuwendenden Quecksilbers bei den Sprengelpumpen erheblich geringer. Es genügt ein, jedoch langes Fallrohr; dasselbe ist, wegen der unvermeidlichen Complication des Apparates, einer Mehrzahl von Rohren vorzuziehen. An der Aufschlagstelle ist das Fallrohr vor dem Zerspringen zu schützen. Wählt man dazu ein inneres Schutzrohr, so verdient Stahl vor anderen Metallen den Vorzug. Um möglichst erfolgreich zu arbeiten, muss das Quecksilber direct von oben, und nicht seitlich — Donle würde bei dieser Anordnung zweifellos günstigere Resultate erzielen — in das Fallrohr gelangen, und sind die Verbindungsrohre zum Apparat weit und möglichst kurz zu wählen. Weitgehendste Trockenheit ist Vorbedingung für ein gutes Vacuum, die durch das Anbringen von Trockenrohren verursachte Vergrösserung des Lumens kommt nicht in Betracht.

Ein vorheriges Evacuiren des Quecksilbers ist nicht vonnöten, da die freiwerdende Luft, durch nachstürzendes Quecksilber mitgerissen, gar nicht bis in den Apparat gelangt.

*Neben der Berücksichtigung der obgemeldeten Vorsichtsmaassregeln ist jedoch erste Hauptbedingung ein richtiges Abstimmen von Zulauf und Ablauf des Quecksilbers. Ganz geringe Differenzen führen da zu ausserordentlich grossen Unterschieden in der Leistungsfähigkeit. Dieses Verhältnis ist deshalb für jede Pumpe besonders zu regeln.*

Pumpen unserer Construction und von uns geprüft liefert Karl Kramer, *Glasbläser, Freiburg i. B.*

Basel, am 14. August 1901.

(Eingegangen 20. August 1901.)

## 13. *Ueber die Dispersion ultravioletter Strahlen; von F. F. Martens.*

(Berliner Habilitationsschrift.)

---

1. Die Dispersion einer Substanz im ultravioletten, sichtbaren und ultraroten Spectralgebiet zu kennen, ist von praktischem und theoretischem Interesse.

Prismen aus einem Material bekannter Dispersion können dazu dienen, Wellenlängen zu messen oder zu isoliren.

Die Dispersion einer Substanz kennen wir nicht eher vollständig, als bis wir die Eigenschwingungen (oder Streifen metallischer Absorption bez. Reflexion) rechnerisch oder experimentell ermittelt haben. Vergleichen wir verschiedene Substanzen mit einem gemeinsamen Bestandteil in Bezug auf die Eigenschwingungen miteinander, so finden wir, wodurch die Eigenschwingungen bedingt sind.

Kennt man die Brechungsexponenten für ein möglichst grosses Intervall von Wellenlängen, dann kann man die Constanten der bisher stets bewährten Ketteler-Helmholtz'schen Dispersionsformel berechnen und hieraus schliessen, welche Durchlässigkeit und welchen Brechungsexponenten die Substanz wahrscheinlich für Strahlen unendlich kleiner Wellenlänge, wie es vielleicht die Röntgenstrahlen sind, besitzt.

Unter diesen drei Gesichtspunkten sind die nachstehenden Beobachtungen und Rechnungen des Verfassers angestellt. Es war ursprünglich das Ziel des Verfassers, auf gütige Anregung von Hrn. Prof. Warburg nahe an 1 liegende Brechungsexponenten direct zu messen. Dies Ziel hat sich bei den bisher untersuchten Strahlen und Substanzen noch nicht erreichen lassen. Doch hofft der Verfasser später mit den von Hrn. Schumann entdeckten Strahlen, deren Wellenlänge zwischen 185 und 128 $\mu\mu$ liegen dürfte, und einigen ausgewählten Substanzen das gesteckte Ziel zu erreichen.

### I. Methoden und Apparate.

2. Die Brechungsexponenten der Krystalle wurden nach der Methode des bekannten Einfallswinkels bestimmt. Im Princip schon 1828 von Rydberg[1]) erdacht, ist die Methode zuerst von Grailich[2]) angewandt worden, freilich noch ohne Collimator.

Die vom Collimator kommenden Strahlen werden durch Reflexion an der Prismenfläche 1 (vgl. Fig. 1) um den Winkel

$$\xi = 180^0 - 2\alpha \tag{1}$$

abgelenkt. Stellt man zunächst das Fernrohr ohne Prisma auf das directe Spaltbild ein, dreht darauf das Fernrohr um $\xi$, und stellt nun das Prisma so auf, dass das reflectirte Spaltbild mit dem Fadenkreuz zusammenfällt, so ist $\alpha$ der Ein-

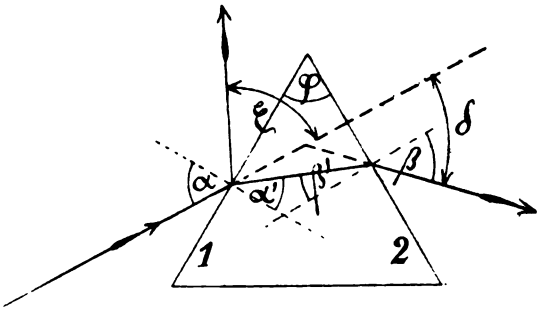



Fig. 1.

fallswinkel der Lichtstrahlen an der ersten Prismenfläche. Sind $\alpha' \beta' \beta$ die weiteren Einfalls- bez. Brechungswinkel an den Prismenflächen, ist $\delta$ die Ablenkung der Strahlen durch das Prisma, so ist $\varphi = \alpha' + \beta'$, ferner $\delta = \beta - \beta' + \alpha - \alpha'$, und für die Brechung an der ersten bez. zweiten Fläche gelten die Gleichungen

$$n \sin \alpha' = \sin \alpha,$$

$$n \sin (\varphi - \alpha') = \sin (\varphi + \delta - \alpha).$$

1) F. Rydberg, Pogg. Ann. **14.** p. 44—59. 1828.

2) Jos. Grailich, Krystallographisch-optische Untersuchungen p. 21 bis 23. Wien und Olmütz 1858; gekrönte Preisschrift.

Addiren bez. subtrahiren wir beide Gleichungen, so erhalten wir

$$2n \sin\frac{\varphi}{2} \cos\left(\alpha' - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \sin\frac{\varphi+\delta}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\varphi+\delta}{2}\right),$$

$$2n \cos\frac{\varphi}{2} \sin\left(\alpha' - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \cos\frac{\varphi+\delta}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\varphi+\delta}{2}\right).$$

Durch Division der linken und rechten Seiten folgt:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}\left(\alpha' - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}\frac{\varphi+\delta}{2} \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\varphi+\delta}{2}\right);$$

hat man aus (2) $\alpha'$ berechnet, so ergiebt sich

$$\text{(3)} \qquad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.$$

3. Für die Beobachtungen standen zwei Spectrometer zur Verfügung, ein grosses Instrument von Pistor & Martins mit 2″ — Ablesung, ein kleineres von Schmidt & Haensch mit 10″ — Ablesung. Bei letzterem ist das Fernrohr durch eine photographische Camera ersetzt. Die Cassette mit der 3 × 4 cm grossen Trockenplatte wird seitlich in einen Schlitten eingeschoben; der Schlitten ist an der Camera derart befestigt, dass er mittels einer Schraube vertical bewegt werden kann. So konnten etwa 20 je 0,5 mm hohe Spectra auf einer Platte aufgenommen werden. Als Objective[1]) dienten zwei achromatische Quarz-Flussspatobjective. Der Spectrometertisch war so eingerichtet, dass eine auf Justirschrauben ruhende Platte mit dem Prisma abgehoben und ohne weiteres genau in die alte Stellung gebracht werden konnte.[2]) Zum Verschluss der Camera diente ein Deckel am Objectivende.

4. Die Prismenwinkel $\varphi$ wurden stets mit beiden Instrumenten gemessen. Der Einfallswinkel $\alpha$ wurde gemessen, indem das Beobachtungsrohr zuerst auf das directe, dann auf das von der vorderen Prismenfläche reflectirte Spaltbild eingestellt wurde. Die Ablenkungen $\delta$ der ultravioletten Strahlen wurden in folgender Weise gemessen. Zunächst wurde das

1) Für die leihweise Ueberlassung der schönen Objective spricht Verfasser Hrn. Dr. H. Th. Simon seinen verbindlichsten Dank aus. Ueber die Construction der Objective vgl. H. Th. Simon, Wied. Ann. **53**. p. 544–546. 1896.

2) F. F. Martens, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **3**. p. 11. 1901.

Prisma abgenommen und ein directes Spaltbild photographirt; dann wurde die Camera um den Winkel $\gamma$ gedreht, das Prisma aufgesetzt und ein Spectrum aufgenommen. Ist $S$ der Abstand der photographischen Platte vom hinteren Hauptpunkt des Objectives, $x$ der auf der Teilmaschine gemessene Abstand einer Spectrallinie vom directen Spaltbild, so berechnet sich die Ablenkung dieser Linie

$$\delta = \gamma \pm \beta, \tag{4}$$

worin

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{S} \tag{5}$$

ist.

Wird die Camera zwischen zwei übereinander liegenden Aufnahmen um den etwa 3° betragenden Winkel $\varepsilon$ gedreht, sind $x_1$ bez. $x_2$ die Abstände derselben Linie vom directen Spaltbilde in beiden Aufnahmen, so berechnet sich $S$ in folgender Weise. Es ist

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{x_1}{S}, \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{x_2}{S}, \quad \varepsilon = \beta_1 - \beta_2.$$

Mithin

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{x_1}{S} - \frac{x_2}{S}}{1 + \frac{x_1}{S}\cdot\frac{x_2}{S}},$$

$$S = \frac{x_1 - x_2}{2\operatorname{tg}\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2\operatorname{tg}\varepsilon}\right)^2 - x_1 x_2}.$$

Da in der Wurzel das zweite Glied klein gegen das erste ist, kann man die Wurzel nach dem binomischen Satz entwickeln und erhält

$$S = \frac{x_1 - x_2}{\operatorname{tg}\varepsilon} - \frac{x_1 x_2}{\frac{x_1 - x_2}{\operatorname{tg}\varepsilon}}. \tag{6}$$

Die $x$ und $\beta$ sind positiv zu nehmen, wenn sie nach der einen Seite, negativ, wenn sie nach der anderen Seite des Spaltbildes hin liegen.

5. Die untersuchten Prismen aus Kalkspat und Quarz sind (von Schmidt & Haensch) in der Weise geschliffen, dass die Axe den Prismenkanten parallel war. Zunächst wurde eine etwa 2 cm dicke, zur Axe genau senkrechte, planparallele Platte aus den Substanzen geschliffen. Dann wurden die

Prismenflächen senkrecht zu den Grundflächen geschliffen. — Beim Kalkspat sind die grössten Exponenten des ausserordentlichen Strahles kleiner als die kleinsten Exponenten des ordentlichen Strahles; daher konnten die beiden Spectra ohne weiteres einzeln untersucht werden. Beim Quarzprisma fallen jedoch die beiden Spectra zum grössten Teil zusammen. Um die Spectren zu trennen, hat Verfasser am Collimator ein kleines Wollastonprisma aus Quarz angebracht (Fig. 2); der

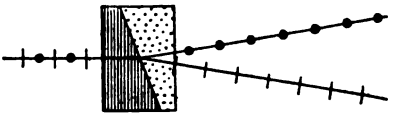


Fig. 2.

brechende Winkel der einzelnen Prismen ist 7°. Dann entstehen auf der photographischen Platte zwei Spectra, deren jedes 0,5 mm hoch ist, übereinander.

Für die Messungen im sichtbaren Gebiet war das Wollastonprisma nicht erforderlich; hier konnte an der Farbe leicht erkannt werden, ob eine Linie dem ordentlichen oder ausserordentlichen Spectrum angehörte.

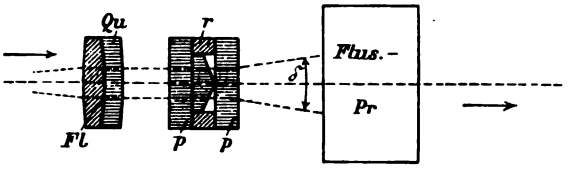



Fig. 3.

6. Für die folgenden Versuche wurde das Spectrometer von Schmidt & Haensch mit dem grossen Flussspatprisma des Institutes, dessen Dimensionen unten p. 615 angegeben sind, versehen. So konnte das ganze etwa 3 cm lange Spectrum von 467—185 $\mu\mu$ zugleich photographirt werden. Um die Brechungsexponenten von Flüssigkeiten zu bestimmen, wurden diese in einen Hohlraum (vgl. Fig. 3) gebracht, welcher durch den Ring $r$ und die beiden Quarzplatten $p$ gebildet wurde.

Ausser der Flüssigkeit befand sich in dem Hohlraume ein Zwillingsprisma aus Quarz, dessen beide brechende Winkel $\varphi = 1^0\,10'$ waren. Axenrichtung ist durch Schraffiren angedeutet.

Bei der Anwendung wurde die brechende Kante des Zwillingsprismas horizontal gestellt, ebenso der Spalt des Spectrometers. Auf der Platte entstehen dann zwei übereinanderliegende Reihen horizontaler Spaltbilder. Ist $\delta$ der Winkelabstand zweier Spaltbilder derselben Wellenlänge, $n$ der gesuchte Exponent der Flüssigkeit, $N$ der bekannte Index des ordentlichen Strahles im Quarz, so ist nach bekanntem Satze

$$\tfrac{1}{2}\delta = \pm (n-1)\varphi \mp (N-1)\varphi,$$

und deshalb

$$n = N \pm \frac{\delta}{2\varphi}, \tag{7}$$

je nachdem $n \gtrless N$.

Das kleine Flüssigkeitsprisma ist von Schmidt & Haensch hergestellt. Die Dicke des Ringes $r$ wurde so gewählt, dass die Kante des Zwillingsprismas von der gegenüberstehenden Quarzplatte nur einige hundertstel Millimeter entfernt war. Die so gefundenen Brechungsexponenten $n$ sind freilich nur bis auf einige Einheiten der dritten Decimale sicher. Doch können noch Strahlen untersucht werden, die in der Flüssigkeit schon stark absorbirt werden; ferner besitzt diese Methode der gekreuzten Prismen den Vorzug, dass man mit einem Blicke die Aenderung der Indices mit der Wellenlänge übersieht.

7. Um die *Absorption* von Flüssigkeiten im Ultraviolett zu bestimmen, wurden die Flüssigkeiten[1]) zwischen zwei dünne Quarzplatten gepresst; diese wurden dann senkrecht zu den Strahlen vor den Spalt gehalten. War so ein Spectrum aufgenommen, dann wurde darüber ein zweites Spectrum ohne Vorschalten der Flüssigkeit aufgenommen; der Unterschied liess die Absorption der Flüssigkeit deutlich erkennen. Besonders schwierig war wegen des schnellen Verdunstens die Aufnahme bei Schwefelkohlenstoff.

8. Um die *metallische Reflexion von Flüssigkeiten* nach der von den Herren Rubens und Nichols[2]) erdachten Methode der Reststrahlen zu ermitteln, ist Verfasser in folgender Weise verfahren.

Zwischen der Funkenstrecke $F$ und dem Spalt $S$ (vgl. Fig. 4) wird ein Flussspatkörper $K$[3]) angebracht. Durch die

1) Nach dem Vorgange von J. Pauer, Wied. Ann. **61**. p. 363—379. 1897.

2) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. **60**. p. 418—462. 1897.

3) Von C. Zeiss ist das schwierige Stück in vortrefflicher Ausführung bereitwilligst angefertigt worden.

sphärischen Flächen 0 bez. 5 werden die von $F$ kommenden Strahlen parallel bez. convergent gemacht. Innerhalb des Körpers werden die Strahlen viermal in Flussspat an Luft unter Einfallswinkeln von 20° reflectirt. Damit man erkennen kann, ob das Funkenbild richtig auf dem Spalt entworfen wird, muss man — wegen der sonst nicht ausreichenden Helligkeit — die Flächen 1, 3 und 2, 4 des Körpers mit einem Belage von amalgamirtem Stanniol versehen. Nach der Justirung wurde der Belag entfernt. Dann wurde die zu untersuchende Flüssigkeit an die beiden Flussspatflächen herangebracht und mit zwei mattirten kleinen Glasplatten bedeckt. War so bei

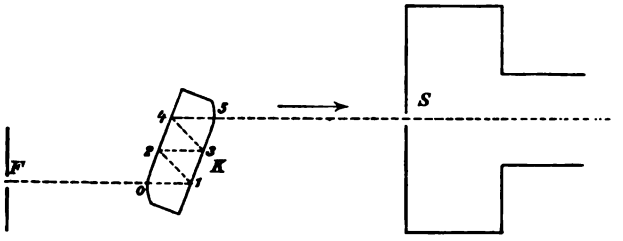



Fig. 4.

halbstündiger Exposition ein Spectrum der reflectirten Strahlen aufgenommen, dann wurde darüber ein Spectrum der direct vom Funken kommenden Strahlen photographirt.

9. Für die meisten Versuche wurden auf den Rat des Hrn. V. Schumann sogenannte Kupferdruckplatten von Gebhardt (Berlin NW., Schumannstr. 14) benutzt. Dieselben waren fast kornlos. Die Platten wurden vom Verfasser selbst in Stücke von $3 \times 4$ cm geschnitten; hierzu diente eine sehr bequeme kleine Maschine von R. Fuess, Steglitz. Die brechbarsten Strahlen werden auf den im Handel befindlichen Trockenplatten stets ziemlich schwach erhalten. Nur durch die grosse Güte des Hrn. Schumann, der mir acht seiner neuen ausgezeichneten Platten[1]) sandte, war es mir möglich, bei Sylvin, Quarz und Kalkspat die brechbarsten Strahlen zu erhalten.

10. In Tab. 1 sind die Spectrallinien zusammengestellt, für welche die Brechungsexponenten bestimmt sind.

Die Wellenlänge der meisten Linien ist den dankenswerten

1) V. Schumann, Ann. d. Phys. 5. p. 349—374. 1901.

neuen Messungen der Herren F. Exner und E. Haschek[1]) entnommen; die brechbarsten Al-Linien hat Hr. C. Runge[2]) gemessen. Die Elemente Al, Cd, Au, Pb, Sb wurden im Funkenspectrum (grosses Inductorium, Deprezunterbrecher, Leydener Flasche) verdampft; H und Hg wurden im Geisslerrohre, K, Li, Na in der Bunsenflamme zum Leuchten gebracht.[3]) Auf die Antimonlinie 702 hat mich Hr. Grünbaum aufmerksam gemacht.

Tabelle 1.

| Nr. | Element | Wellenlänge $\lambda$ in $\mu\mu$ gemessen | Beobachter | Nr. | Element | Wellenlänge $\lambda$ in $\mu\mu$ gemessen | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Al | 185,409 | C. Runge | 22 | Al | 308,227 | Exner u. Haschek |
| 2 | Al | 186,220 | „ | 23 | Au | 312,280 | „ |
| 3 | Al | 193,529 | „ | 24 | Cd | 340,358 | „ |
| 4 | Al | 197,76 | Exner u. Haschek | 25 | Al | 358,702 | „ |
| 5 | Al | 198,990 | C. Runge | 26 | Al | 394,415 | Exner u. Haschek |
| 6 | Al | 200,09 | Exner u. Haschek | 27 | H | 410,185 | Ames[4]) |
| 7 | Au | 204,470 | „ | 28 | H | 434,066 | „ |
| 8 | Au | 208,216 | „ | 29 | Cd | 441,587 | Exner u. Haschek |
| 9 | Au | 211,078 | „ | 30 | Cd | 467,832 | „ |
| 10 | Cd | 214,45 | „ | 31 | H | 486,149 | Ames |
| 11 | Cd | 219,46 | „ | 32 | Cd | 508,606 | Kayser u. Runge[5]) |
| 12 | Cd | 224,00 | „ | 33 | Cd | 533,83 | Thalén |
| 13 | Cd | 231,29 | „ | 34 | Hg | 546,10 | Kayser u. Runge |
| 14 | Au | 242,810 | „ | 35 | Pb | 560,70 | Lécoq |
| 15 | Au | 250,333 | „ | 36 | Na | 589,31 | Mittel |
| 16 | Cd | 257,317 | „ | 37 | Au | 627,84 | Kayser u. Runge |
| 17 | Al | 263,20 | „ | 38 | Cd | 643,88 | Ames |
| 18 | Au | 267,610 | „ | 39 | H | 656,304 | „ |
| 19 | Cd | 274,871 | „ | 40 | Li | 670,82 | Kayser u. Runge |
| 20 | Al | 281,640 | „ | 41 | Sb | 702,0 | Huggins |
| 21 | Au | 291,368 | „ | 42 | K | 768,24 | Kayser u. Runge |

1) F. Exner u. E. Haschek, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **106.** IIa. Cd p. 61—63; Al p. 61—66. 1897; **107.** IIa. Au p. 792—796. 1898.

2) C. Runge, Wied. Ann. **55.** p. 44—48. 1895.

3) Die K-Linie war sehr schwach; zweckmässiger wäre es wohl gewesen, eine gegossene KCl-Stange in der Flamme eines Linnemann'schen Brenners zu erhitzen, nach dem Vorgange von du Bois und Gumlich mit NaCl.

4) J. S. Ames, Phil. Mag. (5) **30.** p. 30 (Cd), p. 48 (H). 1890.

5) H. Kayser u. E. Runge, Wied. Ann. **41.** Li p. 307; K p. 312. 1890; **43.** Cd p. 399; Hg p. 403. 1891; **46.** Au p. 230. 1892.

### II. Die Ketteler-Helmholtz'sche Dispersionsformel.

11. Einen bisher stets bewährten Führer für das Studium der Dispersion einer Substanz besitzen wir in der Ketteler-Helmholtz'schen Dispersionsformel, welche (unter Vernachlässigung der Absorption bei der Wellenlänge $\lambda$) lautet:

$$(I) \qquad n^2 = 1 + \sum \frac{m_k \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2};$$

$n$ ist der Brechungsexponent der Substanz für Strahlen der Wellenlänge $\lambda$; gewöhnlich werden für $n$ und $\lambda$ die in Luft gemessenen Werte angegeben; $m_k$ und $\lambda_k$ sind Constanten, die folgende physikalische Bedeutung haben. Nach der von Hrn. Drude entwickelten elektromagnetischen Dispersionstheorie[1]) bestehen die isolirenden Substanzen aus mehreren Ionengattungen; der Einfluss jeder dieser Ionengattungen auf den Brechungsexponenten $n$ wird durch ein Glied der $\Sigma$ in Formel (I) dargestellt. $m_k$ ist die Dielektricitätsconstante der $k^{\text{ten}}$ Ionengattung; $1 + \Sigma m_k$ ist nach der Theorie gleich der beobachteten Dielektricitätsconstante $D$ der Substanz für unendlich lange Wellen. Durch die auffallende Strahlung $\lambda_k$ werden die Ionen der $k^{\text{ten}}$ Gattung zum Mitschwingen veranlasst. Die Wellenlänge der Resonanz hervorrufenden Strahlen kann direct bestimmt werden; denn für diese Strahlen zeigt die Substanz ein etwa ebenso grosses Reflexions- und Absorptionsvermögen, wie ein Metall für sichtbare Strahlen. Für Strahlen, deren Wellenlänge $\lambda_k$ sehr nahe liegt, nimmt der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge sehr stark zu. Wegen dieser Eigenschaften der Strahlen $\lambda_k$ sagt man, die Substanz zeige bei $\lambda_k$ anomale Dispersion, sie besitze einen Streifen metallischer Absorption oder einen Streifen metallischer Reflexion.

12. Die einfachste Form nimmt die Gleichung (I) an, wenn nur eine resonanzfähige Ionengattung vorhanden ist; dann wird (I)

$$(II) \qquad n^2 = 1 + \frac{m' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2}.$$

Die Gleichung stellt die beobachteten Exponenten von Xylol (p. 638) befriedigend dar. Die Eigenschwingung $\lambda'$ liegt

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik p. 352. S. Hirzel, Leipzig 1900.

im Ultraviolett. Bei den meisten Substanzen sind noch andere Eigenschwingungen vorhanden, deren Wellenlänge $\lambda''$ so klein gegen die zu beobachtenden $\lambda$ ist, dass das Glied $m'' \lambda^2/(\lambda^2 - \lambda''^2)$ für das Gebiet der beobachteten Brechungsindices als constant angesehen werden kann. Dann nimmt die Dispersionsformel, wenn man $m$ statt $m''$ setzt, die Gestalt an

$$\text{(III)} \qquad n^2 = m + \frac{m' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2}.$$

Diese Formel ist besonders wichtig, weil dieselbe die Brechungsexponenten fast aller durchsichtigen Medien im sichtbaren Gebiet befriedigend darstellt. Kennt man drei Brechungsexponenten $n_1$, $n_2$, $n_3$ für drei möglichst verschiedene Wellenlängen $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, so berechnet sich

$$\lambda'^2 = \frac{\lambda_3^2 (\lambda_1 - \lambda_2^2) - \lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) C}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) C},$$

worin

$$C = \frac{(n_2^2 - n_1^2)}{(n_3^2 - n_1^2)}$$

zu setzen ist. Ferner berechnet sich

$$m' = \frac{(n_3^2 - n_1^2)(\lambda_1^2 - \lambda'^2)(\lambda_3^2 - \lambda'^2)}{\lambda'^2 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)};$$

endlich ist

$$m = n_2^2 - \frac{m' \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda'^2}.$$

Die Constanten dieser Gleichung (III) hat Verfasser für folgende Substanzen berechnet: Alkohol, Benzol, Baryum-Quecksilber-Jodidlösung, Cassiaöl, Monobromnaphtalin und Schwefel.

Die Eigenschwingungen im Ultraroten liegen meistens bei so grossen Wellenlängen, dass ihr Einfluss auf die beobachteten Brechungsexponenten vernächlässigt werden kann, wie es bei Aufstellung der Formeln (II) und (III) geschehen ist. Hat eine ultrarote Eigenschwingung merklichen, aber kleinen Einfluss auf die beobachteten Brechungsexponenten, so kann man das betreffende Glied in Reihenform darstellen:

$$-\frac{m'' \lambda^2}{\lambda''^2 - \lambda^2} = -m'' \left(\frac{\lambda^2}{\lambda''^2}\right) - m'' \left(\frac{\lambda^2}{\lambda''^2}\right)^2,$$

und braucht nur Glieder erster Ordnung zu berücksichtigen. Setzt man wie Ketteler $k = (m''/\lambda''^2)$, so erhält man

$$(IV) \qquad n^2 = m + \frac{m'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} - k\lambda^2.$$

Die Constanten dieser Formel (IV) hat Verfasser für Schwefelkohlenstoff und Wasser aus den in Luft gemessenen, für Flussspat aus den im Vacuum gemessenen Exponenten und Wellenlängen berechnet.

Für die ordentlichen Exponenten im Quarz haben die Herren Rubens und Nichols die Constanten folgender Gleichung bestimmt:

$$(V) \qquad n^2 = m + \frac{m'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} - \frac{m''\lambda^2}{\lambda''^2 - \lambda^2} - \frac{m'''\lambda^2}{\lambda'''^2 - \lambda^2}.$$

Die Constanten $\lambda'' = 8{,}85\ \mu$ und $\lambda''' = 20{,}75\ \mu$ sind nicht berechnet, sondern es ist direct die starke Reflexion dieser Strahlen beobachtet worden; $m'$ und $\lambda'$ sind den Angaben Ketteler's entnommen. Für Flussspat hat Hr. Rubens zwei Streifen $\lambda''$ und $\lambda'''$ metallischer Reflexion bestimmt. Setzt man diese Werte in (V) ein, und versucht die anderen Constanten aus den beobachteten Brechungsexponenten zu berechnen, so sieht man, dass die Exponenten sich durchaus nicht durch (V) darstellen lassen. Deshalb hat Verfasser für Flussspat die Gleichung aufgestellt

$$(VI) \qquad n^2 = m + \frac{m'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} - \frac{m''\lambda^2}{\lambda''^2 - \lambda^2} - \frac{m'''\lambda^2}{\lambda'''^2 - \lambda^2} - \frac{m''''\lambda^2}{\lambda''''^2 - \lambda^2}.$$

Für $\lambda''$ und $\lambda'''$ sind die von Hrn. Rubens beobachteten Werte 24,0 und 31,6 $\mu$ eingesetzt. Ferner ist $m''' = 1{,}21\ m''$ angenommen, weil nach Hrn. Rubens die Strahlen $\lambda'''$ 1,21 mal stärker reflectirt werden als die Strahlen $\lambda''$. Endlich ist $\Sigma m = D$, gleich der beobachteten Dielektricitätsconstante gesetzt.

Die Brechungsexponenten von Steinsalz und Sylvin lassen sich nur dann befriedigend darstellen, wenn man zwei Streifen $\lambda'$ und $\lambda''$ metallischer Reflexion im Ultraviolett annimmt. Verfasser hat daher für Sylvin die Gleichung (VII), für Steinsalz die Gleichung (VIII) gewählt

$$(VII) \qquad n^2 = m + \frac{m'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} + \frac{m''\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda''^2} - \frac{m'''\lambda^2}{\lambda'''^2 - \lambda^2},$$

$$(VIII) \qquad n^2 = m + \frac{m'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} + \frac{m''\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda''^2} - \frac{m'''\lambda^2}{\lambda'''^2 - \lambda^2} - k\lambda^2.$$

In (VII) und (VIII) sind für $\lambda'''$ die von Rubens und Aschkinass beobachteten Werte eingesetzt.

13. Die Brechungsindices von Steinsalz für ultraviolette Strahlen sind in Fig. 5 graphisch dargestellt. Die nach (VIII) berechneten Indices sind durch Kreuze, die beobachteten Indices sind durch kleine Kreise bezeichnet. Bei $\lambda' = 110\ \mu\mu$ und $\lambda'' = 156\ \mu\mu$ liegen Streifen metallischer Absorption. Für

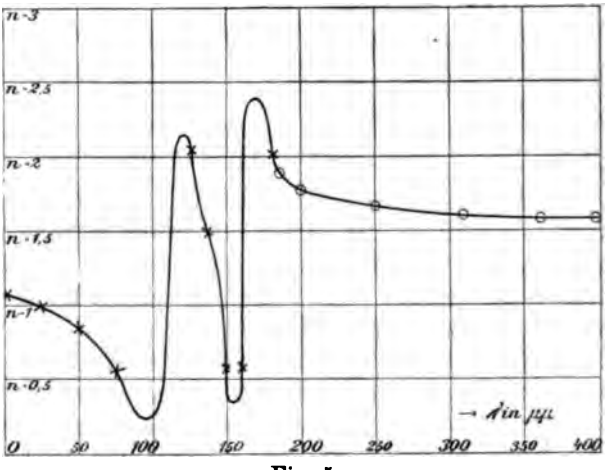



Fig. 5.

Wellenlängen zwischen 0 und 50 $\mu\mu$ ist der Index nahezu 1. Die Brechungsindices in unmittelbarer Nähe der Streifen $\lambda'$ und $\lambda''$ lassen sich nicht aus (VIII) berechnen; vielmehr ist hier ein ähnlicher Verlauf der Indices angenommen, wie ihn Hr. Pflüger[1]) für die Streifen anomaler Dispersion bei Fuchsin, Cyanin und anderen Substanzen direct beobachtet hat.

14. Von früheren Autoren ist die Ketteler-Helmholtz'sche Dispersionsformel gewöhnlich in nachstehender Form angegeben:

$$n^2 = b^2 + \frac{M_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} - \frac{M_2}{\lambda_2^2 - \lambda^2}.$$

Setzt man $b^2 = m + m' + m''$, $\lambda_1 = \lambda'$, $\lambda_2 = \lambda''$, $M_1 = m'\lambda'^2$, $M_2 = m''\lambda''^2$, so erhält man die vom Verfasser angewandte Form

$$n^2 = m + \frac{m'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} - \frac{m''\lambda^2}{\lambda''^2 - \lambda^2}.$$

1) A. Pflüger, Wied. Ann. **56**. p. 412—432. 1895.

Diese Form hat den Vorzug, dass alle Constanten eine einfache physikalische Bedeutung haben.

### III. Resultate.

#### Flussspat, $CaF_2$.

15. Es wurde das grosse Prisma des hiesigen Physikalischen Institutes untersucht. $\varphi = 60^0\,22''$. Höhe 54 mm, brechende Flächen 54 × 50 mm. Platten 51, 53.

Von den nachstehenden Constanten der Dispersionsformel (VI) sind vier beobachtet oder aus Beobachtungen hergeleitet, fünf sind aus den zwischen 1,31 und 1,51 liegenden Brechungsexponenten berechnet. $D$ ist die Dielektricitätsconstante für elektrische Wellen.

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}361140$ | $\lambda' = 0{,}0950790\ \mu$ (ber.) |
| $m' = 0{,}677860$ | $\lambda'' = 24{,}0000\ \mu$ (beob.) |
| $m'' = 0{,}160020$ | $\lambda''' = 31{,}6000\ \mu$ (beob.) |
| $m''' = 0{,}193620$ | $\lambda'''' = 40{,}526\,05\ \mu$ (ber.) |
| $m'''' = 4{,}527470$ | |
| $\Sigma m = 6{,}920110$ angen. | Die reciproke, relative Dispersion ist: |
| $D = 6{,}92$ beob.[1]) | $\nu = \frac{n_{589} - 1}{n_{486} - n_{656}} = 95{,}4\,.$ |
| $m''' = 1{,}21\ m'''$ angen. | |

In Tab. 2 sind die vom Verfasser bestimmten Brechungsexponenten angegeben und mit den berechneten Werten zusammengestellt. Die Differenz $n_{ber.} - n_{beob.}$ ist, wie auch in den späteren Tabellen, in Einheiten der letzten Decimale angegeben und mit $\delta$ bezeichnet. Die Werte stimmen mit den von Hrn. Sarasin[2]) und von Hrn. Simon[3]) angegebenen befriedigend überein; nur giebt Sarasin für 193 $\mu\mu$ einen viel zu grossen Exponenten an; Simon hat keine kürzeren Strahlen als 202 $\mu\mu$ untersucht.

1) H. Starke, Wied. Ann. **60**. p. 641. 1897.

2) E. Sarasin, Arch. d. sciences phys. et not. de Genève (3) **10**. p. 303. 1883.

3) H. Th. Simon, Wied. Ann. **53**. p. 553. 1894.

Tabelle 2.

Flussspat, $t = 18°$. Exponenten nach Martens.

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ | $\lambda$ in $\mu\mu$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 95 | metall. Reflexion ber. | | | 291 | 1,45586 | 1,45585 | −1 |
| 185 | 1,51024 | 1,51022 | −2 | 308 | 1,45257 | 1,45258 | +1 |
| 186 | 1,50930 | 1,50927 | −3 | 312 | 1,45187 | 1,45187 | 0 |
| 193 | 1,50150 | 1,50151 | +1 | 340 | 1,44774 | 1,44776 | +2 |
| 197 | 1,49755 | 1,49755 | 0 | 358 | 1,44560 | 1,44562 | +2 |
| 198 | 1,49643 | 1,49647 | +4 | 394 | 1,44231 | 1,44233 | +2 |
| 200 | 1,49547 | 1,49552 | +5 | 410 | 1,44112 | 1,44116 | +4 |
| 204 | 1,49190 | 1,49194 | +4 | 434 | 1,43960 | 1,43964 | +4 |
| 208 | 1,48907 | 1,48911 | +4 | 441 | 1,43920 | 1,43921 | +1 |
| 211 | 1,48705 | 1,48708 | +3 | 467 | 1,43787 | 1,43788 | +1 |
| 214 | 1,48480 | 1,48482 | +2 | 486 | 1,43706 | 1,43708 | +2 |
| 219 | 1,48167 | 1,48172 | +5 | 508 | 1,43619 | 1,43621 | +2 |
| 224 | 1,47911 | 1,47912 | +1 | 533 | 1,43535 | 1,43537 | +2 |
| 231 | 1,47538 | 1,47535 | +2 | 546 | 1,43497 | 1,43500 | +3 |
| 242 | 1,47025 | 1,47023 | −2 | 589 | 1,43385 | 1,43388 | +3 |
| 250 | 1,46732 | 1,46732 | 0 | 627 | 1,43302 | 1,43305 | +3 |
| 257 | 1,46490 | 1,46491 | +1 | 643 | 1,43271 | 1,43275 | +4 |
| 263 | 1,46302 | 1,46305 | +3 | 656 | 1,43251 | 1,43253 | +2 |
| 267 | 1,46175 | 1,46175 | 0 | 670 | 1,43226 | 1,43229 | +3 |
| 274 | 1,45976 | 1,45976 | 0 | 768 | 1,43093 | 1,43096 | +3 |
| 281 | 1,45806 | 1,45806 | 0 | | | | |

16. Die Exponenten für ultrarote Strahlen sind von einer grösseren Anzahl von Beobachtern [Rubens[1]), Rubens und Snow[2]), Carvallo[3]), Rubens[4]), Paschen[5])], zuerst von Hrn. Rubens, am genauesten wohl von Hrn. Paschen bestimmt worden. In Tab. 3 sind die beobachteten und berechneten Exponenten zusammengestellt.

1) H. Rubens, Wied. Ann. **45.** p. 254. 1892.

2) H. Rubens u. B. W. Snow, Wied. Ann. **46.** p. 540. 1892.

3) E. Carvallo, Compt. rend. **116.** p. 1189. 1893.

4) H. Rubens, Wied. Ann. **51.** p. 390. 1894.

5) F. Paschen, Wied. Ann. **53.** p. 325. 1894; **56.** p. 762—767. 1895; Ann. d. Phys. **4.** p. 299—303. 1901. Bei der zuletzt genannten Bestimmung beträgt die Temperatur nur 10,5°, daher sind die Resultate nicht ohne weiteres mit den früher erhaltenen vergleichbar.

Tabelle 3.

Flussspat, $t = 18°$.

| Beobachter | $\lambda$ in $\mu\mu$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| Paschen | 0,8840 | 1,42682 | 1,42982 | 0 |
| Rubens u. Snow / Carvallo | 1,009 | 1,42902 | 1,42891 | −11 |
| Paschen | 1,1786 | 1,42787 | 1,42792 | + 5 |
| „ | 1,3756 | 1,42690 | 1,42694 | + 4 |
| Carvallo | 1,444 | 1,42676 | 1,42662 | −14 |
| Paschen | 1,4733 | 1,42641 | 1,42647 | + 6 |
| „ | 1,5715 | 1,42596 | 1,42601 | + 5 |
| „ | 1,7680 | 1,42507 | 1,42508 | + 1 |
| „ | 1,9153 | 1,42437 | 1,42436 | − 1 |
| „ | 1,9644 | 1,42413 | 1,42411 | − 2 |
| „ | 2,0626 | 1,42359 | 1,42361 | + 2 |
| „ | 2,1608 | 1,42308 | 1,42308 | 0 |
| „ | 2,3573 | 1,42199 | 1,42200 | + 1 |
| „ | 2,5537 | 1,42088 | 1,42084 | − 4 |
| „ | 2,6519 | 1,42016 | 1,42023 | + 7 |
| Rubens | 2,93 | 1,41820 | 1,41839 | +19 |
| Paschen | 2,9466 | 1,41826 | 1,41827 | + 1 |
| „ | 3,2413 | 1,41612 | 1,41612 | 0 |
| „ | 3,5359 | 1,41379 | 1,41377 | − 2 |
| „ | 3,8306 | 1,41120 | 1,41122 | + 2 |
| „ | 4,1252 | 1,40855 | 1,40845 | −10 |
| „ | 4,7146 | 1,40238 | 1,40226 | −12 |
| Rubens | 5,18 | 1,39700 | 1,39674 | −26 |
| Paschen | 5,3036 | 1,39529 | 1,39517 | −12 |
| „ | 5,8932 | 1,38719 | 1,38713 | − 6 |
| „ | 6,4825 | 1,37819 | 1,37810 | − 9 |
| „ | 7,0718 | 1,36805 | 1,36803 | − 2 |
| „ | 7,6612 | 1,35680 | 1,35688 | + 8 |
| „ | 8,2505 | 1,34444 | 1,34447 | + 3 |
| „ | 8,8398 | 1,33079 | 1,33092 | +13 |
| „ | 9,4291 | 1,31612 | 1,31601 | −11 |
| „ | 51,2 | 3,47 | 3,83 | — |
| „ | 61,1 | 2,66 | 3,25 | — |
| „ | ∞ | 2,63 | 2,63 | — |

Dass Hr. Rubens bei Bestimmung der Streifen $\lambda'' = 24{,}0\,\mu$ und $\lambda''' = 31{,}6\,\mu$ keinen Streifen bei $40\,\mu$ hat isoliren können, lässt sich durch den schnellen Abfall der Strahlungsenergie nach der Seite der grösseren Wellenlängen hin erklären. Aus den Beob-

achtungen von Rubens geht hervor, dass das Reflexionsvermögen bei 40 $\mu$ wahrscheinlich ebenso gross ist, wie bei 24 und 31,6 $\mu$. Eine Flussspatplatte von 5,6 mm Dicke lässt bei 51,2 $\mu$ 4 Proc., bei 61,1 $\mu$ 6 Proc. der auffallenden Strahlung durch. Die Brechungsexponenten für 51,2 und 61,1 $\mu$ sind nach der einfachen Fresnel'schen Formel von Rubens und Aschkinass berechnet. Von grossem Interesse wäre eine genauere Bestimmung dieser Indices aus der Ablenkung der Strahlen in einem spitzwinkligen Flussspatprisma.

17. Nach Hrn. Schumann ist Flussspat für Strahlen von noch kleinerer Wellenlänge als 185 $\mu\mu$ durchlässig. Diese Strahlen werden schon in Luftschichten von einigen Millimetern Dicke vollkommen absorbirt. Man kann daher die Wellenlänge der Strahlen mittels Beugungsgitter und die Ablenkung in einem Flussspatprisma nur messen, wenn man die Strahlen im Vacuum erzeugt und photographirt. Es entsteht die Frage, welches sind die absoluten Brechungsindices von Flussspat für diese Strahlen kleinster, im Vacuum gemessener Wellenlänge?

Um diese Frage mit einiger Wahrscheinlichkeit beantworten zu können, hat Verfasser aus den absoluten Indices für drei im Vacuum gemessene Wellenlängen die folgenden Constanten der Ketteler-Helmholtz'schen Dispersionsformel (IV) berechnet:

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}3620$ | $k = 0{,}00322840$ |
| $m' = 0{,}678805$ | $\lambda' = 0{,}0951862\ \mu.$ |

$k$ ist übrigens direct aus den auf p. 615 gegebenen Constanten berechnet. Tab. 4 giebt die berechneten Indices.

Tabelle 4.

Flussspat im Vacuum, $t = 18°$.

| $\lambda$ absol. in $\mu\mu$ | $n$ absol. berechnet | $\lambda$ absol. in $\mu\mu$ | $n$ absol. berechnet |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,1670 | 150 | 1,5802 |
| 65 | 0,8772 | 160 | 1,5529 |
| 95,19 | metall. Refl. ber. | 170 | 1,5328 |
| 115 | 1,8748 | 180 | 1,5176 |
| 120 | 1,7862 | 185,477 | 1,51074 |
| 125 | 1,7250 | 242,883 | 1,47067 |
| 130 | 1,6803 | 768,45 | 1,43132 |
| 140 | 1,6195 | | |

Die kürzesten von Hrn. Schumann photographirten Strahlen werden, wie mir Schumann freundlichst mitteilte, im Flussspatprisma von 60° um 21° mehr abgelenkt als die brechbarsten Al-Linien. Hieraus berechnet sich der grösste beobachtete Brechungsexponent $n_{max.} = 1{,}724$. Nach Tab. 4 ist dieser Exponent für die Wellenlänge 125 $\mu\mu$ berechnet und es folgt mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass Hr. Schumann keine kürzeren Strahlen als 125 $\mu\mu$ photographirt hat. Wahrscheinlich ist der Grenzwert noch etwa 2 $\mu\mu$ höher; denn die Differenz $m - 1 > 0$ zeigt, dass wahrscheinlich zwei Absorptionsstreifen vorhanden sind; der eine würde eine etwas grössere Wellenlänge als 95 $\mu\mu$ haben und bei etwas grösserer Wellenlänge als 125 $\mu\mu$ das Ansteigen des Exponenten auf 1,724 bewirken.

### Sylvin, KCl.

18. Das untersuchte Sylvinprisma hatte den brechenden Winkel $\varphi = 38° 53' 17''$; die Höhe war 13 mm, die brechenden Flächen waren 13 × 19 mm gross. Platten 58, 59.

Das untersuchte Prisma zeigt die Eigentümlichkeit, Strahlen von 193 $\mu\mu$ viel stärker zu absorbiren, als die benachbarten Strahlen grösserer und kleinerer Wellenlänge. Aehnliche Absorptionsstreifen fand Hr. Rubens[1]) bei 3,2 $\mu$ und 7,2 $\mu$.

Constanten der Dispersionsformel (VII):

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}25841$ | |
| $m' = 0{,}672011$ | $\lambda' = 0{,}115265\ \mu$ (ber.) |
| $m'' = 0{,}244603$ | $\lambda'' = 0{,}160780\ \mu$ (ber.) |
| $m''' = 1{,}93343$ | $\lambda''' = 61{,}1000\ \mu$ (beob.)[2]) |
| $\Sigma m = 4{,}10845$ | $\nu = \frac{n_{589} - 1}{n_{486} - n_{656}} = 44{,}0$ |
| $D = 4{,}94$ beob.[3]) | |

1) H. Rubens, Wied. Ann. **53.** p. 285. 1894.

2) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **65.** p. 241—256. 1898.

3) H. Starke, Wied. Ann. **60.** p. 641. 1897.

Tabelle 5.

Sylvin, $t = 18°$. Exponenten nach Martens.

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | 1,117 | — | 274 | 1,56380 | 1,56380 | 0 |
| 80 | — | 0,716 | — | 281 | 1,55830 | 1,55831 | +1 |
| 114 | metall. Reflexion ber. | | | 291 | 1,55134 | 1,55134 | 0 |
| 125 | — | 2,240 | — | 308 | 1,54130 | 1,54129 | −1 |
| 152 | — | 0,831 | — | 312 | 1,53920 | 1,53920 | 0 |
| 160,7 | metall. Reflexion ber. | | | 340 | 1,52720 | 1,52716 | −4 |
| 185 | 1,82704 | 1,82704 | 0 | 358 | 1,52109 | 1,52111 | +2 |
| 186 | 1,81847 | 1,81848 | +1 | 394 | 1,51213 | 1,51209 | −4 |
| 193 | absorbirt | | | 410 | 1,50901 | 1,50896 | −5 |
| 197 | 1,73114 | 1,73111 | −3 | 434 | 1,50497 | 1,50492 | −5 |
| 198 | 1,72432 | 1,72437 | +5 | 441 | 1,50384 | 1,50379 | −5 |
| 200 | 1,71864 | 1,71862 | −2 | 467 | 1,50038 | 1,50036 | −2 |
| 204 | 1,69811 | 1,69811 | 0 | 486 | 1,49835 | 1,49832 | −3 |
| 208 | 1,68302 | 1,68304 | +2 | 508 | 1,49614 | 1,49613 | −1 |
| 211 | 1,67275 | 1,67274 | −1 | 533 | 1,49404 | 1,49403 | −1 |
| 214 | 1,66182 | 1,66178 | −4 | 546 | 1,49313 | 1,49312 | −1 |
| 219 | 1,64739 | 1,64741 | +2 | 560 | 1,49212 | 1,49212 | 0 |
| 224 | 1,63606 | 1,63603 | −3 | 589 | 1,49038 | 1,49038 | 0 |
| 231 | 1,62037 | 1,62033 | −4 | 627 | 1,48841 | 1,48843 | +2 |
| 242 | 1,60041 | 1,60040 | −1 | 643 | 1,48771 | 1,48772 | +1 |
| 250 | 1,58973 | 1,58976 | +3 | 656 | 1,48721 | 1,48721 | 0. |
| 257 | 1,58119 | 1,58120 | +1 | 670 | 1,48663 | 1,48665 | +2 |
| 263 | 1,57477 | 1,57478 | +1 | 768 | 1,48374 | 1,48371 | −3 |
| 267 | 1,57038 | 1,57038 | 0 | | | | |

19. Die von den Herren Rubens, Snow, Nichols und Trowbridge experimentell gefundenen Brechungsexponenten für ultrarote Strahlen sind in Tab. 6 mit den berechneten Werten zusammengestellt; vgl. auch Rubens u. Snow[1]),

1) H. Rubens u. B. W. Snow, Wied. Ann. **46.** p. 535—536. 1892. Messung der Wellenlänge mittels Interferenzstreifen. Die Verfasser geben $n_{589} = 1{,}4900$ an, während ich bei 18° 1,49038 gefunden habe (J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **63.** p. 238. 1871 bei 18° 1,49038). Diese Abweichung kann ihren Grund haben 1. darin, dass Rubens u. Snow bei höherer Temperatur als 18° gearbeitet haben; 2. in dem Zusammentreffen der möglichen Beobachtungsfehler; 3. in einem systematischen Fehler, den Rubens u. Snow begangen haben können, da sie keine sehr genaue Controle über die Ebenheit der Prismenflächen hatten. Rubens u. Snow haben in dieser Arbeit, ebenso wie

Rubens[1]), Trowbridge[2]), Rubens u. Trowbridge[3]) und Rubens u. Nichols.[4])

Tabelle 6.

Sylvin, $t = 18°$.

| Beobachter | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| Rubens u. Snow | 0,845 | 1,4823 | 1,4821 | − 2 |
| „ | 0,893 | 1,4813 | 1,4813 | 0 |
| Rubens | 0,940 | 1,4809 | 1,4806 | − 3 |
| Rubens u. Snow | 0,944 | 1,4806 | 1,4805 | − 1 |
| Trowbridge | 0,982 | 1,4802 | 1,4801 | − 1 |
| Rubens u. Snow | 1,003 | 1,4799 | 1,4798 | − 1 |
| „ | 1,070 | 1,4793 | 1,4792 | − 1 |
| „ | 1,145 | 1,4786 | 1,4785 | − 1 |
| Trowbridge | 1,179 | 1,4780 | 1,4783 | + 3 |
| „ | 1,473 | 1,4770 | 1,4768 | − 2 |
| Rubens | 1,584 | 1,4765 | 1,4764 | − 1 |
| Trowbridge | 1,768 | 1,4760 | 1,4759 | − 1 |
| Rubens | 2,23 | 1,4749 | 1,4749 | 0 |
| Trowbridge | 2,947 | 1,4742 | 1,4738 | − 4 |
| Rubens | 3,2 | absorbirt | — | — |
| Trowbridge | 4,125 | 1,4721 | 1,4721 | 0 |
| „ | 4,714 | 1,4711 | 1,4711 | 0 |
| Rubens | 4,81 | 1,4709 | 1,4709 | 0 |

es in den späteren Arbeiten geschehen ist, die Differenz der Ablenkungen für ultrarote und für Na-Lichtstrahlen gemessen; daher sind alle Exponenten mit demselben Fehler wie $n_{589}$ behaftet. Um diesen Fehler zu eliminiren, habe ich die von Rubens u. Snow angegebenen Exponenten um 0,0004 erhöht.

1) H. Rubens, Wied. Ann. **54.** p. 481. 1895. Messung der Wellenlänge mittels eines Flussspatprismas. Da Rubens $n_{589} = 1{,}4900$ annimmt, habe ich auch diese Exponenten um 0,0004 erhöht.

2) J. Trowbridge, Wied. Ann. **65.** p. 612—613. 1898. Wellenlänge mit Gitter gemessen. Für Na-Licht ist der ganz erheblich verkehrte Exponent $n_{589} = 1{,}48984$ gemessen; daher habe ich die Werte um 0,00054 erhöht.

3) H. Rubens u. J. Trowbridge, Wied. Ann. **60.** p. 733. 1897. Gitter.) Die in Tab. 6 angegebenen Werte sind neu berechnet, unter der Annahme $n_{589} = 1{,}4904$. Für 18,10 geben die Verfasser infolge eines Druckfehlers den Wert 1,4162 an.

4) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. **60.** p. 451. 1897. 20,6 bez. 22,5 $\mu$ sind Reststrahlen von Quarz bez. Flussspat.

Tabelle 6 (Fortsetzung).

| Beobachter | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| Trowbridge | 5,137 | 1,4706 | 1,4703 | − 3 |
| „ | 5,304 | 1,4699 | 1,4700 | + 1 |
| „ | 5,471 | 1,4699 | 1,4696 | − 3 |
| „ | 5,893 | 1,4688 | 1,4688 | 0 |
| Rubens | 5,95 | 1,4686 | 1,4687 | + 1 |
| Trowbridge | 6,482 | 1,4678 | 1,4674 | − 4 |
| „ | 7,080 | 1,4660 | 1,4660 | 0 |
| Rubens | 7,2 | absorbirt | — | — |
| Trowbridge | 7,661 | 1,4645 | 1,4644 | − 1 |
| „ | 8,840 | 1,4606 | 1,4608 | + 2 |
| „ | 9,006 | 1,4603 | 1,4602 | − 1 |
| Rubens u. Trowbridge | 10,01 | 1,4565 | 1,4567 | + 2 |
| Trowbridge | 10,193 | 1,4549 | 1,4560 | + 11 |
| „ | 11,197 | 1,4522 | 1,4519 | − 3 |
| Rubens u. Trowbridge | 14,14 | 1,4362 | 1,4373 | + 11 |
| „ | 18,10 | 1,4108 | 1,4104 | − 4 |
| Rubens u. Nichols | 20,60 | 1,3882 | 1,3882 | 0 |
| „ | 22,50 | 1,3692 | 1,3681 | − 11 |
| Martens | 40,0 | — | 0,855 | — |
| Rubens u. Aschkinass | 61,1 | metall. Reflexion beobachtet | | |
| Martens | 72,0 | — | 3,009 | — |
| „ | ca. 100 | metall. Reflexion wahrscheinlich | | |
| Starke | $\infty$ | 2,223 | — | — |

Wie man aus den Tab. 5 u. 6 sieht, werden die Brechungsexponenten von Sylvin für das ganze durchgelassene Spectralgebiet zwischen den Wellenlängen 0,185 und 22 $\mu$ durch die Ketteler-Helmholtz'sche Dispersionsformel gut dargestellt. Die Dispersion von Sylvin ist in ihrem ganzen Verlaufe der von Steinsalz sehr ähnlich. Bei Steinsalz ist ausser den Streifen $\lambda''' = 51{,}2\ \mu$ wahrscheinlich ein vierter Streifen bei 87 $\mu$ vorhanden; bei Sylvin ist daher anzunehmen, dass ein Streifen metallischer Reflexion bei etwa 100 $\mu$ vorhanden ist. Dass dieser Streifen nicht wie bei Steinsalz merklichen Einfluss auf die beobachteten Brechungsexponenten im Ultrarot übt, ist durch die grössere Wellenlänge des Streifens und durch die bei Sylvin geringere Differenz $D - \Sigma m$ erklärlich.

Steinsalz, NaCl.

20. Prisma I. $\varphi = 40^\circ 4' 27''$, Höhe 38 mm, Flächen 38 × 20 mm.
Prisma II. $\varphi = 60^\circ 9' 23''$, Höhe 54 mm, Flächen 54 × 29 mm.
Platten 28, 31 (Pr. II); 35, 39 (Pr. I).

Constanten der Dispersionsformel (VIII):

$m = 1{,}155992$
$m' = 0{,}855461$
$m'' = 0{,}317791$
$m''' = 1{,}620760$
$\Sigma m = 3{,}950004$
$D = 6{,}29$ beob.[1])
$\lambda''''$ ber. $= 87{,}0\ \mu$

$k = 0{,}000309178$
$\lambda' = 0{,}110725\ \mu$ ber.
$\lambda'' = 0{,}156320\ \mu$ ber.
$\lambda''' = 51{,}2000\ \mu$ (beob.)

$$\nu = \frac{n_{589} - 1}{n_{486} - n_{656}} = 42{,}8$$

Tabelle 7.

Steinsalz, $t = 18^\circ$. Exponenten nach Martens.

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | | Mittel | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 40°-Prisma | 60°-Prisma | | | |
| 0 | — | — | — | 1,075 | — |
| 75 | — | — | — | 0,579 | — |
| 110 | metallische Reflexion berechnet | | | | |
| 120 | — | — | — | 2,541 | — |
| 148 | — | — | — | 0,591 | — |
| 156 | metallische Reflexion berechnet | | | | |
| 185 | 1,89332 | — | 1,89332 | 1,89331 | −1 |
| 186 | 1,88558 | — | 1,88558 | 1,88554 | −4 |
| 193 | 1,82809 | — | 1,82809 | 1,82813 | +4 |
| 197 | 1,80254 | — | 1,80254 | 1,80252 | −2 |
| 198 | 1,79580 | — | 1,79580 | 1,79585 | +5 |
| 200 | 1,79016 | — | 1,79016 | 1,79014 | −2 |
| 204 | 1,76951 | 1,76945 | 1,76948 | 1,76951 | +3 |
| 208 | 1,75416 | 1,75409 | 1,75413 | 1,75414 | +1 |
| 211 | 1,74361 | 1,74349 | 1,74355 | 1,74355 | 0 |
| 214 | 1,73225 | 1,73216 | 1,73221 | 1,73218 | −3 |
| 219 | 1,71717 | 1,71705 | 1,71711 | 1,71715 | +4 |
| 224 | 1,70519 | 1,70512 | 1,70516 | 1,70514 | −2 |
| 231 | 1,68845 | 1,68834 | 1,68840 | 1,68842 | +2 |
| 242 | 1,66699 | 1,66699 | 1,66699 | 1,66696 | −3 |
| 250 | 1,65542 | 1,65540 | 1,65541 | 1,65541 | 0 |
| 257 | 1,64604 | 1,64603 | 1,64604 | 1,64605 | +1 |
| 268 | 1,63904 | 1,63905 | 1,63904 | 1,63900 | −4 |

1) H. Starke, l. c.

Tabelle 7 (Fortsetzung).

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | | Mittel | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 40°-Prisma | 60°-Prisma | | | |
| 267 | 1,63418 | 1,63417 | 1,63417 | 1,63416 | −1 |
| 274 | 1,62691 | 1,62683 | 1,62687 | 1,62689 | +2 |
| 281 | 1,62084 | 1,62082 | 1,62083 | 1,62082 | −1 |
| 291 | 1,61309 | 1,61309 | 1,61309 | 1,61307 | −2 |
| 308 | 1,60191 | 1,60183 | 1,60187 | 1,60186 | −1 |
| 312 | 1,59959 | 1,59950 | 1,59954 | 1,59951 | −3 |
| 340 | 1,58606 | 1,58595 | 1,58601 | 1,58599 | −2 |
| 358 | 1,57918 | 1,57914 | 1,57916 | 1,57916 | 0 |
| 394 | 1,56889 | 1,56889 | 1,56889 | 1,56892 | +3 |
| 410 | 1,56533 | 1,56526 | 1,56530 | 1,56535 | +5 |
| 434 | 1,56073 | 1,56070 | 1,56072 | 1,56076 | +4 |
| 441 | 1,55949 | 1,55946 | 1,55947 | 1,55948 | +1 |
| 467 | 1,55555 | 1,55553 | 1,55554 | 1,55555 | +1 |
| 486 | 1,55317 | 1,55317 | 1,55317 | 1,55321 | +4 |
| 508 | 1,55070 | 1,55072 | 1,55071 | 1,55071 | 0 |
| 533 | 1,54829 | 1,54828 | 1,54829 | 1,54830 | +1 |
| 546 | 1,54725 | 1,54723 | 1,54724 | 1,54726 | +2 |
| 560 | 1,54606. | 1,54608 | 1,54607 | 1,54611 | +4 |
| 589 | 1,54414 | 1,54412 | 1,54413 | 1,54411 | −2 |
| 627 | 1,54183 | 1,54187 | 1,54185 | 1,54186 | +1 |
| 643 | 1,54104 | 1,54106 | 1,54105 | 1,54105 | 0 |
| 656 | 1,54049 | 1,54045 | 1,54047 | 1,54046 | −1 |
| 670 | 1,53980 | 1,53983 | 1,53982 | 1,53982 | 0 |
| 768 | 1,53643 | 1,53645 | 1,53644 | 1,53642 | −2 |

21. Die Exponenten von Steinsalz für ultrarote Strahlen sind von einer grösseren Anzahl von Beobachtern bestimmt worden; vgl. auch Langley[1]), Rubens[2]), Rubens und Snow[3]),

1) S. P. Langley, Ann. de chim. et phys. (6) **9.** p. 433—506. 1886; Ann. of the Astrophys. Observ. of the Smithson. Inst. **1.** p. 1—266. 1900. Die in der Tab. 8 unter Langley angegebenen Werte sind der zweiten Arbeit entnommen. Für $\lambda = 13{,}96\ \mu$ giebt Langley als berechneten Wert $n = 1{,}4365$ an; in Wirklichkeit berechnet sich aus den Langley'schen Constanten der Ketteler-Helmholtz'schen Dispersionsformel $n = 1{,}4635$. Dieser Fehler ist wegen des gleichen Druckfehlers in der unter Anm. 3 p. 625 angeführten Arbeit höchst befremdend.

2) H. Rubens, Wied. Ann. **45.** p. 254. 1892; **53.** p. 278. 1894; **54.** p. 482. 1895.

3) H. Rubens u. B. W. Snow, Wied. Ann. **46.** p. 535. 1892.

Paschen[1]), Rubens und Nichols[2]), Rubens und Trowbridge.[3])

Tabelle 8.

Steinsalz, $t = 18°$.

| Beobachter | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| Rubens u. Snow | 0,790 | 1,5358 | 1,5358 | 0 |
| Rubens | 0,840 | 1,5345 | 1,5346 | + 1 |
| „ | 0,955 | 1,5323 | 1,5326 | + 3 |
| Langley | 1,1420 | 1,5306 | 1,5304 | − 2 |
| Rubens u. Snow | 1,277 | 1,5293 | 1,5294 | + 1 |
| Langley | 1,4874 | 1,5284 | 1,5282 | − 2 |
| Rubens | 1,761 | 1,5271 | 1,5272 | + 1 |
| Langley | 1,7670 | 1,5274 | 1,5272 | − 2 |
| Rubens | 2,35 | 1,5255 | 1,5256 | + 1 |
| Langley | 2,6505 | 1,5249 | 1,5249 | 0 |
| „ | 3,1104 | 1,5240 | 1,5238 | − 2 |
| Rubens | 3,34 | 1,5233 | 1,5233 | 0 |
| Langley | 3,6288 | 1,5228 | 1,5226 | − 2 |
| Rubens | 4,01 | 1,5216 | 1,5216 | 0 |
| Langley | 4,1230 | 1,5215 | 1,5213 | − 2 |
| Rubens | 4,65 | 1,5197 | 1,5198 | + 1 |
| „ | 5,22 | 1,5180 | 1,5181 | + 1 |
| „ | 5,79 | 1,5159 | 1,5160 | + 1 |
| Langley | 6,4790 | 1,5134 | 1,5134 | 0 |
| Rubens | 6,78 | 1,5121 | 1,5121 | 0 |
| „ | 7,22 | 1,5102 | 1,5102 | 0 |
| „ | 7,59 | 1,5085 | 1,5084 | − 1 |
| „ | 8,04 | 1,5064 | 1,5062 | − 2 |
| „ | 8,67 | 1,5030 | 1,5028 | − 2 |

1) F. Paschen, Wied. Ann. **53.** p. 340. 1894.

2) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. **60.** p. 45. 1897.

3) H. Rubens u. J. Trowbridge, Wied. Ann. **60.** p. 733. 1897; **61.** p. 224. 1897. In der ersten Arbeit sind einige Druckfehler enthalten; so ist z. B. für $\lambda = 18{,}96$ der Wert ,4373 angegeben. In der zweiten Arbeit werden Druckfehler berichtigt; so z. B. wird für $\lambda = 18{,}96$ der richtige Wert 1,4627 angegeben.

Tabelle 8 (Fortsetzung).

| Beobachter | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| Rubens u. Trowbridge | 9,95 | 1,4951 | 1,4951 | 0 |
| „ | 11,88 | 1,4805 | 1,4810 | + 5 |
| „ | 13,96 | 1,4627 | 1,4625 | − 2 |
| „ | 15,89 | 1,4410 | 1,4417 | + 7 |
| „ | 17,93 | 1,4149 | 1,4154 | + 5 |
| Rubens u. Nichols | 20,57 | 1,3735 | 1,3735 | 0 |
| „ | 22,3 | 1,3403 | 1,3402 | − 1 |
| Rubens u. Aschkinass | 51,2 | metallische Reflexion beobachtet | | |
| Martens | 87,0 | metallische Reflexion berechnet | | |

Der Verlauf der Indices von Steinsalz für ultraviolette Strahlen ist in Fig. 5 p. 614 durch eine Curve veranschaulicht.

Weder im Ultraviolett, noch im sichtbaren Gebiet, noch im Ultrarot zeigen die berechneten Indices den geringsten Gang gegen die beobachteten.

Der Factor $k$ hat in der Formel (VIII) dieselbe Bedeutung wie in Formel (IV) (vgl. p. 612 u. 613) und ist durch einen Streifen $\lambda'''$ bei noch grösserer Wellenlänge als 51,2 $\mu$ bedingt. Ist $m''''$ die Dielektricitätsconstante der Ionen mit der Eigenschwingung $\lambda''''$, so berechnet sich unter der Annahme, dass die beobachtete Dielektricitätsconstante von Steinsalz $D = \Sigma m$ sei, der Wert $m'''' = 2{,}34$; aus $m''''$ und $k$ folgt

$$\lambda'''' = 87{,}0\ \mu.$$

### Kalkspat, $CaCO_3$.

22. Prismenkante $\parallel$ der optischen Axe; $\varphi = 49^0\ 58'\ 32''$; Länge der brechenden Kante 22 mm; brechende Flächen 25 × 25 mm. Die Brechungsexponenten im Ultraviolett sind von den Herren Mascart[1]), Sarasin[2]) und Carvallo[3]) gemessen. Platten 61, 65, 66 ($n_\omega$); 62, 63 und 64 ($n_\varepsilon$).

1) E. Mascart, Ann. de l'école normale (1) **1.** p. 238. 1864.

2) E. Sarasin, Archives d. sciences phys. et nat. (3) **8.** p. 392. 1882; Journ. d. phys. (2) **2.** p. 370. 1883; Compt. rend. **95.** p. 680. 1882.

3) E. Carvallo, Journ. de phys. (3) **9.** p. 465—479. 1900.

Tabelle 9.

Kalkspat, $t = 18°$. Exponenten nach Martens.

| $\lambda$ | $n_\omega$ | $n_\varepsilon$ | $\lambda$ | $n_\omega$ | $n_\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 198 | — | 1,57796 | 340 | 1,70078 | 1,50562 |
| 200 | 1,90284 | 1,57649 | 353 | 1,69397 | 1,50267 |
| 204 | 1,88242 | 1,57081 | 394 | 1,68374 | 1,49810 |
| 208 | 1,86783 | 1,56640 | 410 | 1,68014 | 1,49640 |
| 211 | 1,85692 | 1,56327 | 434 | 1,67552 | 1,49430 |
| 214 | 1,84558 | 1,55976 | 441 | 1,67423 | 1,49373 |
| 219 | 1,83075 | 1,55496 | 467 | 1,67024 | 1,49190 |
| 224 | 1,81890 | 1,55105 | 486 | 1,66785 | 1,49074 |
| 231 | 1,80233 | 1,54541 | 508 | 1,66527 | 1,48956 |
| 242 | 1,78111 | 1,53782 | 533 | 1,66277 | 1,48841 |
| 250 | 1,76968 | 1,53358 | 546 | 1,66168 | 1,48793 |
| 257 | 1,76038 | 1,53005 | 560 | 1,66046 | 1,48736 |
| 263 | 1,75343 | 1,52736 | 589 | 1,65835 | 1,48640 |
| 267 | 1,74864 | 1,52547 | 627 | 1,65592 | 1,48529 |
| 274 | 1,74139 | 1,52261 | 643 | 1,65504 | 1,48490 |
| 281 | 1,73538 | 1,52018 | 656 | 1,65437 | 1,48459 |
| 291 | 1,72774 | 1,51705 | 671 | 1,65367 | 1,48426 |
| 308 | 1,71657 | 1,51240 | 768 | 1,64974 | 1,48259 |
| 312 | 1,71425 | 1,51140 | | | |

Die reciproken relativen Dispersionen sind für den ordentlichen bez. den ausserordentlichen Strahl

$$\nu_\omega = 48{,}8, \qquad \nu_\varepsilon = 79{,}1.$$

Für den ausserordentlichen Strahl berechnet sich aus Formel (III) $\lambda_\varepsilon' = 0{,}106\ \mu$. Der ordentliche Strahl zeigt die merkwürdige Eigenschaft, dass die Brechungsexponenten um eine nahezu constante Zahl grösser sind als die Exponenten von Steinsalz für dieselbe Wellenlänge; die Differenz variirt im ganzen sichtbaren und ultravioletten Spectralbereich nur von 0,11265 bis 0,11489. Hieraus lässt sich schliessen, dass man wie beim Steinsalz, so auch für den ordentlichen Strahl im Kalkspat zwei Streifen metallischer Reflexion im Ultraviolett, etwa bei 0,100 und 0,160 $\mu$, annehmen muss.

Im Ultrarot sind von Hrn. Aschkinass[1]) folgende Streifen beobachtet:

$$\lambda'' = 6{,}69\ \mu, \qquad \lambda''' = 11{,}41\ \mu, \qquad \lambda'''' = 29{,}4\ \mu.$$

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 1. p. 42—68. 1900.

Hr. Carvallo[1]) hat für einige ultrarote Strahlen Brechungsexponenten bestimmt; die Exponenten für den ordentlichen Strahl nehmen mit grösserer Wellenlänge stark ab, während die Exponenten des ausserordentlichen Strahles fast constant sind. Hieraus glaubt Verfasser schliessen zu dürfen, dass für den ordentlichen Strahl die beiden Streifen bei 6 und 11 $\mu$, für den ausserordentlichen Strahl jedenfalls nicht der Streifen bei 6 $\mu$ in Betracht kommt. Eine nähere experimentelle Prüfung wäre sehr wünschenswert. Bevor diese Untersuchung ausgeführt ist, ist es unmöglich, die Constanten der Dispersionsformel *genau* zu berechnen.

### Quarz, $SiO_2$.

23. Das untersuchte Prisma ist aus linksdrehendem Quarz so geschliffen, dass die Prismenkante der optischen Axe parallel ist. Länge der brechenden Kante 30 mm, brechende Flächen 30 × 30 mm, brechender Winkel $\varphi = 59^\circ\ 56'\ 6{,}3''$. Platten 69, 70, 71, 91, 92.

Tabelle 10.

Quarz, $t = 18^\circ$. Exponenten nach Martens.

| $\lambda$ | $n_\omega$ | $n_\varepsilon$ | $\lambda$ | $n_\omega$ | $n_\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 185 | 1,67571 | 1,68988 | 291 | 1,58096 | 1,59134 |
| 186 | 1,67398 | 1,68808 | 308 | 1,57547 | 1,58564 |
| 193 | 1,65990 | 1,67337 | 312 | 1,57431 | 1,58445 |
| 197 | 1,65285 | 1,66601 | 340 | 1,56747 | 1,57737 |
| 198 | 1,65087 | 1,66394 | 358 | 1,56390 | 1,57369 |
| 200 | 1,64922 | 1,66221 | 394 | 1,55846 | 1,56805 |
| 204 | 1,64289 | 1,65560 | 434 | 1,55396 | 1,56339 |
| 208 | 1,63785 | 1,65038 | 441 | 1,55324 | 1,56264 |
| 211 | 1,63428 | 1,64667 | 467 | 1,55102 | 1,56034 |
| 214 | 1,63035 | 1,64258 | 486 | 1,54967 | 1,55897 |
| 219 | 1,62490 | 1,63695 | 508 | 1,54822 | 1,55746 |
| 224 | 1,62045 | 1,63231 | 533 | 1,54680 | 1,55599 |
| 231 | 1,61395 | 1,62555 | 546 | 1,54617 | 1,55534 |
| 242 | 1,60522 | 1,61647 | 560 | 1,54546 | 1,55461 |
| 250 | 1,60031 | 1,61138 | 589 | 1,54424 | 1,55335 |
| 257 | 1,59620 | 1,60710 | 627 | 1,54280 | 1,55186 |
| 263 | 1,59306 | 1,60386 | 643 | 1,54227 | 1,55131 |
| 267 | 1,59087 | 1,60159 | 656 | 1,54189 | 1,55091 |
| 274 | 1,58751 | 1,59810 | 670 | 1,54145 | 1,55047 |
| 281 | 1,58467 | 1,59516 | 768 | 1,53903 | 1,54794 |

1) E. Carvallo, Journ. d. phys. (3) **9**. p. 465—479. 1900.

Die reciproken relativen Dispersionen sind

$$\nu_\omega = 70{,}2, \qquad \nu_\varepsilon = 68{,}7.$$

Die metallische Reflexion im Ultraviolett ist zu erwarten bei den Wellenlängen

$$\lambda'_\omega = 0{,}1014\ \mu, \qquad \lambda'_\varepsilon = 0{,}1022\ \mu.$$

Rubens und Nichols fanden folgende ultrarote Streifen:

$$\lambda'' = 8{,}50\ \mu, \qquad \lambda''' = 9{,}02\ \mu, \qquad \lambda'''' = 20{,}75\ \mu.$$

Wahrscheinlich gehört einer der Streifen $\lambda''$ und $\lambda'''$ dem ordentlichen, der andere dem ausserordentlichen Strahl an. Erst wenn dies experimentell festgestellt ist, und wenn ferner die Nichols'schen Brechungsexponenten auf Grund der Rosenthal'schen Reflexionswerte neuberechnet sind, können die Constanten der Dispersionsformel mit der grössten erreichbaren Genauigkeit berechnet werden. Die Brechungsexponenten für ultraviolette Strahlen sind bereits von den Herren Sarasin[1]), Simon[2]) und Trommsdorf[3]) gemessen worden. Die Dispersion im ultraroten Gebiet ist von den Herren Mouton[4]), Rubens[5]) und Nichols[6]) bestimmt worden. Für $\lambda = 56\ \mu$ fanden Rubens und Aschkinass[7]) $n_\omega = 2{,}18$, in Uebereinstimmung mit dem aus der Ketteler-Helmholtz'schen Dispersionsformel berechneten Werte.

Schwefel.

24. Die Exponenten des rhombischen Schwefels hat Hr. Schrauf[8]) für die Temperaturen $+8^0$, $+20^0$ und $+30^0$ bestimmt. Schrauf giebt die Exponenten $n_\alpha$, $n_\beta$, $n_\gamma$ für die Wellenlängen 534,9 (Tl), 589,31 (Na) und 670,5 (Li) an. Hieraus hat Verfasser die Constanten $\lambda'$ der Dispersionsformel (III) berechnet und die Werte in der Tab. 11 zusammengestellt.

---

1) E. Sarasin, ($n_\omega$ und $n_\varepsilon$), Arch. d. sciences phys. et nat. **61.** p. 109. 1878; Compt. rend. **85.** p. 1230. 1877.

2) H. Th. Simon, ($n_\omega$), Wied. Ann. **53.** p. 552. 1894.

3) H. Trommsdorf, ($n_\omega$), Jenaer Diss. 1901; Physikal. Zeitschr. **2.** p. 576. 1901. Auffallend ist, dass die Indices des amorphen Quarzes um 0,1 kleiner sind als die des krystallinischen.

4) Mouton, ($n_\omega$ und $n_\varepsilon$), Compt. rend. **88.** p. 1189—1192. 1879.

5) H. Rubens, ($n_\omega$), Wied. Ann. **45.** p. 254. 1892; **53.** p. 277. 1894; **54.** p. 488. 1895.

6) E. F. Nichols, ($n_\omega$), Wied. Ann. **60.** p. 414. 1897.

7) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **67.** p. 459—466. 1899.

8) A. Schrauf, Groth's Zeitschr. f. Krystallogr. **18.** p. 113—173. 1891.

Tabelle 11.

Schwefel. Exponenten nach Schrauf.

| | $\lambda'_\alpha$ aus $n_\alpha$ ber. | $\lambda'_\beta$ aus $n_\beta$ ber. | $\lambda'_\gamma$ aus $n_\gamma$ ber. |
|---|---|---|---|
| $t = 8°$ | 235,62 $\mu\mu$ | 225,20 $\mu\mu$ | 251,38 $\mu\mu$ |
| $t = 30°$ | 222,48 | 226,98 | 267,71 |

Die Streifen $\lambda'_\alpha$ und $\lambda'_\gamma$ verschieben sich sehr stark mit der Temperatur, was vielleicht mit der Eigenschaft des Schwefels, dimorph zu sein, zusammenhängt. Der Streifen $\lambda'_\beta = 226$ $\mu\mu$ ist von der Temperatur wenig beeinflusst; diese Eigenschwingung muss als specifische Eigenschaft des Schwefels angesehen werden; denn für Schwefelkohlenstoff liegt die vom Verfasser berechnete Eigenschwingung sehr nahe, etwa bei 220 $\mu\mu$. Es ist wünschenswert, dass die Lage der Eigenschwingung für Schwefel näher bestimmt würde, entweder durch Messung der Brechungsexponenten für ultraviolette Strahlen, oder durch Untersuchung der mehrmals von Schwefel reflectirten Strahlen.

Wässerige Lösungen[1]) der meisten Sulfate sind im ganzen Ultraviolett, jedenfalls für grössere Wellenlängen als 220 $\mu\mu$, durchlässig. In den Sulfaten macht sich die charakteristische Absorption des Schwefels also nicht bemerkbar. Während aber $Na_2SO_4$ ganz durchlässig ist, absorbirt $Na_2SO_3$ kürzere Wellen als 274 $\mu\mu$, $Na_2S_2O_3$ kürzere Wellen als 337 $\mu\mu$. Je mehr Schwefel also in dem Anion vorhanden ist, um so stärker scheint sich die Absorption des Schwefels geltend zu machen.

### Schwefelkohlenstoff, $CS_2$.

25. In den Diagrammen I—IV sind als Abscissen die $\lambda$, als Ordinaten die hindurchgelassenen Lichtmengen, in Procenten der auffallenden Strahlung geschätzt, aufgetragen. Die ausgezogenen Linien gelten für die reinen, die gestrichelten für die in Alkohol oder Wasser gelösten Substanzen. Sämtliche Flüssigkeiten sind, zwischen Quarzplatten gepresst, unter-

1) Nach W. A. Miller, Phil. Trans. 152. p. 861—887. 1862. Auf den Miller'schen Spectrogrammen habe ich sofort die bekannten Zn-Linien 202, 206, 210 und Cd-Linien 214, 219 etc. erkannt und danach die Angaben in Wellenlängen umgerechnet. Hr. Kayser hat bei Bearbeitung seiner neuen „Spectralanalyse" keine Linien erkennen können und fällt daher ein falsches Urteil über den Wert der Miller'schen Arbeit.

sucht. I. **Schwefelkohlenstoff.** II. **Monobromnaphtalin.** III. **Cassiaöl.** IV. **Baryum-Quecksilber-Jodidlösung.** Die verticalen Pfeile sind an den Stellen metallischer Reflexion gezeichnet.

Die Absorption von Schwefelkohlenstoff geht aus der ersten Curve (I) der Fig. 6 hervor. Der starke Absorptionsstreifen bei 321 $\mu\mu$ ist schon von Hrn. Pauer gefunden worden. Von 257 an ist das brechbarere Ende des Spectrums absorbirt.

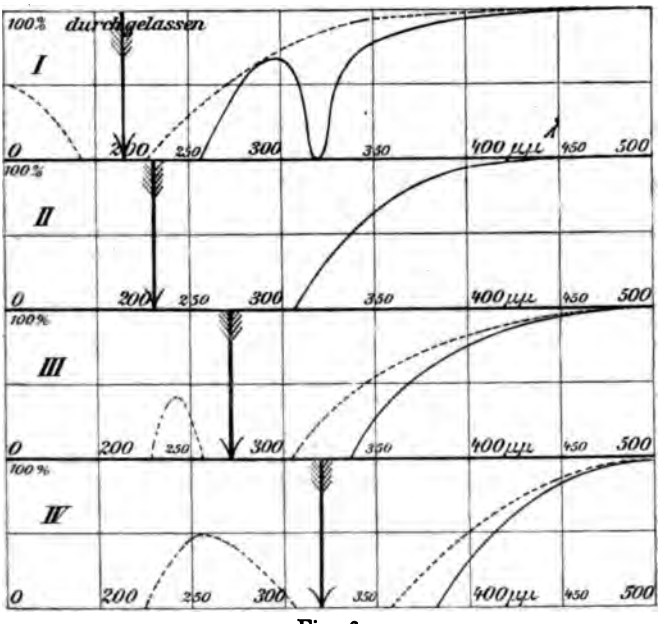



Fig. 6.

Die metallische Reflexion berechnet sich für $t = 18^0$ zu 217,53 $\mu\mu$. Versuche, Reststrahlen zu erhalten, scheiterten an dem Verdunsten der Flüssigkeit. Wurde Schwefelkohlenstoff in dem 10fachen Volumen Alkohol gelöst, so absorbirte eine capillare Schicht dieser Lösung nur die Strahlen von 228—190 $\mu\mu$. Hiernach ist es wahrscheinlich, dass auch der reine Schwefelkohlenstoff jenseits 185 wieder durchsichtig wird. Die grosse Differenz $m - 1$ zeigt, dass ausser den Absorptionsstreifen $\lambda' = 217{,}53$ ein anderer bei kleinerer Wellenlänge vorhanden ist; und dass $\lambda'$ etwas zu klein berechnet ist. Dies giebt sich auch darin kund, dass die aus der Dispersion im ultraroten und sichtbaren

Gebiet berechneten Exponenten in der Nähe von $\lambda'$ erheblich kleiner sind, als die beobachteten Exponenten. Der Absorptionsstreifen bei 321 $\mu\mu$ scheint in ganz geringem Maasse zu anomaler Dispersion Anlass zu geben, da die beobachteten Brechungsexponenten auf der Seite der kürzeren Wellen kleiner, auf der Seite der längeren Wellen grösser sind als die berechneten.

Constanten der Dispersionsformel (IV):

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}63403$ | $k = 0{,}000300$ |
| $m_1 = 0{,}88118$ | $\lambda' = 0{,}21753\,\mu$ |
| $\Sigma m = 2{,}51516$ | $\nu = 18{,}3$ |
| $D_t = 2{,}6158 - 0{,}00249\,(t - 18^0)$ [1] | |

## Tabelle 12.

Schwefelkohlenstoff, $t = 18^0$.

Exponenten (in Luft gem.) im Ultraviolett nach Martens, im Sichtbaren nach van der Willigen[2], im Ultrarot nach Rubens.[3]

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,21753 | metall. Reflex. ber. | | | 0,68667 | 1,61615 | 1,61618 | +3 |
| 0,260[4] | 2,159 | 2,138 | −19 | 0,7183 | 1,61316 | 1,61325 | +9 |
| 0,274871 | 2,009 | 1,998 | −11 | 0,7605 | 1,60995 | 1,60995 | 0 |
| 0,277104 | 1,989 | 1,982 | − 7 | 0,777 | 1,6087 | 1,6088 | +1 |
| 0,280100 | 1,965 | 1,963 | − 2 | 0,823 | 1,6060 | 1,6061 | +1 |
| 0,283705 | 1,938 | 1,942 | + 4 | 0,873 | 1,6032 | 1,6034 | +2 |
| 0,28811 | 1,912 | 1,919 | + 7 | 0,931 | 1,6008 | 1,6011 | +3 |
| 0,321 | Absorptionsstreifen | | | 0,999 | 1,5983 | 1,5988 | +5 |
| 0,34670 | 1,767 | 1,757 | −11 | 1,073 | 1,5961 | 1,5967 | +6 |
| 0,36128 | 1,742 | 1,730 | −13 | 1,164 | 1,5943 | 1,5947 | +4 |
| 0,3966 | 1,70112 | 1,70112 | 0 | 1,270 | 1,5923 | 1,5928 | +5 |
| 0,41020 | 1,69115 | 1,69097 | −18 | 1,396 | 1,5905 | 1,5910 | +5 |
| 0,43100 | 1,67818 | 1,67802 | −16 | 1,552 | 1,5888 | 1,5892 | +4 |
| 0,48615 | 1,65379 | 1,65379 | 0 | 1,745 | 1,5871 | 1,5874 | +3 |
| 0,52700 | 1,64174 | 1,64173 | − 1 | 1,998 | 1,5855 | 1,5855 | 0 |
| 0,58931 | 1,62889 | 1,62884 | − 5 | 5,8 | metall. Reflex. ber. | | |
| 0,65630 | 1,61945 | 1,61945 | 0 | | | | |

1) F. Ratz, Zeitschr. f. physik. Chem. **19**. p. 94—112. 1896.

2) van der Willigen, Mémoire de phys. **3**. p. 70. 1870; Archives du Musée Teyler **3**. p. 55. 1870, angeführt nach Ketteler, Theor. Optik p. 542. Braunschweig 1885.

3) H. Rubens, Wied. Ann. **45**. p. 254. 1892.

4) Diese Wellenlänge ist geschätzt, 257 ist nicht mehr durchgelassen. 277 und 280 sind Zn-Linien, die übrigen sind Cd-Linien. Die von

Die Differenz $D - \Sigma m$ macht es wahrscheinlich, dass ein Streifen metallischer Reflexion im Ultrarot vorhanden ist. In derselben Weise wie beim Steinsalz für den Streifen 87 $\mu$ berechnet sich für diesen Streifen des Schwefelkohlenstoffs die Wellenlänge 5,8 $\mu$.

α-Monobromnaphtalin, $C_{10}H_7Br$.

26. Constanten der Dispersionsformel (III):

| | |
|---|---|
| $m = 2{,}0061$ | $[\nu = 20]$ |
| $m' = 0{,}6153$ | $\lambda' = 0{,}243\,\mu$ |
| $\Sigma m = 2{,}6214$ | $D = 5{,}29$ |

Tabelle 13.

Monobromnaphtalin, $t = 20{,}6°$

| $\lambda$ | 0,36128 | 0,43407 | 0,48615 | 0,5349 | 0,58931 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ nach Simon[1]) | 1,7693 | 1,7037 | 1,6814 | 1,6680 | 1,6576 |
| $n$ ber. | 1,7673 | 1,7037 | 1,6812 | 1,6679 | 1,6576 |

Ausser $\lambda'$ ist mindestens noch ein zweiter Streifen im Ultraviolett bei kleinerer Wellenlänge zu erwarten. Die Lösung in Aether konnte wegen des schnellen Verdunstens nicht auf ihre Absorption hin untersucht werden. Reine Substanz, zwischen Quarzplatten gepresst, liess keine kürzeren Strahlen als 313 $\mu\mu$ durch, wie Curve II, Fig. 6, veranschaulicht.

Bei viermaliger Reflexion der Strahlen in Flussspat an Monobromnaphtalin erschienen nur die Cd-Linien 232 und 228 auf der Platte. Das berechnete Reflexionsmaximum liegt in hinreichender Uebereinstimmung hiermit bei 243 $\mu\mu$.

---

Rubens gemessenen Exponenten im ultraroten Gebiete sind um 0,0018 vermindert, damit sie im sichtbaren Gebiete mit den Ketteler'schen Werten übereinstimmen; die Differenz ist durch Temperaturverschiedenheit zu erklären.

1) H. Th. Simon, l. c.

Cassiaöl.[1])

27. Constanten der Formel (III):

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}88658$ | |
| $m' = 0{,}58446$ | $\lambda' = 0{,}27093\,\mu$ |
| $\Sigma m = 2{,}47104$ | $\nu = 14{,}1$ |

Tabelle 14.

Cassiaöl, $t = 17{,}5°$; Exponenten nach F. J. Micheli.[1])

| $\lambda$ | 486,15 | 546,10 | 589,31 | 656,30 |
|---|---|---|---|---|
| $n_{beob.}$ | 1,65358 | 1,63152 | 1,62088 | 1,60969 |
| $n_{ber.}$ | 1,65358 | 1,63152 | 1,62101 | 1,60969 |

Reines Cassiaöl (Curve III, Fig. 6) liess, zwischen Quarzplatten gepresst, nur Strahlen bis zur Wellenlänge 336 $\mu\mu$ durch. Im 10 fachen Volumen Alkohol gelöst, war es für Strahlen bis 305 $\mu\mu$ durchlässig, ebenso für Strahlen zwischen 230 und 256 $\mu\mu$.

Bei 4 maliger Reflexion erschien im Spectrum nur die Linie 274; von den Linien 257 und 288, die sehr kräftig sind, ist keine Spur erschienen. Die Lage der metallischen Reflexion berechnet sich zu 271 $\mu\mu$, was mit der beobachteten gut übereinstimmt.

Die grosse Differenz $m - 1$, ebenso die Undurchlässigkeit der Lösung für die brechbarsten Strahlen lassen darauf schliessen, dass sich bei etwa 185 $\mu\mu$ ein weiterer Streifen metallischer Reflexion befindet.

28. Baryum-Quecksilber-Jodidlösung, concentrirte $BaJ_2 + HgJ_2$ in $H_2O$ gelöst.

Tabelle 15.

| $\lambda$ | 486,15 | 589,31 | 656,30 |
|---|---|---|---|
| $n$ nach Rohrbach[2]) | 1,8488 | 1,7928 | 1,7752 |

1) Die Brechungsexponenten von Cassiaöl sind von Baden-Powell 1846 und von Kundt 1878 bestimmt worden; die Werte der beiden Beobachter weichen jedoch so sehr voneinander ab, dass eine neue Messung an dem vom Verfasser untersuchten Oele nötig erschien. Diese Bestimmung ist von Hrn. Dr. F. J. Micheli ausgeführt, wofür Verfasser seinen besten Dank ausspricht.

2) C. Rohrbach, Wied. Ann. 20. p. 172. 1883.

Constanten der Formel (III):

| | |
|---|---|
| $m = 2{,}3680$ | |
| $m' = 0{,}5984$ | $\lambda' = 0{,}31885\,\mu$ |
| $\Sigma m = 2{,}9664$ | $\nu = 10{,}8$ |

Der berechnete Streifen $\lambda' = 319\,\mu\mu$ ist sicher nicht der einzige, wie die grosse Differenz $m - 1$ zeigt; hiermit steht die Absorption in Uebereinstimmung (vgl. Curve IV, Fig. 6). Wahrscheinlich liegt ein Streifen bei $200\,\mu\mu$. Die Substanz bietet kein grosses Interesse, weil sie schon weitab vom Streifen metallischer Reflexion undurchlässig wird. Dies zeigte eine Bestimmung der Brechungsexponenten, bei den nicht annähernd so grosse Werte erreicht wurden, wie beim Schwefelkohlenstoff.

### Benzol, $C_6H_6$.

29. Die Brechungsindices von Benzol für ultraviolette und sichtbare Strahlen hat Hr. Simon bestimmt. Für ultrarote Strahlen sind die Indices den Angaben von Hrn. Rubens entnommen, und zwar sind die Rubens'schen Werte um 0,0048 verkleinert, damit dieselben im sichtbaren Gebiet mit den bei anderer Temperatur erhaltenen Simon'schen Werten übereinstimmen.

Tabelle 16.

Benzol, $t = 20°$.

Exponenten im Ultraviolett und Sichtbaren nach Simon, im Ultrarot nach Rubens.

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,17450 $\mu$ | metall. Reflexion ber. | | | 0,589 | 1,5005 | 1,4997 | − 8 |
| 0,283705 | 1,6190 | 1,6190 | 0 | 0,656 | 1,4959 | 1,4948 | −11 |
| 0,28811 | 1,6120 | 1,6125 | + 5 | 0,768 | 1,4907 | 1,4895 | −12 |
| 0,29811 | 1,5983 | 1,5993 | +10 | 0,810 | 1,4890 | 1,4882 | − 8 |
| 0,34036 | 1,5603 | 1,5615 | +12 | 0,864 | 1,4874 | 1,4866 | − 8 |
| 0,34670 | 1,5564 | 1,5575 | +11 | 0,926 | 1,4859 | 1,4852 | − 7 |
| 0,36128 | 1,5485 | 1,5493 | + 8 | 0,997 | 1,4848 | 1,4840 | − 8 |
| 0,434 | 1,5229 | 1,5229 | 0 | 1,080 | 1,4834 | 1,4828 | − 6 |
| 0,467 | 1,5158 | 1,5155 | − 3 | 1,178 | 1,4822 | 1,4817 | − 5 |
| 0,48000 | 1,5137 | 1,5132 | − 5 | 1,297 | 1,4813 | 1,4807 | − 6 |
| 0,486 | 1,5125 | 1,5122 | − 3 | 1,439 | 1,4801 | 1,4799 | − 2 |
| 0,508 | 1,5094 | 1,5087 | − 7 | 1,621 | 1,4792 | 1,4791 | − 1 |
| 0,5349 | 1,5060 | 1,5052 | − 8 | 1,850 | 1,4784 | 1,4784 | 0 |

Constanten der Formel (III):

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}4528$ | |
| $m' = 0{,}7264$ | $\lambda' = 0{,}17450\,\mu$ |
| $\Sigma m = 2{,}1792$ | $\nu = 30{,}2$[1]) |
| $D = 2{,}2500 - 0{,}00164\,(t - 20^0)$ | |

Die Differenz $m-1$ zeigt, dass noch ein zweiter Streifen bei kleinerer Wellenlänge als $174\,\mu\mu$ vorhanden ist, und dass der Streifen $\lambda'$ wahrscheinlich einen etwas grösseren Wert als $174\,\mu\mu$ hat. Hierdurch würde sich der Gang in den Differenzen erklären. Freilich lässt sich der Gang auch auf einen vernachlässigten Streifen im nahen Ultrarot, etwa bei $5\,\mu$, zurückführen.

Aethylalkohol, $C_2H_5OH$.

30. Constanten der Formel (III):

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}4548$ | |
| $m' = 0{,}3819$ | $\lambda' = 0{,}133\,\mu$ |
| $\Sigma m = 1{,}8367$ | $\nu = 60$ |
| $D = 26$ | |

Die Brechungsexponenten im sichtbaren Gebiet nach Kundt.[2]) Ein zweiter Streifen im Ultraviolett bei kleinerer Wellenlänge, mehrere Streifen im Ultrarot zu erwarten.

Tabelle 17.

Alkohol.

Exponenten im Ultraviolett nach Martens, im Sichtbaren nach Kundt.

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 133 | metall. Reflexion ber. | | | 307 | 1,391 | 1,387 | − 4 |
| 185,8 | 1,496 | 1,496 | 0 | 358 | 1,379 | 1,378 | − 1 |
| 193,5 | 1,476 | 1,476 | 0 | 397 | 1,3745 | 1,3730 | −15 |
| 199 | 1,467 | 1,465 | −2 | 431 | 1,3713 | 1,3700 | −13 |
| 237 | 1,419 | 1,419 | 0 | 486 | 1,3675 | 1,3666 | − 9 |
| 257 | 1,407 | 1,406 | −1 | 589 | 1,3633 | 1,3628 | − 5 |
| 263 | 1,406 | 1,403 | −3 | 656 | 1,3615 | 1,3613 | − 2 |
| 281 | 1,398 | 1,395 | −3 | 768 | 1,3596 | 1,3597 | + 1 |

1) F. Ratz, l. c.

2) A. Kundt, Wied. Ann. 4. p. 34. 1878.

### Wasser.

31. Die Constanten der Formel (IV):

| | |
|---|---|
| $m = 1{,}26770$ | $k = 0{,}013414 = \frac{m''}{\lambda''^2}$ |
| $m' = 0{,}49378$ | $\lambda' = 0{,}11512\,\mu$ |
| $\Sigma m = 1{,}76148$ | $\nu = 55{,}1$ |
| $D = 80$ | |

## Tabelle 18.

Wasser, $t = 21{,}7°$.

Exponenten im Ultraviolett und im Sichtbaren nach Simon, im Ultrarot nach Rubens.[1])

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,11512 | metall. Reflexion ber. | | | 0,50861 | 1,33593 | 1,33592 | − 1 |
| 0,22400 | 1,39213 | 1,39213 | 0 | 0,5349 | 1,33482 | 1,33477 | − 5 |
| 0,25732 | 1,37293 | 1,37265 | −28 | 0,58931 | 1,33292 | 1,33282 | −10 |
| 0,28370 | 1,36315 | 1,36299 | −16 | 0,65630 | 1,33094 | 1,33094 | 0 |
| 0,28811 | 1,36184 | 1,36168 | −16 | 0,76824 | 1,32881 | 1,32850 | −31 |
| 0,29811 | 1,35907 | 1,35898 | − 9 | 0,708 | 1,3297 | 1,3297 | 0 |
| 0,31333 | 1,35544 | 1,35544 | 0 | 0,755 | 1,3289 | 1,3288 | − 1 |
| 0,34036 | 1,35036 | 1,35045 | + 9 | 0,808 | 1,3280 | 1,3276 | − 4 |
| 0,34670 | 1,34940 | 1,34947 | + 7 | 0,871 | 1,3268 | 1,3267 | − 1 |
| 0,36128 | 1,34733 | 1,34742 | + 9 | 0,943 | 1,3256 | 1,3255 | − 1 |
| 0,43407 | 1,34031 | 1,34027 | − 4 | 1,028 | 1,3243 | 1,3242 | − 1 |
| 0,46783 | 1,33801 | 1,33805 | + 4 | 1,130 | 1,3228 | 1,3227 | − 1 |
| 0,48000 | 1,33737 | 1,33736 | − 1 | 1,256 | 1,3208 | 1,3208 | 0 |
| 0,48615 | 1,33698 | 1,33703 | + 5 | | | | |

Hr. Drude setzt $m'' = D - \Sigma m$. Unter dieser Annahme berechnet sich $\lambda'' = 76\,\mu$. Doch ist die grosse Dielektricitätsconstante 80 wohl nicht nur durch einen solchen Streifen, sondern durch mehrere metallische Absorptionsstreifen zwischen den sichtbaren Lichtstrahlen und den langen elektrischen Wellen zu erklären.

---

1) Die Rubens'schen Werte sind um 0,0002 verkleinert, damit sie im Sichtbaren mit den Simon'schen Werten übereinstimmen.

Der kleine Wert von $\lambda'$ macht die beobachtete Thatsache wahrscheinlich, dass Wasser für ultraviolette Strahlen bis zu 185 $\mu\mu$ durchlässig ist.[1])

Xylol, $C_6H_4(CH_3)_2$.

32. Constanten der Formel (II):

| | |
|---|---|
| $m$ = 1,0000 (angen.) | |
| $m'$ = 1,1724 | $\lambda'$ = 0,13660 $\mu$ |
| $\Sigma m$ = 2,1724 | $\nu$ = 32,5 |

Tabelle 19.

Xylol, $t = 20°$. Exponenten nach Rubens.

| $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ | $\lambda$ | $n_{beob.}$ | $n_{ber.}$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,13660 | metall. Reflexion ber. | | | 1,012 | 1,4822 | 1,4813 | −9 |
| 0,43407 | 1,5170 | 1,5170 | 0 | 1,096 | 1,4808 | 1,4802 | −6 |
| 0,48615 | 1,5075 | 1,5076 | +1 | 1,195 | 1,4795 | 1,4792 | −3 |
| 0,58931 | 1,4965 | 1,4963 | −2 | 1,316 | 1,4784 | 1,4782 | −2 |
| 0,65630 | 1,4922 | 1,4918 | −4 | 1,461 | 1,4775 | 1,4774 | −1 |
| 0,823 | 1,4857 | 1,4851 | −6 | 1,645 | 1,4768 | 1,4767 | −1 |
| 0,878 | 1,4845 | 1,4837 | −8 | 1,881 | 1,4760 | 1,4760 | 0 |
| 0,940 | 1,4834 | 1,4825 | −9 | ∞ | — | 1,4749 | — |

**Schluss.**

33. Bisher ist die Anzahl der durchsichtigen Substanzen, deren Eigenschwingungen bekannt sind, noch gering; daher kann man die Frage, welcher Umstand in einer Substanz diese oder jene Eigenschwingung hervorruft, erst in wenigen Fällen beantworten. Diese wenigen Fälle sind folgende:

1. Rubens und Nichols haben gefunden, dass Glimmer und Quarz bei 8,5 und bei 20 $\mu$ Streifen metallischer Reflexion zeigen, und haben diese Eigenschwingung dem *Siliciumgehalt* beider Substanzen zugeschrieben.

2. Aschkinass hat darauf aufmerksam gemacht, dass Flussspat, Kalkspat, Marmor und Gips bei 30 $\mu$ metallisch reflectiren und dass diese Erscheinung wahrscheinlich auf dem *Calciumgehalt* beruht. Im Ultraviolett haben sowohl Flussspat

1) H. Kreussler, Berl. Diss. 1901.

als Kalkspat einen Streifen bei etwa 100 $\mu\mu$; vielleicht ist auch dieser dem Calcium zuzuschreiben.

3. Chlorkalium (Sylvin), Chlornatrium (Steinsalz), Bromkalium und Bromnatrium zeigen zwischen 50 und 70 $\mu$ je einen Streifen metallischer Reflexion; diese Aehnlichkeit hat Aschkinass auf die *chemische Aehnlichkeit* von Kalium und Natrium einerseits, Brom und Chlor andererseits zurückgeführt. Aus demselben Grunde erklärt sich das nahezu gleiche Verhalten von Steinsalz und Sylvin im Ultraviolett.

4. Für Schwefel und Schwefelkohlenstoff berechnet sich ein Streifen metallischer Reflexion bei 220 $\mu\mu$. Diese Eigenschwingung muss als eine specifische Eigenschaft des *Schwefels* angesehen werden.

34. In Tab. 20 sind die für $\lambda = 0$ berechneten Exponenten $n_0$ für eine Anzahl von Substanzen zusammengestellt.

Tabelle 20.

Exponenten $n_0$ für $\lambda = 0$.

| Substanz | $n_0 = \sqrt{m}$ | Substanz | $n_0 = \sqrt{m}$ |
|---|---|---|---|
| Steinsalz | 1,075 | Alkohol | 1,206 |
| Sylvin | 1,117 | Schwefelkohlenstoff | 1,278 |
| Wasser | 1,126 | Cassiaöl | 1,374 |
| Flussspat | 1,167 | Monobromnaphtalin | 1,416 |
| Benzol | 1,205 | Baryum-Quecksilber-Jodidlösung | 1,539 |

Steinsalz und Sylvin sind die einzigen Körper, deren Exponenten im bisher untersuchten Ultraviolett so stark anwachsen, dass zwei Streifen metallischer Reflexion mit Sicherheit berechnet werden können. Wie bei *Steinsalz* und *Sylvin*, so ist auch bei *Wasser* zwischen den Wellenlängen 0 und 50 $\mu\mu$ der berechnete Exponent annähernd gleich 1. Da bei diesen Substanzen die kürzeste berechnete Eigenschwingung etwa bei der Wellenlänge 110 $\mu\mu$ liegt, so ist anzunehmen, dass die viel kürzeren Wellenlängen zwischen 0 und 50 $\mu\mu$ durchgelassen werden.

Bei *Cassiaöl* ist wahrscheinlich ein Streifen $\lambda'$ bei 185 $\mu\mu$ vorhanden, während ein zweiter beobachteter Streifen $\lambda''$ bei 274 $\mu\mu$ liegt. Unter Berücksichtigung von $\lambda'$ würde sich er-

geben, dass der Exponent $n_0$ nahezu gleich 1 ist und dass die kürzesten Strahlen durchgelassen werden.

Bei den *übrigen Substanzen* ist $n_0$ erheblich grösser als 1. Das Verhalten von Steinsalz, Sylvin und Cassiaöl macht es wahrscheinlich, dass diese Differenz durch einen vernachlässigten Streifen metallischer Reflexion zu erklären ist und dass die Wellenlänge dieses Streifens so gross ist, dass für Strahlen sehr kleiner Wellenlänge Durchlässigkeit zu erwarten ist.

Berlin, Physik. Inst., August 1901.

(Eingegangen 14. August 1901.)

## 14. *Transportabler Apparat für Cavendish's Versuch über Massenanziehung; von Max Kohl.*

Leider war es bisher nicht möglich, den hochinteressanten Versuch Cavendish's zum Nachweis des einfachen Gesetzes der Massenanziehung allgemein einem grösseren Auditorium vorzuführen. Denn die ursprüngliche Form des Cavendish'schen Apparates[1]) ist nicht für Demonstrationszwecke geeignet, sondern für Einzelbeobachtung und Messversuche bestimmt. Ganz besonders hat die Apparatanordnung den Nachteil, dass der beanspruchte Raum zu gross ist. Der Waagebalken von Cavendish's Apparat hatte eine Länge von ungefähr 2 m und war mit Kugeln von je 1,75 Pfund versehen, auf die grosse Kugeln von mehreren hundert Pfund Gewicht wirkten.

Bei dem von C. V. Boys angegebenen Apparate[2]) sind diese Nachteile vermieden. Boys legte mit Recht den Hauptwert bei der Construction des Apparates darauf, den Aufhängungsfaden möglichst dünn zu nehmen, um so eine ausserordentliche Empfindlichkeit des Systems zu erhalten. Es ist nämlich zu berücksichtigen, dass die Tragkraft eines Fadens mit der zweiten Potenz des Durchmessers, die Torsionskraft mit der vierten Potenz des Durchmessers wächst. Es ist aber erforderlich, dass die Torsionskraft im Verhältnis zur Tragkraft möglichst klein ist, woraus folgt, dass der ganze Apparat in möglichst kleinen Dimensionen auszuführen ist.

Die Lösung der Aufgabe, ausserordentlich feine Fäden herzustellen, die eine für genaue Messungen und zuverlässige Resultate erforderliche Constanz besitzen, ist nun Boys geglückt. Da Glas wegen seiner elastischen Nachwirkung,

1) Cavendish, Gilb. Ann. 2. 1799.

2) C. V. Boys, Nature 40. p. 247. 1889; Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 1. p. 129. 1888; 3. p. 37. 1890; 8. p. 173. 1895; 10. p. 96. 1897; Zeitschr. f. Instrumentenk. 10. p. 69. 1890.

Coconfaden wegen seiner Hygroskopie und Platin wegen seiner Zerbrechlichkeit sich nicht für ausserordentlich feine Fäden eigneten, suchte Boys nach einem geeigneteren Materiale und fand dies im Quarz, da der letzte diese drei Nachteile nicht besitzt und ausserdem den Vorteil bietet, dass er sich zu Fäden von bisher unerreichter Feinheit ausziehen lässt, die eine ebenfalls unerreichte Tragfähigkeit besitzen. Die von Boys hergestellten Fäden besitzen Durchmesser bis zu 0,00025 mm herab. Für seinen Apparat für die Massenanziehung verwandte er Fäden von 0,005 mm Durchmesser; das von einem solchen Faden getragene Gewicht betrug 1,944 g (zwei Kugeln zu je 0,972 g), während die grossen Bleikugeln, die die kleinen Kugeln beeinflussten, je 653,1 g wogen. Ueber die Herstellungsmethode der feinen Quarzfäden sei auf die Originalabhandlung von Boys[1]) verwiesen.

Ein grosser Uebelstand des Apparates nach Boys besteht darin, dass er nicht transportabel ist, sondern an Ort und Stelle von kundiger und geschickter Hand zusammengebaut und aufgestellt werden muss. Das schliesst aber aus, dass der Apparat allgemein als Demonstrationsapparat zur Einführung kommen könnte.

Es ist mir nun gelungen, den erwähnten Nachteil zu beseitigen und den Boys'schen Apparat transportabel zu gestalten. Der Apparat wird in meinen Werkstätten versuchsfertig hergestellt, lässt sich ohne jede Gefahr versenden und kann nach Empfang sofort aufgestellt und in Betrieb genommen werden. Im Folgenden gebe ich eine kurze Beschreibung davon: die beiden Figg. 1 u. 2 dienen zur Erläuterung, Fig. 1 zeigt den vollständigen aufgestellten Apparat, Fig. 2 in etwas grösserem Maassstabe den Waagebalken mit Aufhängung und Schutzgehäuse.

Aus Fig. 2 lässt sich erkennen, in welcher Weise der empfindliche Teil des Apparates aufgebaut ist. Auf einem kräftigen Dreifuss mit Stellschrauben befindet sich ein drehbares und feststellbares Säulchen, das ein Glasgehäuse, ein weites Messingrohr und ein 40 cm langes enges Messingrohr mit Aufhängevorrichtung trägt. In diesem engen Rohre hängt

1) C. V. Boys, Proc. of the Phys. soc. of London 9. 8. Oct. 1887.

der Quarzfaden von ungefähr 0,005 mm Durchmesser. An seinem unteren Ende ist ein leichtes Gehänge befestigt, dass einen kleinen Spiegel und den Waagebalken trägt und zum Teil von dem kurzen, weiteren Messingrohr umschlossen ist. Zwei im rechten Winkel zu einander stehende runde Glasfenster mit Verschraubung dienen dazu, einen Lichtstrahl auf

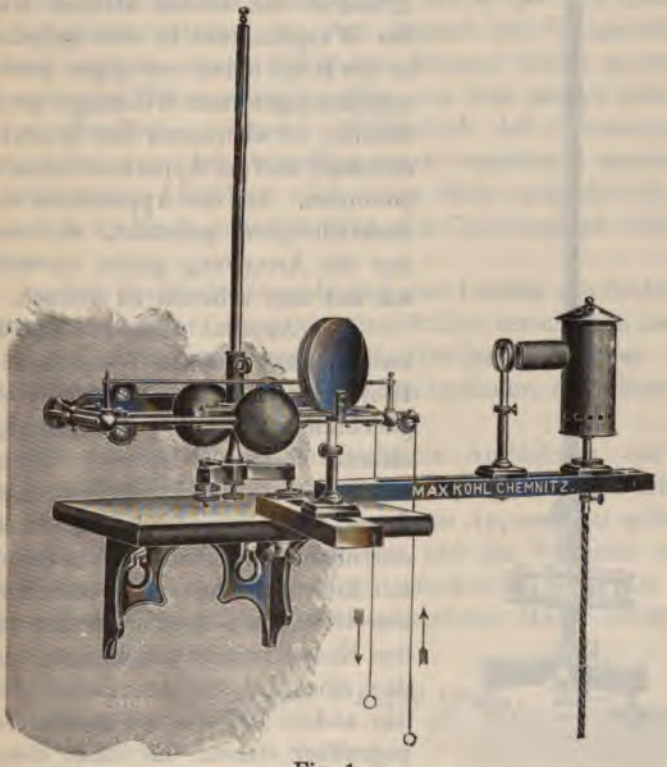



Fig. 1.

den symmetrisch zu ihnen stehenden Spiegel auftreffen und fortpflanzen zu lassen. Der Waagebalken selbst besteht aus einem äusserst dünnen Glasstäbchen, das an seinen beiden Enden je eine kleine Messingkugel von 5,5 mm Durchmesser und 0,75 g Gewicht trägt. Der gegenseitige Abstand der Mittelpunkte dieser beiden kleinen Kugeln ist 36 mm gross.

Zum Schutze gegen Luftströmungen und raschen Temperaturschwankungen ist der Waagebalken, wie die Fig. 2

zeigt, in ein rechteckiges Glasgehäuse mit doppelten Wandungen eingeschlossen. Durch eine Rändelschraube, die das drehbare Säulchen durchsetzt, und deren Kopf sich unterhalb desselben befindet, kann die Arretirung des Apparates bewirkt werden. Die Vorrichtung besteht in der Hauptsache aus zwei halbkugelförmigen Lagern, die beim Arretiren die beiden kleinen Kugeln des Waagebalkens in sich aufnehmen, in die Höhe heben und gegen zwei entsprechend geformte Widerlager pressen. Hiermit ist aber auch der Quarzfaden entlastet, und der Apparat transportabel geworden. Ist der Apparat an seinen Aufstellungsort gebracht, so braucht nur die Arretirung gelöst zu werden, um mit ihm arbeiten zu können.

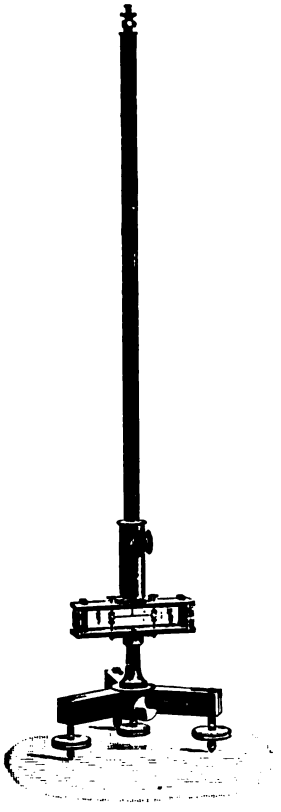


Fig. 2.

Der Apparat wird, wie Fig. 1 erkennen lässt, auf ein Wandconsol mit Brett gestellt; darüber befindet sich, gleichfalls an der Wand befestigt, ein eiserner Rahmen, der zwei Führungsstangen für zwei grosse Bleikugeln trägt. Diese Kugeln sind dementsprechend durchbohrt und können durch Schnuren mit Rollenführung um 36 mm hin und her verschoben werden, sodass sie in den Endstellungen den kleinen Kugeln das eine Mal auf den linken Seiten, das andere Mal auf den rechten Seiten gegenüber stehen. Es findet demnach entweder eine Anziehung des ganzen Systems in dem einen oder dem anderen Sinne statt. Das Gewicht jeder der beiden Kugeln beträgt 2978 g, der Durchmesser genau 80 mm, der Abstand der Mittelpunkte einer grossen Kugel und der beeinflussten kleinen Kugel in der Nulllage beträgt 53 mm, und demnach der Abstand der Längsaxen der beiden Führungsstangen für die Bleikugeln 106 mm.

Um nun die Anziehung der Kugeln und die Drehung des

Waagebalkens, die in dem einen oder anderen Sinne erfolgt, einem grösseren Auditorium deutlich zu zeigen, ist es erforderlich, den erhaltenen Ausschlag der Torsionswaage in vergrössertem Maassstabe objectiv darzustellen. Zu diesem Zwecke wird durch eine biconvexe Linse das Bild eines erleuchteten Spaltes derart an einer an der Wand befestigten Scala erzeugt, dass die Strahlen von dieser Linse durch das eine Fenster des Apparates eintreten, an dem Spiegel des Waagebalkens reflectirt werden, durch das andere Fenster wieder austreten und auf einen Convexspiegel treffen, von dem aus sie schliesslich an die Scala gelangen. Namentlich der Convexspiegel dient dazu, dass der Ausschlag stark vergrössert erscheint; es beträgt der Ausschlag nach jeder Seite ungefähr 40 cm, wenn sich die Scala ungefähr 10 m vom Convexspiegel entfernt befindet.

An dem Brette des Consols sind zwei Leisten mit Schlittenführung befestigt, auf denen sich drei Stative verschieben lassen, um eine sichere Einstellung des Spaltbildes zu erzielen. Die Stative tragen die Glühlampe mit Spaltcylinder, die biconvexe Linse und den Convexspiegel.

Ein genaues Schema zur richtigen Aufstellung, die ungefähr in einer Höhe von 2,25 m über dem Fussboden erfolgt, gebe ich jedem Apparat bei. Damit der Apparat bei gelöster Arretirung keinen Schaden erleidet, und die Versuche nicht gestört werden, ist es unbedingt erforderlich, dass die Befestigung an einer völlig erschütterungsfreien Mauer erfolgt.

Chemnitz.

(Eingegangen 7. August 1901.)

## 15. *Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers. Entgegnung auf Ausführungen der Herren O. Lummer und E. Pringsheim; von F. Paschen.*

Die von den Herren Lummer und Pringsheim neulich[1]) angezeigte Beleuchtung meiner Arbeiten ist nun erschienen.[2]) Allein ich kann mit ihren Auseinandersetzungen in keiner Weise einverstanden sein. Es mögen im Folgenden nur einige Punkte besprochen werden, welche mir entweder besonders unrichtig von den Verfassern dargestellt oder welche mir wichtiger erscheinen; doch bemerke ich im übrigen, dass ich fast jedem Satze ihrer langen Ausführungen widersprechen müsste.

In der Einleitung p. 194 steht: „Nachdem wir aber durch Ausdehnung unserer Versuche auf das Wellenlängengebiet von 12 $\mu$ bis 18 $\mu$ Abweichungen von der Wien'schen Gleichung bis 50 Proc. erhalten hatten, war erwiesen, dass die Paschen'schen Versuche fehlerhaft seien."

Hier extrapoliren die Verfasser wieder aus Versuchen über grosse Werte $\lambda . T$ auf ein Gebiet viel kleinerer Werte $\lambda T$: genau wie in ihrer früheren Bemerkung.[3]) Ich kann dagegen nur wieder auf das verweisen, was in meiner letzten Arbeit[4]) p. 282 Anm. gegen diese frühere Bemerkung der Verfasser gesagt ist.[5]) Die neuen Behauptungen der Verfasser p. 204 f),

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. p. 39. Anm. 1. 1901.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Ann. d. Phys. 6. p. 192—211. 1901.

3) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. Nr. 12a. p. 171 u. 172. 1900.

4) F. Paschen, Ann. d. Phys. 4. p. 277 1901.

5) Eine ähnliche Extrapolation schieben Lummer und Pringsheim in ihrer vierten Arbeit (Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. p. 39. 1901), in der sie die photometrischen Versuche von Wanner

sie hätten solche Schlüsse nicht gezogen, erledigen sich damit. Aus den Versuchen der Verfasser bei 12 $\mu$ und 18 $\mu$ kann höchstens etwas über das Verhalten der Function in dem Gebiete entsprechender Werte $\lambda T$ gefolgert werden. Dass in dem Gebiete bis 9 $\mu$ bei den von mir untersuchten Temperaturen die Resultate meiner Versuche falsch seien, kann nie daraus gefolgert werden. Auch ist dadurch nicht bewiesen, dass die Abweichungen, welche Lummer und Pringsheim früher schon in dem Gebiete kleinerer Wellenlängen von Wien's Gesetz fanden, und welche sie als systematische Fortsetzungen der Abweichungen bei 12 $\mu$ und 18 $\mu$ erkannt zu haben meinen, reell sind. Thatsächlich gehen die systematischen Abweichungen von Wien's Gesetz, welche die Verfasser vor dem Erscheinen meiner letzten Arbeit veröffentlicht haben, weit in dasjenige Gebiet hinein, in welchem nach dem jetzigen Stande unserer Kenntnis keine nennenswerte Abweichung von Wien's Gesetz existirt. Hiermit meine ich nicht Abweichungen der hierin weniger beweiskräftigen Energiecurven von Wien's Gesetz, womit das von den Verfassern p. 198 unter a) Gesagte hinfällig wird, sondern, wie sehr deutlich von mir p. 298 Anm. 1 l. c. gesagt ist, die Abweichungen der Isochromaten kleiner Wellenlänge, welche in allen Arbeiten der Verfasser vor meiner letzten zu dem Zwecke publicirt scheinen, um die systematischen Aenderungen der von ihnen mit $c$ bezeichneten

---

und mir und Wanner nach gleicher Methode (und nicht nach einer von ihnen öfter angekündigten bolometrisch-photometrischen Methode) wiederholen und bis ins kleinste bestätigen, Hrn. Wanner unter, indem sie sagen (p. 39): „Als Stütze für diese Annahme dienten ihm (Wanner) die spectrobolometrischen Versuche von F. Paschen, welcher erwiesen zu haben glaubte, dass die Wien'sche Spectralgleichung innerhalb der Wellenlängen von 0,7 $\mu$ bis 9,2 $\mu$ und im Temperaturbereich 400° bis 1600° abs. gültig ist.“ Wanner stützt sich vielmehr auf die Arbeit von Paschen und Wanner (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899), welche er mit besseren Strahlungskörpern wiederholt, und diese sucht zu erforschen, ob Wien's Formel im Sichtbaren gültig sei, um eine Constante zu bestimmen. Ob die Formel in anderen Gebieten galt oder nicht, konnte für diese, wie für Wanner's Versuche in keiner Weise eine Stütze bilden. Durch meine ältesten Versuche wurde nur eine zu prüfende Formel dargeboten, ohne welche die Resultate der photometrischen Versuche wohl schwerlich eine Wiedergabe erhalten hätten, welche einen wesentlichen Fortschritt erkennen liess.

Grösse zu zeigen. Wiederholt von ihnen angeführte Zahlen z. B. sind folgende:

| | $\lambda$ | 1,21 | 1,96 | 2,20 | 3,63 | 4,96 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c$ | 13510 | 13810 | 14240 | 14800 | 16510 | Lummer u. Pringsheim |
| Paschen | | 14500 | 14500 | 14500 | 14890 | 15590 | für $T = 1100°$ abs. (mittl. $T$ der Messungen der Verfasser) |
| | | 14500 | 14500 | 14500 | 14770 | 15320 | für $T = 1000°$ abs. |

Abgesehen davon, dass diese Zahlen, die Veränderung von $c$ vorausgesetzt, sehr unbestimmt definirt sind, solange die zugehörigen Temperaturen nicht genau angegeben sind, ändert sich die Grösse $c$ höchstwahrscheinlich gar nicht wie diese Zahlen. Die untersten Reihen geben vielmehr für $T = 1000$ und $T = 1100°$ abs. die Zahlen, welche meiner Arbeit und Planck's Gesetz entsprechend wohl jetzt als die richtigen anzusehen sind. Lummer und Pringsheim führen aber diese sich fälschlicherweise fortwährend ändernden Zahlen an, um „systematische Aenderungen" zu beweisen.

Es blieb daher nach meiner Ansicht trotz der Versuche von Lummer und Pringsheim bei 12 $\mu$ und 18 $\mu$ und der älteren von Beckmann bei noch längeren Wellenlängen die Möglichkeit bestehen, dass alle meine früheren Resultate richtig sind. Die Frage wäre vielmehr gewesen: wo hört Wien's Formel auf, gültig zu sein? Diese Frage glaube ich durch meine letzten Versuche zuerst scharf dahin beantwortet zu haben, dass die Gültigkeit dort aufhört, wo meine früheren Versuche über Energiecurven aus verschiedenen angegebenen Gründen nicht mehr beweisend waren, und wo auch Lummer und Pringsheim die Abweichungen der Energiecurven ihrer Flussspatspectren nicht als ganz zwingende betrachtet haben.

Es hat sich nun durch meine letzte Arbeit gezeigt, dass bei den ersten beiderseitigen Versuchen in dem Gebiete 1 $\mu$ bis 6 $\mu$ (soweit gehen die von Lummer und Pringsheim veröffentlichten Flussspatspectren nur) jedenfalls beiderseits Fehler gemacht sind. Lummer und Pringsheim haben ihre diesbezüglichen Versuche so angestellt, dass sie ein und dieselbe Anordnung des strahlenden Körpers und der Spectralanordnung beibehielten und dann zwischen den Temperaturen 621° und 1646° (Serie IV) oder 814° und 1430° (Serie I u. II) Beobachtungen machten, welche entweder als Energiecurven

oder isochromatische Curven verwertet wurden. Sie sind dabei nicht zu so tiefen Temperaturen hinabgekommen wie ich. Diese Anordnung erforderte ferner, dass die Wände des Hohlraumes bei jeder Temperatur gleichtemperirt sind, was schwierig, aber von ihnen doch wohl zuletzt gut erreicht ist. Ich habe mit der Beobachtung von Energiecurven allein begonnen und dazu die Anordnung für jede Temperatur möglichst günstig, für niedere Temperaturen z. B. erheblich anders als für höhere gewählt. Dann habe ich schliesslich Isochromaten als solche beobachtet mit einer wieder dafür günstig gewählten Anordnung. Die Gründe der Wahl, besonders der doppelten spectralen Zerlegung, habe ich sehr ausführlich besprochen, und es scheint mir ein grosser Irrtum von Lummer und Pringsheim, wenn sie, ohne meine Gründe zu beachten, meinen, mit einfacher Zerlegung sei ceteris paribus genau das gleiche Resultat zu erhalten, und die doppelte Zerlegung sei eine unnötige Complication. Auch dass es mir bei dieser Arbeit nur auf grosse Werte $\lambda T$ ankam, ist ein Irrtum von ihnen. Vielmehr wollte ich das gesamte Gebiet, welches ich früher mit Energiecurven durchmessen hatte, nun durch ganz anders angeordnete Versuche mit Isochromaten durchmessen. Für die Messung erster Art waren nur Hohlräume erforderlich, welche für ein gewisses Temperaturgebiet gleichtemperirt waren. Dagegen musste die Erzeugung des Spectrums einfach berechenbar sein. Die zweite Art Messung erforderte nur die Erzeugung eines schmalen, scharf begrenzten Spectralgebietes in beliebiger Weise, setzte aber Hohlräume voraus, welche bei allen Temperaturen gleichtemperirt waren.

Was zunächst die von Lummer und Pringsheim beobachteten Energiecurven in dem Gebiete bis 6 $\mu$ (sogenannte Flussspatversuche) betrifft, so sagen sie auch jetzt wieder, wie sie es wiederholt früher gesagt haben, dass sie die Abweichungen am absteigenden Aste aus diesen Versuchen allein noch nicht mit Sicherheit als reell hätten ansehen können. Nur um diese Abweichungen handelt es sich: erstens bei den von mir berichtigten Fehlern meiner Energiecurven höchster Temperatur und längster Wellenlängen, zweitens bei der ganzen Beweisführung von Lummer und Pringsheim, welche sie gegen meine Arbeiten anwenden. Dagegen haben

Lummer und Pringsheim bisher kein Wort veröffentlicht, wie es sich denn mit den ebenfalls grossen Fehlern verhält, welche die p. 648 angeführten Zahlen ihrer an Isochromaten gewonnenen Resultate enthalten. Diese Fehler sind um so auffälliger, als sie in dem durch viele ältere Arbeiten genau bekannten ultraroten Gebiet kleiner Wellenlängen gemacht sind und ebenfalls Beträgen von über 20 Proc. in der Grösse der Energie entsprechen. Die Methoden, diese Fehler zu vermeiden, waren alle gegeben. In meiner Arbeit aus dem Jahre 1897 sind sie ausführlich dargelegt und angewandt. Trotzdem scheinen Lummer und Pringsheim diese Fehler erst nach meiner letzten Arbeit erkannt zu haben, und, nachdem sie sich überzeugt hatten, dass sie die Resultate der photometrischen Versuche von Wanner und mir und Wanner[1]) alle bis ins kleinste qualitativ und quantitativ wieder erhielten.[2]) Jetzt steht mit einem Male überall auch bei ihnen, dass Wien's Gesetz erst für $\lambda T > 3000$ ungültig sei, nachdem ich diese neue Thatsache in meiner letzten Arbeit zuerst ausgesprochen und bewiesen habe. Vorher war auch für $\lambda T < 3000$ Thiesen's Formel eine bessere Darstellung von Lummer und Pringsheim's Versuchen. „Dass die Thiesen'sche Formel auch für unsere Flussspatversuche gilt, bedarf unsererseits keines Beweises, da sie ja diesem Umstande ihre Entstehung verdankt." Der Wert $c = 13510$ der Lummer-Pringsheim'schen Isochromate bei 1,21 $\mu$ bestätigt eben Thiesen's Formel, ist aber im Widerspruch mit Wien's oder Planck's Gesetz, wie ich in meiner letzten Arbeit p. 298 Anm. darlegte. Hierauf bezieht sich die Anm. 3 p. 278 meiner Arbeit, welche die Verfasser angreifen, welche ich aber voll und ganz aufrecht erhalten muss. Wollte ich mich der Ausdrucksweise von Lummer und Pringsheim bedienen, so könnte ich ebenfalls sagen, dass ihre Resultate in anderen Beobachtungsgebieten „an Wert verlieren" und sich „zufällig" der Wahrheit näherten, da sie solche genau bekannte Fehlerquellen ausser acht liessen.

---

1) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899; H. Wanner, Ann. d. Phys. 2. p. 141. 1900.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. Nr. 4. p. 36. 1901.

Zu dem „historischen Teile" der Verfasser habe ich besonders zwei Ausstellungen zu machen: Erstens kann es wohl keine Frage sein, dass meine früheren Versuche sich mit demselben Gegenstande beschäftigten, und auf die Bemerkung, ich hätte keine „schwarze Strahlung" untersucht, muss ich antworten, dass nach meiner Meinung einige der von mir früher untersuchten Strahlungen der idealen fast ebenso nahe kamen, wie die Strahlung der Serie II von Lummer und Pringsheim.

Zweitens sagen Lummer und Pringsheim wieder, wie Hr. Lummer in seinem Pariser Referat, dass meine damals abgeleiteten Gesetze nicht die wahren Strahlungsgesetze der von mir untersuchten Körper seien. Aus meiner früheren Darstellung geht meines Erachtens sehr deutlich hervor, dass ich diese Versuche als in vieler Hinsicht unvollkommen ansah. Die einzelnen Fehlerquellen habe ich hervorgehoben. Ich glaube zwar nicht, dass meine damaligen Temperaturmessungen so fehlerhaft waren, wie Lummer und Pringsheim meinen. Denn das Thermoelement war mit Schmelzpunkten in einer bezüglich der Wärmeableitung ähnlichen Anordnung geaicht, wie es bei den Messungen benutzt wurde. Dagegen könnten grössere Fehler durch die Abweichung meines damals benutzten berussten Bolometerstreifens von der absoluten Schwärze verursacht sein.

Auf die Behauptungen Lummer's und Lummer und Pringsheim's, meine an Platin und Russ gefundenen Zahlenwerte: $5{,}43^{te}$ bez. $4{,}53^{te}$ Potenz der Temperatur für die Gesamtstrahlung von Platin bez. Russ seien falsch, und in Wirklichkeit seien die Zahlenwerte 5,0 bez. 4,0, muss ich entgegnen, dass man bei diesen Strahlungskörpern vorläufig gar nicht sagen kann, welches Gesetz in Wirklichkeit gelte. Beide sind dafür viel zu schlecht definirbar. Jedenfalls stimmen meine beiden Messungen der Gesamtstrahlung, die directe und die indirecte, für beide Fälle sehr gut miteinander überein. Unrichtig werden natürlich sowohl meine wie Lummer und Pringsheim's Werte sein, dass aber meine Versuche die Potenzen 5,0 bez. 4,0 hätten ergeben müssen, scheint mir doch eine sehr gewagte Behauptung. Uebrigens sind die experimentellen Grundlagen der von den Verfassern angeführten Versuche und Resultate über Russ nirgends veröffentlicht. Es

würde gewiss interessiren, auf welche Weise bei einer „genügend dicken Schicht" die Temperaturen der äusseren wirksamen und gewöhnlich verschieden temperirten Schichten überall gleich gemacht sind. Denn solange sie verschieden sind, aussen kühler, als innen, ist die Strahlung zusammengesetzt aus Strahlungen verschieden temperirter Schichten, welche sich gegenseitig durchscheinen und also schwerlich als einwandfrei gelten können. Gerade diese Schwierigkeit veranlasste mich, dünne Schichten Russ zu benutzen (auch beim Bolometer), deren Dicke nach meinen damaligen Angaben gerade genügte, um den Metallglanz des darunter liegenden Platins zu vernichten.

Ich möchte noch erwähnen, dass bei einer vielleicht etwas besser reproducirbaren Strahlung, der des Eisenoxydes, aus meinen älteren Spectralversuchen indirect folgt, dass die Gesamtstrahlung der $4{,}6^{\text{ten}}$ Potenz der Temperatur proportional sich ändert, während Lummer (allerdings ohne Beweis) angiebt, er hätte im Verein mit Kurlbaum direct die $4{,}5^{\text{te}}$ Potenz[1]) gefunden. Die gute Uebereinstimmung, die hier herrscht, scheineu aber Lummer und Lummer und Pringsheim wohl ganz übersehen zu haben.

Ich gebe zu, dass meine damaligen Versuche unvollkommener waren, als die neuen von Lummer und Pringsheim (dies ist in der erfreulichen Entwickelung der Hülfsmittel für diese Arbeiten in den letzten Jahren begründet), aber in der von den Verfassern dargelegten Weise dürften sie nicht zu beurteilen sein.

Was in dem „antikritischen Teile" der Verfasser gesagt wird, ist durch das Bisherige grösstenteils erledigt, z. B. die Teile a) und b). Zum Teil c) bemerke ich, dass ich Thiesen's Formel in den unter a) citirten Worten nicht „auf einem Gebiete in Anspruch nehme, auf welchem sie durch Lummer und Pringsheim's Versuche gar nicht geprüft werden kann", sondern auf dem Gebiete kleinerer Wellenlängen der zwei ersten Arbeiten der Verfasser. Sie haben selber gesagt, dass die Formel auch dort ihre Versuche darstelle. Auch ist der von ihnen angegebene, jetzt als falsch zu bezeichnende systematische Gang der Werte $c$ für $\lambda T < 3000$ in guter Ueber-

1) O. Lummer, Pariser Referat p. 76. 1900.

einstimmung mit Thiesen's Formel (vgl. p. 650). Ich habe das in meiner letzten Arbeit p. 298 Anm. betont. Aber diese einzige „kritische Bemerkung" von mir ist im „antikritischen Teil" der Verfasser nicht behandelt. Im Widerspruch mit dem systematischen der Thiesen'schen Formel entsprechenden Gange der Werte $c$ bei den Isochromaten kleiner Wellenlänge der Verfasser steht ihre Bemerkung: „Für die niederen Temperaturen zeigt nämlich die Thiesen'sche Formel merkliche Abweichungen."

Es ist unrichtig, dass ich Thiesen's Formel herangezogen hätte, um Schlüsse zu entschuldigen.

Zu d) bemerke ich, dass ich es nach wie vor als einen Mangel der Arbeiten Lummer und Pringsheim's ansehe, dass sie nicht von vornherein zeigten, wie weit ihre Resultate dem von ihnen sogenannten „Verschiebungsgesetze" genügten. Erst durch die Behauptung, dass die Resultate Thiesen's Formel folgten (deren Beweis übrigens für die Flussspatversuche nie veröffentlicht wurde), wurde dieser Mangel beseitigt, wobei aber dann der Widerspruch bleibt, dass diese Formel für kleine Wellenlängen galt, nicht aber für niedere Temperaturen, obwohl das Gebiet der Werte $\lambda T$ in beiden Fällen das gleiche ist. Die von den Verfassern bemerkten, aber nicht genauer beschriebenen Abweichungen ihrer Resultate bei niederen Temperaturen von Thiesen's Formel würden also zugleich Abweichungen ihrer Resultate von Wien's Verschiebungsgesetz bedeuten.

Der Absatz e) scheint mir auf einem Missverständnis zu beruhen. Unter den Gründen, welche mich bewogen, die gefundenen Abweichungen bei grösseren Werten $\lambda T$ solange als fehlerhaft anzusehen, bis ich sie als richtig erkannte, führte ich auch den an, dass es nur ein verhältnismässig kleines Gebiet meiner Beobachtungen war, in welchem ich Wien's Gesetz nicht gültig fand. Ich hatte eben in dem Gebiete kleinerer Werte $\lambda T$ nicht die unrichtigen „systematischen Aenderungen" des Wertes $c$.

Im Absatze f) stellen die Verfasser nochmals in ihrer Weise den von mir begangenen und ausführlich von mir selber berichtigten Fehler dar.

Der IV. kritische Teil der Lummer-Pringsheim'schen Ausführungen gipfelt in einem meines Erachtens ziemlich

künstlichen Nachweise, dass die von mir benutzten Hohlräume die „schwarze Strahlung" nicht aussendeten. „Denn soviel aus der Beschreibung ersichtlich ist, sind bei ihm weder die Bedingungen erfüllt, welche notwendig sind, um die Oberfläche des strahlenden Hohlraumes auf eine gleichmässige Temperatur zu bringen, noch sind Kriterien vorhanden, welche eine genaue Beurteilung der Temperaturgleichheit gestatten." Dagegen behaupte ich, dass, wenn man überhaupt die Wände eines *Hohlraumes mit Oeffnung* gleich temperiren kann, dies bei meinen letzten Hohlräumen geschehen ist. Der abgeschlossene Luftraum, welcher sich zwischen dem heizenden Platinbleche und den Wänden des Hohlraumes befindet, sorgt sogar bei dem einen aus dem schlechten Wärmeleiter Porzellan gebildeten Hohlraum III für eine gleichmässige Temperatur. Hohlräume mit dicken Metallwänden, wie ich deren drei verschiedene anwandte, glühen infolge der Luftschicht völlig gleichmässig. Dazu kommt eine im Verhältnis zur Grösse des Hohlraumes sehr kleine Oeffnung. Meine Angabe: „Ich habe gefunden, dass die Temperaturungleichheiten der Wände durch diese beiden Verbesserungen für alle Temperaturen vollständig beseitigt werden", gründet sich auf messende Versuche, bei denen die Lötstelle eines Thermoelementes an verschiedene Stellen des Hohlraumes geführt wurde und keine merklichen Temperaturdifferenzen angab. Zur Beurteilung der Temperaturungleichheiten diente ferner der blanke Draht des Thermoelementes, dessen Verschwinden auf dem *geschwärzten* Grunde nach meinen Angaben[1]) und meiner Meinung ein sehr empfindliches Kriterium bildet. Ich habe Lummer und Kurlbaum's Hohlräume nie gesehen, möchte aber bemerken, dass der von ihnen beschriebene[2]) erstens keinen Luftraum zwischen heizendem Blech und Hohlraum und damit eine Anordnung nicht besitzt, welche nach meiner Erfahrung ausserordentlich wirksam einen gleichmässigen Glühzustand erzeugt. Zweitens ist die Oeffnung des von Lummer und Kurlbaum[3]) beschrie-

1) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 965. 1899.

2) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 5. p. 829. 1901.

3) Weder Hr. Wanner noch ich haben bisher gegen den von Lummer u. Kurlbaum construirten elektrisch geglühten schwarzen

benen Hohlraumes verhältnismässig gross, und Lummer und Pringsheim glauben ja in ihrer II. Serie erfahren zu haben, dass eine grosse Oeffnung stören kann.

Die Meinung der Verfasser, dass meine Strahlung nicht die richtige war, scheint mir aus diesen Gründen unrichtig. Auch übersehen sie bei ihren weiteren Ausführungen ganz die von mir betonte Thatsache, dass, je kleiner die Oeffnung war, um so grösser die Abweichung der Resultate am absteigenden Aste der Energiecurven von Planck's Gesetz ausfiel. Bei einer grossen Oeffnung hatte ich nach meinen Angaben in meinen Versuchen über Energiecurven höherer Temperaturen bei 7,7 $\mu$ nur 6 Proc. und bei 9,3 $\mu$ nur 9 Proc. Abweichung. Die von mir zur Erklärung angegebene Vermutung, dass diese Abweichungen durch Beugung hervorgebracht waren, halte ich entgegen den unbewiesenen Behauptungen von Lummer und Pringsheim für sehr wahrscheinlich. Ich habe dies für einige meinen Anordnungen entsprechende Fälle rechnerisch bestätigt gefunden und habe schliesslich eine Energiecurve der Temperatur 1300° abs. aufgenommen, bei welcher die spaltförmige Oeffnung eines meiner letzten Hohlräume direct auf dem Spalte des Spectralapparates abgebildet war. Hier ist die Störung durch Beugung ausgeschlossen, und es ergab sich bei Berücksichtigung der neuen Reflexion Planck's Gesetz. Damit „fallen" so gut wie alle vorwurfsvollen Ausführungen der Verfasser in ihrem kritischen Teile „in sich zusammen".

Die Gründe, welche mich bewogen, die doppelte spectrale Zerlegung anzuwenden, habe ich ausführlich dargelegt. Zum Beispiel konnte man nicht wissen, welche Fehler infolge der

---

Körper Einwände erhoben, wie Lummer u. Kurlbaum behaupten, und ihre „jetzt als richtig erwiesene Annahme, dass der von ihnen beschriebene Körper die schwarze Strahlung vollkommener liefert, als der von uns nachgebildete", kann sich nur beziehen auf einen Hohlraum aus Porzellan, dessen Resultate Wanner und ich aus angegebenen Gründen verworfen haben. Da wir über die jetzt erst genauer beschriebene Construction der Lummer-Kurlbaum'schen Strahlungskörper nichts Näheres wussten, konnte der von uns verworfene diesem nicht wohl nachgebildet sein. Dass Lummer und Kurlbaum's Hohlraum die Strahlung des schwarzen Körpers auch vollkommener liefert, als die übrigen vielen Hohlräume, deren Resultate wir allein verwertet haben, dafür scheint mir kein Anzeichen vorhanden zu sein.

Diffusion der Strahlung durch blinde Stellen der Spiegel oder Inhomogenitäten des Prismas möglich waren. Ich halte die Anordnung keineswegs für eine unnötige Complication (auch nicht für die langen Wellen). Ihr glaube ich vor allem danken zu müssen, dass die Isochromaten so klar die Gültigkeit von Wien's Gesetz bis $\lambda T = 3000$ zeigten und von hier an ihre Krümmung erhielten. Lummer und Pringsheim haben keine Daten über dies Gebiet veröffentlicht, aus denen es auch nur annähernd möglich gewesen wäre, diesen Verlauf zu erkennen. Dagegen sind allerdings Lummer und Pringsheim der Meinung, „dass meine neuesten Versuche nichts Neues zur Kenntnis der schwarzen Strahlung beitragen".

Gegenüber den Bemerkungen der Verfasser unter IV. d) halte ich die Correctionen aufrecht, welche ich aus genau angegebenen Gründen an meinen Energiecurven niederer Temperatur noch für möglich halte. Diese Correctionen sind so geringfügig, dass die fraglichen Energiecurven entgegen der unbewiesenen Behauptung der Verfasser auch corrigirt noch Wien's oder Planck's Gesetz gleich gut bestätigen, und dass durch die Correction „auf der einen Seite etwas gewonnen und auf der anderen" *nichts* „verloren wird".

Ich sehe entgegen der Behauptung von Lummer und Pringsheim meine letzte Arbeit sowie alle meine früheren mit Ausnahme des von mir als unrichtig erkannten Teiles derjenigen über Energiecurven höherer Temperaturen als gute Bestätigung von Planck's neuem Gesetze an. Ich hätte die letzte Arbeit nicht veröffentlicht, wenn sie nicht folgende neue Thatsachen bewiese: 1. die scharfe Grenze der Gültigkeit von Wien's Gesetz, 2. die Bestätigung von Planck's Gesetz in dem angegebenen Gebiete der Variabelen $\lambda T$.

Zum Schlusse möchte ich darauf hinweisen, dass es gewiss erwünscht wäre, wenn Lummer und Pringsheim ihre Beobachtungen, besonders die mit Flussspatprismen angestellten, ein wenig ausführlicher, d. h. mehr durch Begründung der Behauptungen mit wiedergegebenem Beobachtungsmaterial veröffentlichen würden, damit auch Andere die Ueberzeugung gewinnen können, dass die Arbeiten von Lummer und Pringsheim wirklich die Beweiskraft haben, welche sie für dieselben in Anspruch zu nehmen scheinen. Ueber die so wichtige Wellen-

längenmessung sind nur wenige Angaben vorhanden. Auch schreiben sie II. Arbeit, p. 218 von „der bekannten Absorptionsbande der Kohlensäure bei 4,5 $\mu$." Nach meinen Wellenlängenbestimmungen (die doch nach ihrer eigenen Angabe I. Arbeit, p. 32 die Grundlage ihrer Versuche im Flussspatspectrum bilden) ist bei 4,5 $\mu$ keine grössere Absorption vorhanden, als an anderen Stellen des Spectrums, und es erstreckt sich der schmale Absorptionsstreifen der Kohlensäure der Zimmerluft höchstens von 4,13 bis 4.39 und hat sein Maximum bei 4.25 $\mu$.

Die Wellenlängenbestimmung ist in mehrfacher Hinsicht wichtig: Z. B. für die Berechnung der zum Uebergange auf das normale Spectrum nötigen Dispersion, oder für den Zahlenwert des constanten Productes $\lambda_m T$. Für den letzteren berechnen die Verfasser als Mittelwert aus Werten, welche schwanken zwischen 2980 und 2814 [1]), denjenigen 2940. Nach meinen Messungen kann er nicht erheblich grösser sein als 2920, ein Wert, der nach den einzelnen Zahlen der Tab. I p. 218, II. Arbeit von Lummer und Pringsheim ebensogut richtig sein kann, wie der 2940. Die aus meinen Energiecurven abgeleiteten Werte $\lambda_m T$, denen 2920 am besten entspricht, schwanken zwischen 2909 und 2929, obwohl mein Temperatur- und damit auch Wellenlängenbereich grösser ist [2]), und sind mit dem Wert 2940 nicht mehr im Einklang. Ausserdem befolgen meine bei doppelter Zerlegung beobachteten und die photometrischen Isochromaten Planck's Gesetz besser bei dem Werte $\lambda_m T = 2920$ als bei dem 2940. Daher bin ich vorläufig geneigt, meinen Wert für den richtigeren zu halten.

Ueber die Wiedergabe ihrer Isochromaten habe ich schon oben p. 648 gesprochen.

Es würde ferner wichtig sein, zahlenmässig zu sehen, welche Annäherung ihre mit Flussspatprismen aufgenommenen Energiecurven am absteigenden Aste an Planck's Gesetz zeigen.

Bei ihrer ersten und, wie es scheint, auch zweiten Veröffentlichung haben sie keine Correctionen wegen selectiver

1) Die Temperaturen der Energiecurven liegen zwischen 621 und 1646° abs. (diese letzte ist extrapolirt), die Wellenlängen zwischen 1,78 und 4,53 $\mu$.

2) Die Temperaturen liegen zwischen 373 und 1580° abs. und die Wellenlängen zwischen 7,8 und 1,85 $\mu$.

Reflexionsverluste, wegen der berechenbaren Unreinheit des Spectrums und wegen der Klappentemperatur angebracht. Die dort gegebenen Zahlenwerte, z. B. der 2940 für $\lambda_m . T$, werden also voraussichtlich eine, wenn auch geringe Aenderung erfahren müssen. Demgegenüber betone ich, dass in allen meinen Veröffentlichungen alle mir bekannten Correctionen stets, so genau es möglich ist, angebracht sind. Gerade durch die Anbringung dieser zeitraubenden Correctionen an den vielen Messungen ist die Veröffentlichung meiner Arbeiten (auch der 1892—1894 ausgeführten) bedeutend verzögert worden.

Lummer und Pringsheim können ihre Behauptungen am Schlusse ihrer Kritik bezüglich Planck's Gesetz nicht besser begründen, als durch die Veröffentlichung einer möglichst eingehenden Vergleichung aller ihrer Versuche mit diesem Gesetze, wie es von den Herren Rubens und Kurlbaum und von mir geschehen ist.

Zuletzt möchte ich nun aber betonen, dass, wenn ich auch mit ihrer Beurteilung der Arbeiten anderer nicht einverstanden bin, ich doch die sämtlichen Arbeiten von Lummer und Pringsheim und Lummer und anderen Mitarbeitern ausserordentlich anerkenne und mich sehr über die Förderung freue, welche die Wissenschaft durch diese mit grosser Energie und glücklicher Hand geführten Arbeiten erfahren hat.

(Eingegangen 27. September 1901.)

## 16. *Bemerkung zu der Mitteilung des Hrn. L. Lewin: „Zur Geschichte der Telegraphie“; von A. Baur.*

Hr. Lewin[1]) teilt eine Stelle aus einem 1622 in Paris erschienenen Buche mit, die nach seiner Auffassung beweist, dass damals schon eine telegraphische Vorrichtung nach Art des heutigen Zeigertelegraphen bekannt gewesen ist. Eine Parallelstelle dazu aus dem 1624 zu Pont-à-Mousson gedruckten Werke „Recreations mathematiques“[2]) lautet:

„Quelqu'vns ont voulu dire, que par le moyen d'vn aimant, ou autre pierre semblable, les personnes absentes se pourroient entre-parler? par exemple, Claude estant à Paris et Jean à Rome, si l'vn et l'autre auoit vne aiguille frottée à quelque pierre; dont la vertu fust telle, qu'à mesure qu'vne aiguille se mouuerait à Paris, l'autre se remuast tout de mesme à Rome; Il se pourroit faire que Claude et Jean, eussent chacun vn mesme alphabet, et qu'ils eussent conuenu de se parler de loing, tous les iours, à 6 heures du soir, l'aiguille ayant fait trois tours et demy, pour signal que c'est Claude, et non autre, qui veut parler à Jean. Alors Claude luy voulant dire que le Roy est à Paris, il feroit mouuoir et arrester son aiguille sur L. puis sur E. Puis sur R, O, Y, et ainsi des autres: Or en mesme temps, l'aiguille de Jean s'accordant sur les mesmes lettres, et partant il pourroit facilement escrire ou entendre ce que l'autre luy veut signifier.

L'inuention est belle, mais ie n'estime pas que il se trouue au monde vn aymant qui ayt telle vertu; aussi n'est-il pas expedient, autrement les trahisons seroient trop frequentes et trop ouuertes.“

Aehnliche Angaben finden sich bei nicht wenigen Autoren aus jener Zeit bis hinauf ins XVI. Jahrhundert, wie ich an einem anderen Orte ausführlicher darlegen werde. Bei keinem

1) L. Lewin, Ann. d. Phys. 4. p. 231. 1901.

2) Citat nach der 3. Aufl. p. 110. Rouen 1628. Vgl. auch Pogg. Ann. 82. p. 335, wo bereits auf diese Stelle aufmerksam gemacht ist.

derselben begegnet man auch nur einer Andeutung davon, dass ausser den beiden Magnetnadeln noch etwas anderes erfordert wäre, weshalb denn auch die meisten die Unausführbarkeit des Versuches schon bei mässiger Entfernung unumwunden eingestehen. Diese Angaben aber wären, wenn die Telegraphie im modernen Sinne schon damals wirklich erfunden gewesen wäre, nicht unwidersprochen geblieben, zumal da manche jener Bücher, so vor allem auch das oben citirte, sehr verbreitet waren, und in die verschiedensten Sprachen übersetzt wurden.

Hält man nun obige Stelle mit der von Hrn. Lewin mitgeteilten zusammen, so gewinnt man fast den Eindruck, als seien beide Berichte über dasselbe Zimmerexperiment, der eine geschrieben von einem Fachmann, der andere aber von einem Laien in der Wissenschaft. Zu letzterer Annahme nötigt auch die Qualification, die Hr. Lewin selbst seinem Gewährsmann giebt, wenn er ihn einen unwissenschaftlichen, ja „von Hass gegen die Vernunft befangenen" Menschen nennt.

In Ermangelung anderer Beweise zu Gunsten der Auffassung des Hrn. Lewin dürfte es demnach wohl geratener erscheinen, bei der bisherigen Ansicht über Entstehung und Erfindung der Telegraphie zu verbleiben.

(Eingegangen 29. August 1901.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1901. INDEXED № 12.

# ANNALEN
DER
# PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 6. HEFT 4.

DER GANZEN REIHE 311. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND HERAUSGEGEBEN VON

M. PLANCK

UND

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.

LEIPZIG, 1901.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 12 Heften (ca. 3 Bänden) erscheinenden Jahrgang 36 ℳ.

4. Franz Kiebitz. Bestimmungen der Resonanz elektrischer Schwingungen mit Hülfe des Cohärers . . . . . 1
5. A. W. Kapp. Ueber vollständige Gefrierpunktscurven binärer Metallegirungen . . . . . 7
6. Anton Abt. Ueber den permanenten Magnetismus einiger Stahlspecialitäten (Manganstahl, Chromstahl, Nickelstahl, Wolframstahl etc.) . . . . . 7
7. W. Voigt. Magnetische Drehung der Polarisationsebene innerhalb eines Absorptionsstreifens . . . . . 7
8. O. Grotrian. Elektrometrische Untersuchungen über unipolare Induction . . . . . 7
9. Max Planck. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge . . . . 8
10. G. Reichardt. Ueber die elektrischen Eigenschaften der Legirungen von Kupfer und Kobalt . . . . . 8
11. Robert Geigel. Beitrag zur akustischen Anziehung . . . . 8
12. C. Dieterici. Zur Theorie des Sättigungszustandes . . . . 8
13. G. Jäger und St. Meyer. Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. J. Koenigsberger betreffs der Susceptibilität des Wassers . . . . . 8

Manuscripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drud zu senden. Seine Adresse ist Giessen, Nahrungsweg 2.

Es wird gebeten, die Manuscripte druckfertig einzuliefern und dem Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung d Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Ma script selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in d Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht gen anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscript

1901. № 12.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 6.

ASTOR, LENOX AND TILDEN FOUNDATIONS

## 1. *Ueber Elektrisirung der Luft durch Glimmentladung; von O. Lehmann.*

(Hierzu Taf. II, Figg. 1—28.)

Untersuchungen über elektrische Entladungen hatten mich zu der Ansicht geführt, zur Erlangung weiterer Aufklärung müsse die Anwendung grosser weiter Entladungsgefässe von besonderem Vorteil sein. In neuerer Zeit habe ich deshalb vorzugsweise Entladungsvorgänge in Gefässen von 30—40 cm Weite und 60—70 cm Länge mit kugelförmigen Elektroden von 7 cm Durchmesser untersucht, worüber später näher berichtet werden soll.

Als normale Entladungsart tritt in solchen grossen Gefässen die bekannte Glimmentladung[1]) auf, bestehend aus der blauen Glimmlichthülle an der Kathode und dem die Anode bedeckenden rötlichen positiven Glimmlicht. Der Raum zwischen diesen beiden die Elektroden vollständig umkleidenden Lichtmassen bleibt dunkel, die sogenannte positive Lichtsäule fehlt gänzlich. Im wesentlichen ist die Entladungsart identisch mit derjenigen, welche in freier Luft bei Anwendung weit voneinander abstehender spitzer Elektroden auftritt und auch in gleicher Weise als Glimm- oder Spitzenentladung bezeichnet wird.

Besonders merkwürdig ist der an der Kathode auftretende dunkle Kathodenraum. Seine Dicke hängt von der Gasdichte ab und wurde früher als einzig davon abhängig betrachtet. Sie ist, wie sich später zeigte, keine gleichmässige, sondern, wenn das Glimmlicht nicht die ganze Kathode bedeckt, am Rande stets etwas grösser.[2]) Im vorigen Winter machte ich ferner gelegentlich die Beobachtung, dass sie sich auch bei

1) Vgl. O. Lehmann, Die elektr. Lichterscheinungen oder Entladungen, p. 9. W. Knapp, Halle 1898.

2) l. c. p. 305.

durchaus gleichbleibendem Gasdrucke innerhalb weiter Grenzen ändern kann, wenn sich die Stromstärke ändert.[1]) Als Elektricitätsquelle diente dabei ein geladener Condensator von 8 Mikrof. Capacität. In dem Maasse als sich die Ladung erschöpfte, somit Stromstärke und Spannung geringer wurden, nahm die Dicke des dunkeln Kathodenraumes von etwa 2 cm bis zu etwa 20 cm zu, die blaue Glimmlichtschicht schien allmählich von der Kathode gegen die Anode hin fortzuwandern, bis schliesslich beim Sinken der Spannungsdifferenz auf etwa 350 Volt der Stromdurchgang plötzlich aufhörte.[2])

Neuerdings machte ich eine noch merkwürdigere Beobachtung in einem Gefäss, welches speciell zur Erzeugung von Canalstrahlen vorgerichtet war. Ebenfalls bei anscheinend ungeändertem Luftdruck, aber bei Anwendung eines Hochspannungsaccumulators als Stromquelle, wuchs die Dicke des dunkeln Kathodenraumes langsam, etwa in einer Stunde von 1 cm bis auf über 30 cm, sodass schliesslich die ganze Anode in denselben eingetaucht war und dadurch ein so hoher Widerstand sich geltend machte, dass selbst die volle Spannungsdifferenz des Accumulators von mehr als 2000 Volt nicht mehr ausreichte, den Stromdurchgang zu unterhalten, während anfänglich 450 Volt genügt hatten. Bei Anwendung höherer Spannung trat lebhafte Fluorescenz der Glaswand ein, die Dicke des dunkeln Raumes wurde aber bald wieder kleiner.

Ich hatte nun früher versucht, die Bildung des dunkeln Kathodenraumes auf Anhäufung elektrisirter Luft in der Nähe der Kathode zurückzuführen. Die neuen Beobachtungen schienen mit jener Annahme wohl verträglich und da, wie schon bemerkt bei der Entladung in weiten Entladungsgefässen der grösste Teil des Gasinhaltes dunkel bleibt, ähnlich wie bei der Spitzenentladung in freier Luft, so schien es mir zweckmässig, zunächst in letzterem Falle, wobei keine Störungen durch Gefässwände auftreten, das Wandern, die Ausbreitung und Anhäufung elektrisirter Luft, überhaupt deren Eigenschaften näher zu untersuchen.

1) Vgl. auch A. Wehnelt, Strom- und Spannungsmessungen an Kathoden in Entladungsröhren, p. 5. S. Hirzel, Leipzig 1901.

2) Zuvor wurde die Lichterscheinung flackernd, auch wurde völlig lichtloser Stromdurchgang beobachtet.

Als Stromquelle diente eine gewöhnliche Influenzmaschine, durch einen Elektromotor in gleichmässiger Drehung gehalten und durch etwa 20 m lange, mit Guttapercha umkleidete und ausserdem durch dicke Kautschukschläuche hindurchgezogene Leitungsdrähte mit dem in einem anderen, sehr geräumigen Zimmer befindlichen Entladungsapparat verbunden. Dieser Apparat bestand aus einer an der Zimmerdecke aufgehängten, in eine Nähnadel endigenden, bis auf etwa 2 cm von deren Spitze von einer starkwandigen, gut isolirenden Glasröhre umgebenen Elektrode, an welche der Zuleitungsdraht direct angelötet war und zwar, um Entweichen der Elektricität zu hindern, so, dass der den Draht umgebende Kautschukschlauch noch in die Glasröhre hineinragte. Der Fussboden unter der aufgehängten Spitzelektrode war mit grossen Blechtafeln belegt, die gleichfalls an die Wasserleitung angeschlossen waren. Der Spitzelektrode konnte eine gleichbeschaffene und in gleicher Weise mit der Influenzmaschine verbundene auf dem Boden stehende zweite Spitzelektrode gegenübergestellt werden.

Um die kleinen Störungen im Gange der Influenzmaschine auszugleichen, war diese nicht direct mit dem Enladungsapparat verbunden, sondern zunächst (unter Einschaltung von Glycerinwiderständen) mit einer Batterie von sehr grossen Leydener Flaschen, welche somit die directe Elektricitätsquelle für den Entladungsapparat darstellte. Zuweilen wurde auch an Stelle der gewöhnlichen Influenzmaschine eine 60plattige verwendet, bei welcher der Ueberschuss der Elektricität durch einen Nebenschluss, bestehend aus zwei in der Mitte grösserer Blechscheiben eingesetzten in etwa 10 cm Abstand gebrachten Platinspitzen, fortgenommen wurde.

Zur Beurteilung der Constanz der Spannung der Flaschenbatterie war auf dieselbe ein Quadrantelektrometer aufgesetzt und ausserdem ein in der Nähe des Entladungsapparates (in etwa 2—3 m Entfernung) isolirt aufgestellter kleiner Gasbrenner durch eine die Wand durchdringende Leitung mit einem in einem dritten Zimmer stehenden Elektroskop verbunden. Jede Aenderung in der Leistung der Maschine machte sich infolge der Saugwirkung der Flamme alsbald durch eine Aenderung im Ausschlag des Elektroskopes bemerklich und konnte durch Regulirung des Elektromotors von der Beobachtungsstelle aus sofort berichtigt werden.

Was die Höhe der angewandten Spannung anbelangt, so war dieselbe in der Regel so bemessen, dass die Schlagweite zwischen Messingkugeln von 16,5 mm Durchmesser 14 mm betrug, zuweilen aber auch wesentlich grösser war. Die Stärke des der Spitze zugeleiteten Stromes war im Maximum etwa 3 Milliontel Amp., gewöhnlich vielleicht 10 mal kleiner.

Zunächst wurde nur die aufgehängte Spitzelektrode benutzt und der untere Pol der Influenzmaschine ebenso wie der Blechbelag des Fussbodens mit der Wasserleitung verbunden.

Könnte das Ausströmen der Elektricität aus der Spitze verhindert werden und könnte die Elektrode als unendlich lang und der gegenüberstehende Blechbelag als unendlich ausgedehnt betrachtet werden, so wären die Niveauflächen des Potentiales confocale Hyperboloide, welche Uebergangsformen zwischen der linearen Elektrode und der gegenüberstehenden ebenen Platte darstellen. Die Kraftlinien würden sich zu confocalen Ellipsoiden aneinanderreihen, welche die Hyperboloide senkrecht durchdringen. Es wurde ein Versuch gemacht, wenigstens annähernd die Verteilung dieser Niveauflächen zu ermitteln. Zu diesem Zwecke wurde die Spitze mit einer Glaskappe überdeckt, und diese mit dem die Elektrode umgebenden Glasrohr dicht verkittet, sodass ein Ausströmen der Elektricität unmöglich war. Zur Messung des Potentiales diente ein Wassertropfencollector, bestehend aus einer etwa 1,5 m langen, durch einen Schlauch mit einer isolirt aufgestellten Wasserflasche verbundenen Glasröhre, in welche ein blanker Draht bis nahe zur Mündung eingeführt war. Das andere Ende des Drahtes stand mit einer durch Guttapercha, Kautschuk und Ebonit wohl isolirten, die Zimmerwand durchdringenden Leitung mit einem im dritten Zimmer stehenden Braun'schen Elektrometer (für 10000 Volt) in Verbindung, dessen Gehäuse an die Wasserleitung angeschlossen war. Der durch diesen Tropfencollector ermittelte Verlauf der Niveauflächen ist in Fig. 1 (Taf. II) dargestellt.[1]) Die erste gezeichnete Niveaulinie über dem Boden entspricht dem Potential 1000 Volt, jede folgende einem um 1000 Volt höheren Werte, also die nächste der Spannung 2000 Volt etc.

1) Die Höhe der Spitze über dem Boden betrug 60 cm. Damit ist zugleich der Maassstab der Figur gegeben. Gleiches gilt für die folgenden Figuren.

Der Verlauf ist, wie man sieht, ungefähr der erwartete. Die Abweichungen erklären sich durch einige vorhandene Störungen, welche bei den folgenden Versuchen beseitigt wurden.

Könnte die Elektricität aus der Spitze ausströmen und würde sich die Luft verhalten wie ein schlechter Leiter, etwa wie reines Wasser, so würde sich ein anderer Verlauf der Potentialverteilung herstellen; die Niveauflächen wären nunmehr Kugelflächen, mehr oder minder excentrisch zur Spitze gelegen und Uebergangsformen zwischen der als unendlich kleine Kugel gedachten Spitze und der gegenüberstehenden Platte darstellend. Die Kraftlinien wären Kreisbögen, welche von der Spitze ausgehen und den Boden senkrecht treffen.

Zur Ermittelung der Flächen gleichen Potentiales könnte eine Sonde dienen, bestehend aus einem bis an die Spitze in eine Glasröhre eingeschlossenen Metalldraht, welcher ähnlich wie der Tropfencollector im vorigen Fall mit dem Elektrometer durch eine wohl isolirte Leitung verbunden ist. Derartige Sonden wurden in neuerer Zeit vielfach zur Bestimmung des Potentialgefälles bei Gasentladungen gebraucht. Sie müssen die richtigen Potentialwerte ergeben, wenn sich das Gas wie ein schlechter Leiter verhält, auf welchen das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet.

Bei Vorversuchen ergab sich, dass es nicht zweckmässig ist, wenn, wie gewöhnlich, der Draht der Sonde nur in einer kleinen Spitze endigt, da dann die Dauer, bis die endgültige Ladung des Elektrometers eingetreten ist, so lang wird, dass nicht nur die Beobachtungen ausserordentlich viel Zeit beanspruchen, sondern auch die unvermeidlichen Mängel der Isolation und die Schwankungen im Gange der Influenzmaschine sich störend geltend machen. Darum wurde am Ende des Drahtes eine Messingkugel von 27 mm Durchmesser angebracht.

Ferner stellte es sich als zweckmässig heraus, die den Draht umgebende Glasröhre mittels zweier Ebonitpfropfen durch eine andere Glasröhre oder Messingröhre zu führen, da sonst auf der Glasröhre angesammelte Elektricität wegen der mangelhaften Isolation des Glases dem Drahte und damit dem Elektrometer zugeführt werden kann.

Die so vorgerichtete Sonde von etwa 1,5 m Länge soll als „Kugelsonde" bezeichnet werden. Sie war auf einem nach

Art eines Perspectives ausziehbaren Stativ befestigt, sodass sich die Kugel in alle Höhen zwischen dem Fussboden und der 4,4 m hohen Zimmerdecke bringen liess. Das Stativ stand auf Rollen, sodass die Kugel ausserdem in alle möglichen Abstände von der Elektrode bis zu der 5,1 m entfernten Wand des Zimmers gebracht werden konnte.

In der Regel wurden von 10 zu 10 cm fortschreitend, sowohl in horizontaler wie in verticaler Richtung die Potentiale in einer durch die Elektrode gehenden Ebene bestimmt, die Zahlen in ein Coordinatensystem eingetragen und sodann die Punkte gleichen Potentiales miteinander verbunden. Diejenigen Punkte, bei welchen das Elektrometer beim Annähern der Sonde gegen die Elektrode eben noch keinen merklichen Ausschlag zeigte, sind in sämtlichen Figuren (Taf. II) durch die punktirte Curve verbunden. Die nächsten Niveaulinien entsprechen wie bei Fig. 1 (Taf. II) der Reihe nach den Potentialen 1000, 2000, 3000 Volt etc. Die innerste Curve entspricht gewöhnlich der Spannung 10000 Volt, der Grenze des Messbereiches des angewandten Elektrometers, zuweilen wurden aber auch noch 11000 und 12000 Volt geschätzt. In allen Fällen ist der Potentialunterschied zweier aufeinander folgender Niveaulinien in sämtlichen Figuren 1000 Volt.[1])

Die Fig. 2 (Taf. II) stellt die Ergebnisse eines der ersten Versuche dar bei verhältnismässig geringer Spannungsdifferenz zwischen Spitze (Höhe 60 cm, Ladung negativ) und dem Fussboden. Wie man sieht entspricht der Verlauf der Aequipotentiallinien auch nicht entfernt der Annahme, die Luft besitze ein Leitungsvermögen wie ein schlechter Leiter. Wohl sind in der Nähe der Spitze die Niveauflächen ungefähr Kugelflächen, wie sie es der Theorie nach sein sollen; nach unten

1) Da die Versuche sehr zeitraubend waren und in der Regel jede Aufnahme einen ganzen Tag beanspruchte, während dessen die Leistung der Influenzmaschine aus verschiedenen Gründen nicht ganz gleichmässig gehalten werden konnte, zeigten die beobachteten Curven mannigfache Ausbiegungen nach der einen und anderen Seite. In den Figuren sind die Curven glatt ausgezogen, dem nach Augenmaass geschätzten mittleren Verlaufe entsprechend. Weit grössere Genauigkeit liesse sich natürlich erzielen bei Anwendung einer constanten Elektricitätsquelle, die mir aber nicht zur Verfügung stand. Für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung erscheint die Genauigkeit ausreichend.

hin erscheinen sie dagegen stark aufgebaucht, sodass sie die Bodenfläche, an welcher notwendig das Potential überall gleich Null sein muss, unter stumpfen Winkeln zu schneiden scheinen, anstatt ihr annähernd parallel zu gehen. Dieses Verhalten tritt besonders dann auffällig hervor, wenn man die Sonde im Abstand von wenigen Millimetern vom Boden von aussen gegen die Mitte zu verschiebt. Während bei der punktirten Curve das Potential noch gleich Null ist, steigt es beim Ueberschreiten dieser Grenze rasch an und wächst gegen die Mitte hin auf über 7000 Volt. Diesen hohen Wert würde man dort selbst dann noch erhalten, wenn etwa die Sonde in einen entsprechenden Ausschnitt des Fussbodens isolirt eingesetzt würde.

Es giebt nur eine einzige Erklärung für solchen eigentümlichen Verlauf der Niveauflächen, nämlich die, die Luft zwischen Spitze und Platte sei elektrisch, womit natürlich nichts darüber ausgesagt ist, ob die Luft im ganzen oder nur einzelne Teile derselben z. B. die Stickstoffmolecüle oder freie Atome, elektrisch sind. Jedenfalls kann nicht etwa, wie man zuweilen vermutet hat, Staub der Träger der Elektricität sein, da die geringe Capacität der wenigen Staubteilchen[1]) bei weitem nicht im stande wäre, die verhältnismässig grosse Menge der übergehenden Elektricität (einige Mikrocoulomb pro Secunde) zu übertragen und in staubfreier Luft elektrischer Wind, soweit nicht Zerstäubung der Elektrode in Frage kommt, überhaupt unmöglich sein würde.

Einem bekannten Satze zufolge kann im Innern eines

1) Die Capacität eines kugelförmig gedachten Staubteilchens von 0,002 mm Durchmesser ist rund $10^{-16}$ Farad., somit die Ladung, die es bei 100000 Volt Spannung annimmt, rund $10^{-5}$ Mikrocoulomb. Um somit die beobachtete Stromstärke zu erhalten, müsste pro Secunde gegen eine Million solcher Staubteilchen mit der Spitze in Berührung kommen. Denkt man sich dieselben unmittelbar aneinander gereiht, so wäre die Länge der Reihe nahezu 2 m. Die Geschwindigkeit des Windes an der Spitze müsste also weit grösser als 2 m pro Secunde sein. Das Volumen der dicht aneinanderliegenden Staubteilchen wäre rund 0,008 cmm somit die im Laufe der Versuchsdauer elektrisirte und an den Wänden niedergeschlagene Staubmenge, wenn man die Dauer zu 10 Stunden annimmt, und das specifische Gewicht des Staubes gleich 1, gegen 0,3 g. Soviel Staub müsste deutlich wahrnehmbar sein und könnte am allerwenigsten durch Zerstäubung der feinen Spitze entstehen. (Vgl. auch O. Lehmann, Elektrische Lichterscheinungen oder Entladungen, p. 80 u. p. 106).

stromdurchflossenen Leiters keine freie Elektricität vorhanden sein. Der Versuch beweist also mit Sicherheit, dass die Luft kein Leiter der Elektricität ist, dass man nicht berechtigt ist, von einem Leitungsvermögen der Luft zwischen Spitze und Boden zu sprechen.

Erteilt man der Sonde, ehe sie der Elektrode genähert wird, etwa durch Berühren mit einem geriebenen Ebonit- oder Porzellanstab eine elektrische Ladung von gleicher Art wie die Ladung der Elektrode und bringt sie nun in die Nähe derselben, so bleibt die Ladung unverändert, bis eine Niveaufläche höheren Potentiales erreicht wird, ein zweiter Beweis dafür, dass die Luft kein Leitungsvermögen besitzt.

Bringt man zwei Sonden, welche sich auf verschiedenen Niveaucurven befinden, miteinander in leitende Verbindung, welche an einer Stelle durch ein Funkenmikrometer unterbrochen ist, so springen so lange Funken über, bis die dem niederen Potential entsprechende Sonde die Spannung der anderen angenommen hat. Dieses höhere Potential behält sie bei, sowohl bei dauernder Verbindung mit der anderen Elektrode, wie getrennt von derselben. Auch dieser Versuch zeigt, dass die Luft kein Leitungsvermögen besitzen kann, denn sonst müsste jede Sonde das Potential des Ortes annehmen, an dem sie sich befindet. Der Versuch zeigt aber ferner, dass man beim Gebrauch von Sonden die Vorsicht anwenden muss, die Sonde entweder immer nur von Orten niederen Potentiales zu solchen höheren zu bringen oder aber sie nach jeder Messung zu entladen.

War die Ladung der Sonde der der Elektrode entgegengesetzt, so verliert sie dieselbe bei der Annäherung an die Elektrode vollkommen und ladet sich alsbald auf den richtigen Potentialwert. Scheinbar besitzt also die Luft in der Nähe der Elektrode ein unipolares Leitungsvermögen.

Die Fig. 3 (Taf. II) zeigt, dass die Curven ungefähr ebenso verlaufen, wenn statt der an der Decke hängenden Spitzelektrode eine auf dem Fussboden stehende (Höhe 205 cm, Elektrisirung positiv) verwendet wird. Wird die elektrische Spannung vergrössert, so erhält das Curvensystem, wie Fig. 4 (Spitzenhöhe 24 cm, Elektrisirung negativ) und Fig. 5 (Taf. II) (Höhe 60 cm) zeigen, in der Mitte eine Ausbiegung, welche

bis zur Zimmerdecke (Höhe 441 cm) reichen kann, an welcher ebenso wie am Fussboden das Potential Null verhanden ist.

Die Erklärung für das Auftreten der Elektrisirung der Luft wurde bereits von Faraday gegeben.[1]) Durch die Glimmentladung an der Spitze wird die Elektricität an die Luft übertragen und die elektrischen Teilchen bewegen sich, den Kraftlinien folgend weiter, bis sie einen Körper niedrigeren Potentiales treffen, an welchen sie die Ladung abgeben. Diese elektrisirten Teilchen, welche Giese als Ionen auffasst[2]) sind nicht zu verwechseln mit den Elektronen, welche neueren Theorien zufolge den Durchgang der Elektricität durch Gase vermitteln sollen. Da nämlich die negativen und positiven Elektronen ausserordentlich verschiedene Masse besitzen müssen, wäre anzunehmen, dass sie bei dem Fortwandern in der Luft sehr verschiedenen Widerstand erfahren, somit die Ausbreitung der elektrisirten Luft und demgemäss die Gestaltung der Niveauflächen bei negativer Ladung der Spitze eine wesentlich andere sein müsste als bei positiver. Der Versuch zeigt genau das Gegenteil; der Sinn der Elektrisirung hat keinen Einfluss auf die Verteilung der Potentialwerte.

Bewegung der Luft erwies sich nicht ganz ohne Einfluss auf die Bewegung der Ionen, doch wurden keine Messungen über die hervorgebrachten Ablenkungen der Stromlinien ausgeführt. Dass die Bewegungsrichtung des elektrischen Windes im allgemeinen nicht mit der Bahn der Ionen übereinstimmt, ist bekannt.[3])

Würde man die Blechbelegung des Bodens mit Lycopodium bestreuen und nach dem Durchgang der Entladung darüber blasen, so entstände die bekannte Kundt'sche Staubfigur in Form eines scharf begrenzten Kreises, innerhalb dessen das Pulver an der Metallplatte haften bleibt. Im Dunkeln würde diese Fläche des Metalles von einem schwachen Glimmlichtnebel bedeckt erscheinen, da dort, wie auch der Verlauf der gezeichneten Niveaulinien lehrt, die elektrisirte Luft beim Auftreffen auf die Blechoberfläche so hohes Potentialgefälle erzeugt, dass daselbst Glimmentladung eintreten muss.

---

1) O. Lehmann, Elektrische Lichterscheinungen oder Entladungen, p. 58.

2) l. c. p. 110.

3) l. c. p. 101.

Denkt man sich alle Kraftlinien von der Spitze aus nach dem Umfang dieser Kreisscheibe gezogen, so könnte es scheinen, dass der gesamte convective Strom im Innern des so abgegrenzten Gebietes verlaufen müsste. Es müsste somit dieser Raum identisch sein mit dem in sämtlichen Figuren durch die punktirte Linie abgegrenzten Gebiet, es wäre dieses Gebiet das sogenannte „Entladungsgebiet".[1])

Dass dies unmöglich zutreffen kann, folgt schon daraus, dass die punktirte Linie eine Niveaulinie, nicht eine Stromlinie ist, die Stromlinien also zu ihr senkrecht verlaufen müssen. Die von der Spitze nach dem Kreisumfang senkrecht zu den Aequipotentialflächen gezogenen Stromlinien schliessen ein kegelförmiges Gebiet ein, welches sehr viel kleiner ist, als das von der punktirten Curve umgrenzte Gebiet, in welchem überall elektrische Strömung, auch solche nach der Metallplatte hin vorhanden ist. Hieraus folgt, dass jenes durch die Kundt'sche Staubfigur bestimmte Gebiet keineswegs das Entladungsgebiet ist, in welchem allein Entladung stattfindet, sondern dass der Kreis lediglich diejenigen Punkte einschliesst, an welchen das durch den elektrischen Wind hervorgebrachte Potentialgefälle ausreicht Glimmentladung hervorzurufen. Ausserhalb des Kreises erfolgt die Abgabe der Ladung der Ionen an die Metallplatte ohne Glimmlichterscheinung und ohne einen Entladungsvorgang, welcher im stande wäre, Lycopodium in solchem Maasse zu elektrisiren, dass es an der Platte haften bleibt.

Hierdurch entsteht nun aber die weitere Frage, welches ist denn das wahre Entladungsgebiet? Zieht man allenthalben die von der Spitze ausgehenden Stromlinien senkrecht zu den beobachteten Niveauflächen, so erfüllen sie den ganzen Raum. Obschon also die Sonde ausserhalb der punktirten Curve keinen Strom mehr anzeigt, muss ein solcher dort dennoch vorhanden sein. In der That gelingt es durch Anwendung eines feineren Elektrometers und einer Sonde mit grösserer Oberfläche die Grenze, an der das Potential gleich Null gefunden wird, etwas weiter hinauszurücken. Der Umstand aber, dass die Sonde bei Ueberschreitung der punktirten Linie fast plötzlich ein verhältnismässig hohes Potential annimmt, beweist, dass hier

1) l. c. p. 82.

eine principielle Schwierigkeit vorliegt, dass die gewöhnlich gemachte Voraussetzung, die Sonde nehme wirklich unter allen Umständen das Potential des Ortes an, an dem sie sich befindet, ähnlich einer Sonde, welche in eine schlechtleitende, stromdurchflossene Flüssigkeit eingetaucht wird, unrichtig ist, dass vielmehr die Sonde, falls die Spannung unter einer gewissen Grenze bleibt, die Ladung elektrisirter Luft nicht oder nur schwer mehr annimmt und demgemäss die mit ihr bestimmten Aequipotentiallinien nicht die wahre sein können und ebensowenig die nach deren Verlauf construirten Stromlinien.

Um den wahren Verlauf der Niveau- und Stromlinien zu erfahren, kann der Tropfen- oder Flammencollector dienen, da ein solcher (namentlich ersterer) theoretisch das wahre Potential des Ortes, wo er sich befindet, anzeigen muss. Die Sonde wurde deshalb in einen Flammencollector verwandelt in der Art, dass durch eine seitliche Ansatzröhre am hinteren Ende der Glasröhre Gas eingeleitet und so die Röhre in einen Brenner verwandelt wurde. Die Kugel am Drahte wurde abgenommen und durch eine feine Spitze ersetzt, welche in den leuchtenden Teil der Gasflamme hineinragte. Um Störungen durch etwaige Ausströmungen von der Oberfläche der immerhin, namentlich in ihrem oberen Teil nicht vollkommen isolirenden Glasumhüllung der Elektrode auszuschliessen, wurde diese bis zu 65 cm Abstand von der Spitze mit Stanniol umkleidet, und dieser Ueberzug mit der Wasserleitung verbunden.

Die nunmehr gewonnenen Aequipotentialcurven nebst den senkrecht dazu verlaufenden Stromlinien, soweit diese innerhalb der punktirten Nullcurve liegen, sind in Fig. 6, Taf. II (Höhe der Spitze 205 cm, Elektrisirung positiv) dargestellt. Fig. 7, Taf. II giebt die unter ähnlichen Umständen (Spitzenhöhe 60 cm, Elektrisirung negativ) mit der Kugelsonde beobachteten Niveaulinien. Das starke Potentialgefälle am Boden wird, wie man sieht, durch die Flammensonde nicht angegeben, offenbar weil die Flamme alle Elektricität an den Boden abgiebt.

Fig. 8, Taf. II endlich giebt zum Vergleich das System der elektrostatischen Niveau- und Kraftlinien, aufgenommen mit dem Flammencollector, nachdem über die Spitze eine Glaskappe gekittet war (Spitzenhöhe 60 cm, Elektrisirung negativ).

Die Fig. 9, Taf. II (Spitzenhöhe 236 cm, Elektrisirung positiv) stellt ein weiteres mit der Kugelsonde aufgenommenes System von Niveaulinien dar von solcher Ausdehnung, dass die punktirte Nulllinie bereits über den Rand der Zeichnung hinausgeht.

Wenn, wie aus den Figg. 2—9 zu schliessen, die Stromlinien von der Spitze nach allen Richtungen ausstrahlen, so muss die Strömung aufgehalten werden, falls, wie Fig. 10, Taf. II (Spitzenhöhe 171 cm, Ladung positiv) andeutet, senkrecht zu diesen Stromlinien eine Glasplatte aufgestellt wird. In dem abgebildeten Fall war die Länge der Glasplatte 1,8 m. die Breite 1 m. Sie war, wie die Fig. 10 zeigt, schräg zum Fussboden aufgestellt. Mit der Flammensonde würde es in diesem Falle nicht wohl möglich gewesen sein, den wahren Verlauf der Potentialcurven zu ermitteln, da durch die Flamme eine Störung in der Verteilung der Ladung auf der Glasplatte hervorgebracht worden wäre. Es wurde deshalb die Kugelsonde benutzt. Sie ergab auf der der Elektrode zugewandten Seite der Glastafel, wie die Curven der Fig. 10 zeigen, hohe Potentialwerte, auf der Rückseite dagegen, sowohl dicht an der Glasplatte, wie auch in dem leeren Raum dahinter, den Wert Null, vorausgesetzt, dass jeweils der durch Influenz in der Sonde zuerst hervorgebrachte Ausschlag des Elektrometers zunächst durch Ableitung beseitigt worden war.

In diesem Fall tritt der Unterschied zwischen der Wirkung von Kugel- und Flammensonde besonders deutlich hervor. Hinter der Glasplatte kann die Kugelsonde von elektrisirter Luft nicht getroffen werden, sie giebt deshalb, weil zuvor abgeleitet, das Potential Null an; die Flammensonde müsste dagegen ein Potential anzeigen, welches der Ladung der Glasplatte auf der anderen Seite entspricht, also in der Nähe der Glasplatte ungefähr ebenso hoch sein müsste, wie das auf jener Seite, vorausgesetzt, dass nicht etwa aus der Flamme so viel Influenzelektricität entweicht und auf der Glastafel sich festsetzt, dass hierdurch die Wirkung der Ladung auf der anderen Seite ganz oder teilweise compensirt wird, was bei vorübergehender ableitender Berührung der Sonde sehr wohl eintreten kann.

In der Nähe der Spitze dürften die mit der Kugelsonde

ermittelten Niveaulinien nicht viel von den wahren abweichen. Eine beträchtliche Verschiedenheit aber zeigt sich hinter der Glasplatte, wo die nach dem Verlauf der mutmaasslichen wahren Niveaulinien construirten Stromlinien die eingetragenen Niveaulinien auch nicht annähernd senkrecht durchschneiden.

Würde in den Fussboden eine Oeffnung gemacht, durch welche der elektrische Wind entweichen kann, so würde sich das System der Niveau- und Stromlinien auch durch diese Oeffnung hindurch fortsetzen. In welcher Weise es in Wirklichkeit geschieht, zeigt die mit der Flammensonde gemachte Aufnahme Fig. 11, Taf. II, bei welcher der von der Spitze (Höhe 236 cm, Elektrisirung negativ) ausgehende elektrische Wind auf eine Blechplatte (Format $134 \times 160$ cm) auftrifft, welche in der Mitte eine rechteckige Oeffnung von der Grösse $30 \times 63$ cm enthält. Diese Blechtafel war mit der Wasserleitung verbunden und somit ebenso wie der darunter befindliche Fussboden auf dem Potential Null. Man erkennt deutlich, dass der elektrische Wind selbst durch eine Oeffnung in einem zur Erde abgeleiteten Metallschirm hindurchgehen kann. Wurde die Oeffnung mit einem Drahtgitter mit etwa 1 cm weiten Maschen bedeckt, so war dies nicht mehr der Fall.

In allen betrachteten Fällen konnte die auftretende elektrisirte Luft nur die Elektricität der Elektrode angenommen haben, der auftretende elektrische Wind war unipolar. Von besonderem Interesse erscheint es, welche Modificationen eintreten, wenn zwei entgegengesetzte elektrische Winde zusammentreffen, d. h. wenn beide Conductoren der Influenzmaschine isolirt und miteinander zugewendeten Spitzelektroden verbunden sind. Den Verlauf der elektrostatischen Niveau- und Kraftlinien, wie er sich durch Untersuchung des elektrischen Feldes in der Nähe der mit Glaskappen bedeckten, 31 cm voneinander entfernten Spitzen mittels des Flammencollectors ergab, ist in der Fig. 12 (Ladung oben negativ) und Fig. 13 (Ladung oben positiv), dargestellt. (Höhe der unteren Spitze 205 cm, der oberen 236 cm.) Man erkennt auch aus diesen Figuren die störende Wirkung der Flamme, insofern die höchsten Potentialwerte keineswegs an den Spitzen vorhanden sind, sondern an einer mehr oder weniger von der Spitze entfernt liegenden Stelle, der die Elektrode umhüllenden Glasröhre,

weil nämlich auf die Glaskappen über den Spitzen aus der Flamme soviel entgegengesetzt Elektricität herangezogen wird, dass dieselben gewissermaassen wie Leydener Flaschen auf beiden Seiten gleich stark entgegengesetzt geladen sind, somit die Wirkung nach aussen beträchtlich vermindert wird. Ungefähr entspricht allerdings der Verlauf der Niveau- und Kraftlinien dem nach der Theorie vorauszusehenden.

Den mit der Flammensonde aufgenommenen Verlauf der Strom- und Niveaulinien bei freigegebenen Spitzen zeigen die Figg. 14 u. 15, Taf. II (Elektrisirung der oberen Spitze negativ). Da die Spannung an den beiden Polen der Influenzmaschine nicht genau gleich war, wurde derjenige Pol, welcher die höhere Spannung lieferte, mit einer Nähnadelspitze verbunden, welcher eine zum Erdboden abgeleitete Gasflamme in einiger Entfernung gegenüberstand. Die Entfernung wurde so geregelt, dass die Nulllinie des Potentiales gerade mitten zwischen die beiden Spitzen fiel.

Die beiden Figuren lassen deutlich erkennen, dass die Ausbreitung positiv und negativ elektrisirter Luft in genau derselben Weise erfolgt. Aus dem Verlauf der Stromlinien ist ferner zu schliessen, dass, ebenso wie bei Anwendung nur einer Spitze, ein grosser Teil der elektrisirten Luft von der unteren Spitze zum Fussboden, von der oberen zur Zimmerdecke wandert, dass aber im übrigen die beiden elektrischen Winde sich durchdringen, sodass scheinbar zwei entgegengesetzte Ströme von einer Spitze bis zur anderen verlaufen.

Die Untersuchung mit der Kugelsonde ergab, dass der Vorgang nicht ganz so einfach verläuft. Die mit dieser Sonde gewonnenen Niveaulinien sind in Fig. 16, Taf. II (Höhe der Spitzen wie zuvor, Ladung oben negativ) dargestellt.[1])

Wurde die Sonde mehr und mehr der Mitte genähert, wo das Potential Null herrscht, so wurde die Ablesung des Elektrometers immer schwieriger, indem die Nadel beständige Unruhe zeigte und zuweilen um 1000 und mehr Volt auf und ab schwankte. Dies ist die Stelle, wo die beiden elek-

1) Die Unsymmetrie der Fig. 16, die grössere Ausdehnung des Systems der negativen Curven, mag darauf beruhen, dass ein kleiner Ueberschuss an negativer Elektricität vorhanden war, oder dass die Kugelsonde diese leichter aufnimmt.

trischen Winde zusammentreffen und es ist somit anzunehmen, dass die Kugel bald stärker von dem einen, bald stärker von dem anderen elektrischen Wind getroffen wird, d. h. dass sich hier Wirbel ausbilden, ähnlich denjenigen, welche ich früher bei convectiver Entladung in schlechtleitenden Flüssigkeiten beobachtete.[1])

Dass aber auch eine gegenseitige Durchdringung der Winde stattfindet, dass zwischen den beiden Spitzen an derselben Stelle sowohl positiv wie negativ elektrisirte Luft vorhanden sein kann, lässt sich ebenfalls aus dem Verhalten der Kugelsonde deutlich erkennen, insofern sich an solchen Stellen die Luft scheinbar wie ein gewöhnlicher Leiter verhält. Wird die Sonde mit der Elektricität einer Spitze geladen und in den zum Fussboden bez. zur Zimmerdecke verlaufenden unipolaren Strom gebracht, so bleibt die Ladung unverändert. Die Luft verhält sich, wie schon oben bemerkt, wie ein Isolator. Nähert man nun aber die Sonde mehr und mehr der Mitte, so verliert sie nach und nach die Ladung bis zu dem an dem betreffenden Orte herrschenden Potentialwert und zwar um so rascher, je näher sie sich der Nullfläche des Potentiales in der Mitte befindet. In dieser selbst verliert sie jede ihr mitgeteilte Ladung sofort, mag diese positiv oder negativ sein. Man könnte geradezu durch Beobachtung der Entladungsdauer der Sonde an einer bestimmten Stelle des Entladungsgebietes auf den Procentsatz der herübergedrungenen entgegengesetzt elektrisirten Luft aus der anderen Hälfte des Entladungsgebietes einen Schluss ziehen.

Bringt man eine Sonde in den positiven Teil des Entladungsgebietes, eine zweite in den negativen und verbindet beide unter Zwischenschaltung eines Funkenmikrometers, so erhält man einen dauernden Funkenstrom.

Nicht anzunehmen ist, dass der von einer Seite kommende elektrische Wind entsprechend den Stromlinien sich verdichte und der Spitze auf der anderen Seite zuströme, um erst dort seine Elektricität abzugeben; vielmehr wird ebenso wie bei der convectiven Entladung in Flüssigkeiten schon auf dem Wege ein gegenseitiger Ausgleich der beiden Elektricitäten

1) l. c. p. 65.

stattfinden, wie auch daraus zu schliessen ist, dass bei rasch wechselnder Ladung der Spitze im einen und anderen Sinn (z. B. bei Zuführung von Wechselstrom) eine Ladung der Sonde überhaupt nicht mehr zu stande kommt, da die durch den einen Stromstoss hervorgerufene Wolke elektrisirter Luft durch die beim nächsten Stromstoss auftretende entgegengesetzt elektrisirte wieder entladen wird[1]) und nicht weiter fortschreiten kann. Wäre letzteres der Fall, so müsste die Luft bei Anwendung nur einer Spitze von hier an bis zum Fussboden wegen gleichzeitiger Anwesenheit beider Arten von Ionen sich wie ein Leiter verhalten, was nicht der Fall ist.

Nur bei sehr hohen Spannungen scheint eine Durchdringung der beiden elektrischen Winde von der einen Elektrode bis zur anderen möglich zu sein, da sich nur so die von mir früher beobachtete Erscheinung der elektrischen Doppelschatten[2]) erklären lässt, welche bei schwächeren Spannungen ausbleibt.

Von welchen Umständen die Schnelligkeit des Ausgleiches der Ladungen entgegengesetzter elektrischer Winde abhängt, ist eine Frage, welche noch näher zu untersuchen wäre.

Sind die Spannungen auf den beiden Conductoren nicht gleich, sondern ist die Spannung auf einem Conductor etwa infolge schlechter Isolation desselben niedriger, so wird naturgemäss auch das System der Niveaulinien unsymmetrisch. Bei den Figg. 17, 18 u. 19 (Taf. II) (Höhe der Spitzen 205 und 236 cm, Elektrisirung der oberen negativ) ist jeweils die obere Spitze diejenige mit höherer Spannung. Die Nullcurve des Potentiales ist nicht die Symmetrielinie zwischen den beiden Spitzen, sondern eine die untere positive Spitze vollkommen umschliessende Curve und zwar diejenige, welche der punktirten Curve am nächsten kommt. Bei der letzten der drei Figuren ist der Ueberschuss an negativer Elektricität so gross, dass der Strom negativ elektrisirter Luft nicht nur bis zur Decke reicht, sondern auch die positive Elektrode völlig umgiebt. Alle drei Aufnahmen sind mit der Kugelsonde gemacht.

Den Verlauf der wahren Niveau- und Stromlinien, mit der Flammensonde aufgenommen, zeigt in einem ähnlichen Fall

1) In nächster Nähe der Elektrode zeigte sich ein Ueberschuss der einen Elektricität ähnlich wie bei den bekannten Versuchen Himstedt's.

2) l. c. p. 98.

Fig. 20 (Spitzenhöhe wie zuvor, Elektrisirung der oberen Spitze positiv).

Befindet sich die untere Elektrode nahe dem Boden, so wird naturgemäss ein Teil des Ueberschusses von elektrischem Wind der oberen Elektrode vom Boden aufgenommen. Einen solchen Fall zeigen die Figg. 21, 22 u. 23 (Taf. II), bei welchen die positive Elektricität im Ueberschuss ist. (Die Spitzenhöhe bei den Figg. 21 u. 22 beträgt 60 und 24 cm, bei Fig. 23 236 und 205 cm, die Elektrisirung der oberen Spitze war bei den Figg. 21 u. 22 positiv, bei Fig. 23 negativ).

Bei der letzten derselben erfüllt die positiv elektrische Luft das ganze Zimmer und die punktirte Curve legt sich deshalb im grössten Teil ihres Verlaufes an Fussboden, Wände und Decke an.

Da sich, wie gezeigt, die entgegengesetzten elektrischen Winde zwischen den Spitzen gegenseitig durchdringen, so schien es von Interesse zu untersuchen, was geschieht, wenn man diese Durchdringung durch Zwischenschieben einer Glasplatte hindert. Der Abstand der Spitzen betrug wieder 31 cm. Die Grösse der mitten zwischen ihnen horizontal angebrachten Glasplatte $0{,}7 \times 1$ m. Um zu hindern, dass Elektricität durch Leitung von der oberen Seite der Glasplatte zur unteren gelange, wurde nicht eine einfache Glasplatte benutzt, sondern eine Doppelplatte, bestehend aus zwei gleichen Glasplatten, welche durch zwischengelegte Paraffinklötzchen in 2 cm Abstand voneinander gehalten wurden. Das mit der Kugelsonde erzielte Ergebnis zeigt Fig. 24 (Taf. II) (Spitzenhöhen 205 und 236 cm, Elektrisirung der oberen Spitze negativ), die Flammensonde ergab die in Fig. 25 (Taf. II) dargestellten Curven.

Wie man sieht, bewegen sich die beiden elektrischen Winde um die Ränder der Glasplatten herum, und das System der Niveau- und Stromlinien erleidet, abgesehen von der Mitte, kaum eine merkliche Aenderung, da sich die auf den beiden Glasplatten angehäuften entgegengesetzten Ladungen in ihren Wirkungen nach aussen nahezu compensiren.

Um noch auf andere Weise die Ausbreitung des elektrischen Windes zu stören, wurde die Glasdoppelplatte horizontal einige Centimeter über der oberen Spitze und einige Centimeter von deren Zuleitung entfernt aufgestellt. Es er-

gab sich eine Störung der Curven, wie sie die eine Hälfte der Fig. 26 (Taf. II) darstellt. Hätte man auch auf die andere Seite symmetrisch zur ersten eine solche Glasplatte gebracht, so würde auch diese Seite in gleicher Weise gestört worden sein, man hätte also ein Curvensystem erhalten, wie es die ganze Fig. 26 darstellt. Die obere Elektrode ragt hier durch eine Oeffnung in einem isolirenden Schirm hindurch und man sieht, dass ein grosser Teil des elektrischen Windes oben aus der Oeffnung entweicht, unbekümmert um die Anwesenheit der entgegengesetzten Elektrode. Gleiches zeigt die Fig. 27, deren Curven mit der Kugelsonde aufgenommen wurden.

Wurde die Vereinigung der beiden elektrischen Winde gehindert durch eine in der Mitte zwischen den Spitzen horizontal befestigte Blechtafel vom Format 134 × 65 cm, so trat, wie Fig. 28, Taf. II zeigt, kaum eine merkliche Störung der Stromlinien ein, da beide elektrischen Winde ihre Elektricität an die Blechtafel abgaben und somit in dieser die Vereinigung der Elektricitäten in ähnlicher Weise erfolgte, wie wenn sich die Winde direct getroffen hätten.

Würde man an Stelle der einfachen Blechplatte eine aus zwei durch Paraffinklötzchen getrennt gehaltene Platten bestehende Doppelplatte benutzen und die beiden Tafeln unter Zwischenschaltung eines Funkenmikrometers metallisch verbinden, so würde man einen dauernden Funkenstrom erhalten, so wie dies schon oben bei der Verwendung zweier Sonden beschrieben wurde.

Die Hauptergebnisse unserer Untersuchung sind die folgenden:

1. Convective Fortführung der Elektricität bei Glimmentladung an einer Spitze kann nicht als Folge einer Leitungsfähigkeit der Luft aufgefasst werden.

2. Ein elektrisch geladener Leiter (oder Isolator) in unipolar elektrischen Wind gebracht verliert seine Ladung nicht, falls die Elektrisirungen gleichartig sind, auch wenn sein Potential viel höher ist als das der elektrisirten Luft. Im entgegengesetzten Fall verliert er seine Ladung vollständig und erhält die entgegengesetzte entsprechend dem an der betreffenden Stelle herrschenden Potential.

3. Gewöhnliche metallische Sonden geben, namentlich bei niedrigen Potentialwerten, nicht den richtigen Verlauf der Niveauflächen und Stromlinien, wohl aber Tropfen- oder Flammencollectoren, insoweit sie nicht selbst zur Aenderung des elektrischen Zustandes Veranlassung geben.

4. Positiv und negativ elektrisirte Luft breiten sich in gleicher Weise aus, die Elektrisirung kann somit nicht bedingt sein durch die Anwesenheit frei beweglicher, wesentlich verschieden gearteter elektrischer Teilchen (Elektronen).

5. Die convective Strömung erfüllt den ganzen Raum rings um die Spitze. Das durch die Kundt'schen Figuren abgegrenzte Gebiet ist nicht das Entladungsgebiet, sondern es ist der Raum, in welchem der elektrische Wind genügend hohe Spannung besitzt, um beim Auftreffen auf die Platte Glimmentladung hervorzurufen.

6. Hinter einer senkrecht zu den Stromlinien gestellten isolirenden Tafel entsteht ein von elektrisirter Luft freier Raum (elektrischer Schatten).

7. Der elektrische Wind vermag eine Oeffnung in einem zur Erde abgeleiteten Schirm merklich zu durchdringen, wenn dieselbe (bei der angewandten Empfindlichkeit des Elektrometers) über 1 cm Durchmesser besitzt, er dringt aber nicht in merklicher Menge durch ein abgeleitetes Drahtgitter mit kleineren Maschen. (Nur gültig für die speciellen Versuchsumstände.)

8. Von zwei entgegengesetzt elektrischen Spitzen ausgehende elektrische Winde durchdringen sich unter Wirbelbildung der Luft, welche wechselnde Ablenkung der Stromlinien der elektrischen Teilchen bedingt.

9. In dem Gebiet, in welchem sowohl positiv wie negativ elektrische Luft vorhanden ist, ist die Luft scheinbar leitend.

10. Das Verhältnis der Entladungsgeschwindigkeiten gleicher und gleichhoch, aber ungleichnamig geladener Conductoren lässt einen Schluss ziehen auf das Mengenverhältnis positiv und negativ elektrischer Teilchen an der betreffenden Stelle.

11. Die von den beiden Spitzen ausgehenden Winde vereinigen sich auch bei gleicher Höhe der Spannung auf beiden Elektroden nur teilweise; ein grosser Teil geht unverändert zu den Wänden des Zimmers. Die elektrischen Teilchen

folgen also nicht den Kraftlinien, welche vor Beginn der Entladung vorhanden sind, sondern den Kraftlinien des von ihnen selbst geschaffenen elektrischen Feldes, welches von ersterem sehr verschieden ist.

12. Bei ungleicher Elektricitätszufuhr zu den beiden Elektroden umhüllt die in reicherer Menge auftretende elektrisirte Luft auch die entgegengesetzte Elektrode.

13. Zwei Sonden, die sich nur in positivem oder nur in negativem elektrischen Wind befinden, geben bei der Verbindung nur so lange einen Strom, bis die am Orte des niedrigeren Potentiales befindliche Sonde das Potential der anderen angenommen hat; dagegen geben zwei Sonden, von welchen sich die eine im positiven, die andere im negativen Wind befindet, einen dauernden Strom.

14. Wechselströme erzeugen keinen elektrischen Wind und machen auch die Luft nicht (scheinbar) leitend.

Karlsruhe, den 10. September 1901.

(Eingegangen 11. September 1901.)

## 2. *Ueber die Unipolarrotation;* *von G. R. Olshausen.*

(Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation.)

### Einleitung.

Bald nach Oersted's[1]) grosser Entdeckung der Ablenkung der Magnetnadel durch einen elektrischen Strom stellten Biot und Savart[2]) ihren nach ihnen genannten Satz über die Wirkung eines unendlich langen geradlinigen Stromes auf eine Magnetnadel auf. Wenige Tage hernach zeigte Laplace, dass die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol dem Quadrate des Abstandes von dem Stromelemente umgekehrt proportional sei, und durch weitere Versuche zeigte Biot[3]), dass sie auch proportional dem Sinus des Winkels ist, den die Stromrichtung mit der Verbindungslinie der beiden Elemente macht. Ungefähr zur selben Zeit stellte Ampere[4]) seine bekannte Formel auf und folgerte daraus die Identität der Wirkungen eines Elementarmagneten und eines Solenoids und leitete hierdurch das Coulomb'sche und das Biot-Savart'sche Gesetz aus seiner Formel her.

Im Jahre 1848 hat F. E. Neumann[5]) bewiesen, dass das von ihm aufgestellte Potentialgesetz für den Fall linearer Stromleiter von unveränderlichen, starren Formen gerade dieselben ponderomotorischen Kräfte ergebe, wie das von Ampère. Helmholtz[6]) hat diesen Beweis auf beliebig geformte

1) H. Ch. Oersted, Collection de mémoires relatifs à la physique, publiés par la société française de physique 2. p. 1.

2) J. B. Biot u. Savart, l. c. p. 80 u. 126.

3) J. B. Biot, l. c. p. 117 u. 126.

4) A. M. Ampère, l. c. p. 128; Théorie des phénomènes électrodynamiques, p. 200.

5) F. E. Neumann, Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme (der Akademie vorgetragen am 9. August 1847).

6) H. v. Helmholtz, Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik 78. p. 273.

und nach drei Dimensionen ausgedehnte Leiter erweitert, die sich auf ganz beliebige Weise deformiren können.

Unter der Voraussetzung, dass das Potentialgesetz und das Ampère'sche auf geschlossene Ströme angewendet werden, geben beide genau die gleichen Werte der resultirenden Kräfte, welche jeden einzelnen Punkt des bewegten Leiters angreifen.

Maxwell[1]) hat das Neumann'sche Gesetz hergeleitet aus dem Ausdruck für das Potential einer Magnetschale in einem Magnetfelde und aus dem von Ampère ausgesprochenen Satz, dass die magnetische Wirkung eines kleinen, ebenen Stromkreises in Entfernungen, welche gross im Vergleich zu den Dimensionen des Stromkreises sind, dieselbe ist, wie die eines Magneten, dessen Axe normal zur Stromebene ist und dessen magnetisches Moment gleich dem Producte der Stromoberfläche und der Stromstärke ist.

Da nun alle diese verschiedenen Ausdrücke für die Wirkung elektrischer Ströme auf Magnete und von Strömen auf Ströme auf das Ampère'sche Gesetz zurückgeführt werden können, so müssen auch die Anwendungen dieser Gesetze auf die Berechnung der Wirkung eines beliebigen Apparates zu denselben Resultaten führen.

Faraday[2]) construirte zuerst Apparate, durch welche man die Rotation eines Magnetpoles um einen Strom und umgekehrt die Rotation eines Stromes um einen Magnetpol, wie sich dies aus dem Biot-Savart'schen Gesetz schliessen lässt, veranschaulicht wurde. Ampère[3]) gelang es, die Drehung eines Magneten um dessen eigene Axe durch einen Strom zu erzwingen. Dies war das erste Beispiel der sogenannten Unipolarrotation.

Zur Zeit als Helmholtz sein Potentialgesetz aufstellte, wurde die Frage erörtert, ob sich solche Rotationsapparate vollständig durch dasselbe erklären lassen. Helmholtz selbst zeigte in jedem Fall, wo man dachte, dass das Potentialgesetz nicht gelte, dass sich alle Erscheinungen durch das Ampère'sche, das Neumann'sche, oder sein Gesetz erklären liessen,

1) J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, third edition 2. p. 151.

2) M. Faraday, Collect. de mém. 2. p. 158.

3) A. M. Ampère, Collect. de mém. 2. p. 201.

wenn man nur diese Gesetze auf alle durchströmten Leiter anwendete und nicht einige ausser Betracht liess.

In der letzten Zeit ist eine Discussion solcher Rotationsapparate wieder dadurch in Anregung gebracht worden, dass Hr. Lecher[1]) behauptete, die Erklärungen dieser Apparate, wie sie gewöhnlich in den Lehrbüchern gegeben werden, seien falsch.

In dem Folgenden sollen nun die drei Apparate, die in der neueren Discussion genannt werden, nämlich die von Lecher, König und Pohl, nach vier verschiedenen Methoden berechnet werden. Es wird sich, wie auch schon Raveau[2]) bemerkt hat, durch diese Rechnung ergeben, dass je nach dem Gesetz, welches angewandt wird, wir einmal einen Teil des Stromes als wirksam ansehen können und das andere Mal nicht, oder auch dass wir nur sagen können, der Strom wirkt als Ganzes, dass aber die Resultate, wenn die Rechnung auf den ganzen Strom ausgedehnt wird, vollständig miteinander übereinstimmen. Daher ist eine Entscheidung der von Hrn. Lecher aufgeworfenen Frage, ob ein einzelner Magnetpol und ein Stromelement nach dem Biot-Savart'schen Gesetz aufeinander wirken, beziehungsweise, welche Stromteile die wirksamen sind, absolut unmöglich, solange man sich auf geschlossene constante Ströme beschränkt. Weder experimentelle noch theoretische Untersuchungen können hier irgend etwas Neues geben.

Ehe wir zur Berechnung der genannten Apparate übergehen, soll noch einiges über das Biot-Savart'sche Gesetz vorausgeschickt werden.

### Das Biot-Savart'sche Gesetz.

§ 1. Die Form des Gesetzes, die wir benutzen wollen, ist nicht diejenige, welche in den Annales de Chimie et Physique **15**. p. 222 u. 223 publicirt worden ist, sondern die allgemeinere Form, wie sie in der zweiten Auflage von Biot's Précis élémentaire de Physique **2**. p. 123 ausgedrückt worden ist, nämlich folgende:

1) E. Lecher, Wied. Ann. **69**. p. 781. 1899.

2) C. Raveau, Compt. rend. **130**. p. 32. 1900; L'éclairage électrique **22**. p. 164. 1900; Journal de physique **9**. p. 158. 1900.

Die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung und proportional dem Sinus des Winkels, den die Stromrichtung mit der Verbindungslinie der beiden Elemente macht.

Wir wollen nun ferner annehmen: Wenn ein Stromelement auf einen Magnetpol mit einer bestimmten Kraft wirkt, welche den Pol selbst angreift, so wirkt zur gleichen Zeit auf das Stromelement eine ihr antiparallele und gleich grosse Kraft, die im Stromelement selbst angreift. Wir werden sehen, dass wir durch diese Annahme auf keine Widersprüche stossen werden, weder mit der Erfahrung, noch mit der Berechnung der Apparate nach anderen Gesetzen.

Für die Anwendung werden wir das Biot-Savart'sche Gesetz nun auf folgende Weise zum Ausdruck bringen:

Die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche ein Stromelement $d\lambda$ im Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$ von dem positiven magnetischen Einheitspole im Punkte $x$, $y$, $z$ erleidet, sind, wenn $i$ die Stromintensität ist,

$$dL = -\frac{i\,d\lambda}{c}\left(\cos(\lambda z)\frac{\eta - y}{r^3} - \cos(\lambda y)\frac{\zeta - z}{r^3}\right)$$
$$= -\frac{I}{r^3}\left[(\eta - y)\,d\zeta - (\zeta - z)\,d\eta\right],$$
$$dM = -\frac{i\,d\lambda}{c}\left(\cos(\lambda x)\frac{\zeta - z}{r^3} - \cos(\lambda z)\frac{\zeta - z}{r^3}\right)$$
$$= -\frac{I}{r^3}\left[(\zeta - z)\,d\xi - (\xi - x)\,d\zeta\right].$$
$$dN = -\frac{i\,d\lambda}{c}\left(\cos(\lambda y)\frac{\xi - \zeta}{r^3} - \cos(\lambda x)\frac{\eta - y}{r^3}\right)$$
$$= -\frac{I}{r^3}\left[(\xi - x)\,d\eta - (\eta - y)\,d\xi\right],$$

wo $d\lambda\cos(\lambda x) = d\xi$ und $i/c = I$ gesetzt worden ist. $I$ ist die Stromstärke, gemessen im Maxwell'schen magnetischen System, und $r$ die Entfernung zwischen Stromelement und Pol.

Nach dem was wir oben gesagt haben, sind die Componenten der Kraft, welche auf den Pol wirken, $-dL$, $-dM$ und $-dN$.

Ampère[1]) hat schon gezeigt, dass unter Zugrundelegung des Biot-Savart'schen Gesetzes das Drehungsmoment eines

1) A. M. Ampère, Ann. d. Chim. et Phys. **37**. p. 119. 1822.

Stromes um einen Magnetpol nur von den Endpunkten des Stromes abhängt. Wir wollen nun beweisen, dass unter der Annahme, dass der Strom und der Pol starr miteinander verbunden sind, das Drehungsmoment des starren Systems um irgend eine Axe nur von den Endpunkten des Stromes abhängig ist.

Es sei $dM_z$ das Drehungsmoment eines aus Stromelement und Pol bestehenden starren Systems um eine beliebige Axe, die wir als $Z$-Axe nehmen wollen; dann ist

$$dM_z = \xi\, dM - \eta\, dL - (x\, dM - y\, dL)$$

$$= -\frac{I}{r^3}\{(\zeta - z)[(\xi - x)\, d\xi + (\eta - y)\, d\eta] - [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\, d\zeta\}.$$

Es ist aber

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

$$r\, dr = (\xi - x)\, d\xi + (\eta - y)\, d\eta + (\zeta - z)\, d\zeta;$$

setzen wir dies in den Ausdruck für $dM_z$ ein, so bekommen wir

$$dM_z = -\frac{I}{r^3}\{(\zeta - z)[r\, dr - (\zeta - z)\, d\zeta] - [r^2 - (\zeta - z)^2]\, d\zeta\}$$

$$= -\frac{I}{r^2}\{(\zeta - z)\, dr - r\, d\zeta\} = I\, d\left[\frac{\zeta - z}{r}\right] = I\, d\cos\gamma,$$

wo $\gamma$ der Winkel zwischen $r$ und einer durch das Stromelement parallel zur $Z$-Axe gehenden Geraden ist. Das Drehungsmoment des ganzen Systems ist daher

$$M_z = I\int_B^A d\cos\gamma = I(\cos\gamma_a - \cos\gamma_b).\ ^1)$$

Ist der Strom geschlossen, so ist $M_z = 0$, da dann

$$\cos\gamma_a = \cos\gamma_b$$

ist.

Wir erkennen aus diesem Satze, dass man die im Unendlichen liegenden Teile eines geschlossenen, linearen Stromes nicht vernachlässigen darf in Bezug auf die Wirkungen, die

1) Derselbe Satz ist, wie ich nachträglich sehe, auch von Hrn. Hagenbach bewiesen und in einem Programm zur Rectoratsfeier der Universität Basel niedergelegt worden. Der elektromagnetische Rotationsversuch und die Unipolarinduction p. 16. Fr. Reinhardt, Universitätsbuchdruckerei, Basel 1900.

sie erleiden (falls man sie als beweglich annimmt). Aus dem Ausdrucke für $dM_z$ sieht man aber, dass man sie in Bezug auf die Wirkungen, welche von ihnen ausgehen, vernachlässigen darf.

Es soll nun das Drehungsmoment um dieselbe Axe berechnet werden, welches vom Strome auf den Pol allein ausgeübt wird.[1]) Es sei nun $dM_z'$ das Drehungsmoment, welches von der Wirkung eines Stromelementes auf einen Einheitspol herrührt; dann ist

$$dM_z' = -(x\,dM - y\,dL).$$

Setzen wir die Werte von $dM$ und $dL$ ein, so bekommen wir

$$dM_z' = \frac{I}{r^3}\{(\zeta - z)[x\,d\xi + y\,d\eta] - [x(\xi - x) + y(\eta - y)]\,d\zeta\}.$$

Liegt das Stromelement im Unendlichen, so wird $r$ unendlich gross; $dM_z'$ wird von der zweiten, und daher $M_z'$ von der ersten Ordnung unendlich klein. Die Stromelemente, die im Unendlichen liegen, üben auf den Pol kein Drehungsmoment aus.

Liegt das Stromelement in der Drehungsaxe, so ist

$$\xi = 0 \text{ und } \eta = 0,$$

und wir bekommen dann für das Drehungsmoment, auf ähnliche Weise wie oben, da

$$r\,dr = -x\,d\xi - y\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta$$

wird,

$$dM_z' = -\frac{I}{r^3}\{(\zeta - z)\,dr - r\,d\zeta\} = I\,d\cos\gamma.$$

Wir erhalten also, wenn das Stromelement in der Axe liegt, denselben Ausdruck für das Drehungsmoment des Poles allein, wie für das Drehungsmoment des ganzen Systems, wenn das Stromelement und der Pol starr verbunden sind.

### Der Lecher'sche Apparat.[2])

§ 2. Der Magnet $NS$ ist fest verbunden mit dem Drahte $cc'$, der in seiner weiteren Verlängerung das Gegengewicht $g$ trägt. Der Strom geht durch $a\,a'$ über das Quecksilbernäpfchen $b$,

1) A Treatise on Electricity and Magnetism by E. Mascart and J. Joubert. Translated by E. Atkinson, 1. p. 446. 1883.

2) E. Lecher, Ann. d. Phys. 69. p. 783. 1899.

dann durch die Magnethälfte über $S$ in die kleine Quecksilberrinne $w$. Das ganze System hängt an einem Coconfaden.

§ 3. Wir denken uns den Apparat so construirt, dass die Enden des geradlinigen Stromteiles sich im Unendlichen befinden. Dann können wir sagen, der ganze Strom von $-\infty$ bis $+\infty$ ist mit jedem Element der beiden Magnetschichten starr verbunden, denn es ist schon gezeigt worden, dass für die Teile des Stromes, die in der Axe sich befinden und die nicht mit dem Magneten starr verbunden sind, der Ausdruck für das Drehungsmoment der einzelnen Magnetpole derselbe ist, als ob das der Fall wäre. Das Drehungsmoment der positiven Schicht ist also

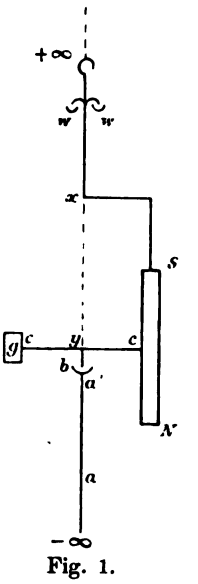


Fig. 1.

$$M_z = \int m\, I\, d\sigma \int_{-1}^{1} d\cos\gamma = 2\, m\, I\, \pi\, R^2,$$

und das der negativen Schicht gleich

$$-2\, m\, I\, \pi\, R^2.$$

Das ganze Drehungsmoment des beweglichen Teiles des Stromes und des Stromes, welcher sich in der Axe befindet, ist also gleich Null. Die Teile des Stromes, welche im Unendlichen liegen und fest sind, haben keinen Einfluss auf das Drehungsmoment des beweglichen Teiles, wie wir schon bewiesen haben.

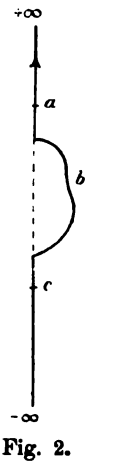


Fig. 2.

Wir haben nun noch die Wirkungen der verschiedenen Stromteile aufeinander zu berücksichtigen und zu diesem Zweck untersuchen wir folgenden Fall. Denken wir uns einen geradlinigen, von $-\infty$ bis $+\infty$ sich erstreckenden Leiter, von welchem ein Teil durch einen zweiten, beliebig geformten Leiter ersetzt ist. Das Stück $a\,b\,c$ in der Fig. 2 ist um den geradlinigen Leiter als Axe drehbar. Wir denken uns ferner den Leiter im Unendlichen durch einen unendlich grossen Halbkreis geschlossen und das Ganze von einem Strom der Stärke $I$ durchflossen. Es fragt sich: Wie gross ist das Drehungsmoment, welches auf den beweglichen Teil des Leiters ausgeübt wird?

Um das Drehungsmoment zu berechnen, wenden wir das Ampère'sche Gesetz an. Wir bezeichnen die Coordinaten eines beweglichen Stromelementes $dl$ mit $x$, $y$, $z$ und die eines festen Stromelementes $d\lambda$ durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Wenn nun $d^2L$ und $d^2M$ die Componenten der Kraft sind, die auf ein Element $dl$ wirken, und die von der Wirkung des Elementes $d\lambda$ auf $dl$ herrührt, so ist das Drehungsmoment dieser Kraft um die Gerade $ac$ als $Z$-Axe genommen

$$d^2M_z = x\,d^2M - y\,d^2L.$$

Nun folgt aus dem Ampère'schen Gesetz, da beide Stromelemente von derselben Stärke sind:

$$d^2L = I^2\,dl.\,d\lambda\left\{2\cos e + 3\frac{\partial r}{\partial l}\cdot\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right\}\frac{\xi - x}{r^3},$$

$$d^2M = I^2\,dl.\,d\lambda\left\{2\cos e + 3\frac{\partial r}{\partial l}\cdot\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right\}\frac{\eta - y}{r^3};$$

es wird also

$$d^2M_z = I^2\,dl.\,d\lambda\left[2\cos.e + 3\frac{\partial r}{\partial l}\cdot\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right]\left[\frac{x(\eta - y)}{r^3} - \frac{y(\xi - x)}{r^3}\right].$$

Liegt $d\lambda$ im Unendlichen, so wird $d^2M_z = 0$, da $r = \infty$ ist. Liegt $d\lambda$ in der Drehungsaxe, der $Z$-Axe, so verschwindet der Ausdruck in der letzten Klammer, da $\eta = \xi = 0$ ist, und es wird daher $d^2M_z$ auch in diesem Fall gleich Null. Wenn nun $dl$ und $d\lambda$ beide in dem beweglichen Teil liegen, welchen wir als starr betrachten wollen, so wirken nur innere Kräfte auf denselben, und die haben auf sein Gleichgewicht keinen Einfluss. Das ganze Drehungsmoment, welches auf den beweglichen Teil des Stromes wirkt, ist also gleich Null.

Um dies nun auf den Lecher'schen Apparat anzuwenden, haben wir uns nur den Strom $I$ in Stromfäden zerlegt zu denken und auf diese die obigen Schlüsse anzuwenden.

Es ist also bewiesen worden, dass das ganze Drehungsmoment, welches auf den beweglichen Teil des Lecher'schen Apparates wirkt, gleich Null ist.

§ 4. Wir wollen nun den Lecher'schen Apparat von einem anderen Gesichtspunkt betrachten, nämlich dem, dass die ponderomotorische Arbeit, welche auf einen geschlossenen Strom $I$ wirkt, wenn derselbe seine relative Lage zu anderen

Strömen und Magneten ändert, die Ströme selber aber ihre Formen nicht ändern, durch folgenden Ausdruck

$$dW = I_1 \{dV_1 + I_2\, dL_{12} + I_3\, dL_{13} + \ldots\}$$

gegeben wird. $V_1$ ist das elektromagnetische Potential des Stromes $I_1$, wenn er die Stärke $I_1 = 1$ besitzt, und $L_{12}$, $L_{13}\ldots$ sind die Coefficienten der Potentiale des Stromes $I_1$, in Bezug auf je einen der übrigen Ströme.

Um die Untersuchung des Apparates zu vereinfachen, denken wir uns in der freien Strecke $xy$ (Fig. 1), der Drehungsaxe zwei gleich starke, aber entgegengesetzte Ströme von der Stärke des Gesamtstromes im Apparat eingeschaltet, sodass wir nun zwei geschlossene Ströme haben, von denen der geradlinige, sich im Unendlichen schliessende, der feste, und der andere der bewegliche Strom genannt werden soll. Weiter wollen wir annehmen, dass wir es mit einem magnetischen Faden zu thun haben, der gleichmässig magnetisirt ist. Das Potential des festen Stromes auf die beiden Pole des Fadens, welche die magnetischen Massen $m$ bez. $-m$ besitzen, ist

$$I_1 V_1 = m I_1 (\omega_1 - \omega_2).$$

$\omega_1$ und $\omega_2$ sind die beiden räumlichen Winkel, unter denen der feste Strom von den beiden Polen aus gesehen wird. Der Winkel $\omega_1$ wird nun aber gemessen durch das Doppelte des Winkels $\beta$ (Fig. 3) zwischen einer durch den Pol $P$ und die Axe $O$ gelegten Ebene $OP$ und einer durch den Pol zur Stromebene $O\infty$ parallel gelegten Ebene $P\infty$. Es ist ferner

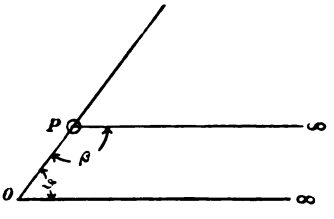


Fig. 3.

$$\beta = 180 - \vartheta,$$

wo $\vartheta$ der Winkel zwischen der Ebene $O\infty$ des festen Stromes und der Ebene $OP$ durch die Axe und den Pol ist. Alle Pole also, die sich in einer Ebene durch die Axe befinden, haben dasselbe Potential. $\omega_1$ und $\omega_2$ sind also immer einander gleich, wenn sich der bewegliche Strom mit dem Magneten um die Axe dreht, und daraus folgt, dass in unserem Ausdruck für $dW$

$$I_1\, dV_1 = m I_1\, d(w_1 - w_2) = 0$$

wird. Dies gilt für jeden elementaren Magnetfaden.

Zwischen dem beweglichen Strom und dem Magneten wirken nur innere Kräfte, denn wir betrachten dieses System als starr.

Wir haben nun den Teil von $dW$ zu untersuchen, der von der gegenseitigen Wirkung der beiden Ströme aufeinander herrührt. Wir wissen, dass $L_{12}$ durch einen Ausdruck der Form

$$L_{12} = \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds_1 \, ds_2$$

gegeben ist, wo $\varepsilon$ der Winkel zwischen den Richtungen der Stromelemente $ds_1$ und $ds_2$, und $r$ die Entfernung zwischen ihnen ist. Die Integrationen sind einmal um $s_1$ und ein ander Mal um $s_2$ gedacht. Drehen wir nun den beweglichen Strom, so ändern sich nur die Winkel zwischen den Stromelementen von diesem und dem im Unendlichen liegenden Elemente des festen Stromes. Aber für diese Paare von Elementen ist $r = \infty$, und es haben daher diese Elemente des Doppelintegrales den Wert Null. Also bringt die Drehung $d\vartheta$ keine Aenderung des Integrales hervor, und es ist daher

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0.$$

Es ist also auch

$$dW = 0.$$

Da $(\partial W / \partial \vartheta) \, d\vartheta$ die Arbeit ist, die während einer Drehung $d\vartheta$ geleistet wird, so ist $\partial W / \partial \vartheta$ das Drehungsmoment der Kräfte, welche die Drehung $d\vartheta$ begünstigen. Da aber $dW = 0$ ist, so ist auch

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = 0.$$

§ 5. Wir hätten die Veränderung des elektromagnetischen Potentiales auch noch in folgender Weise berechnen können. Das elektromagnetische Potential ist durch die Gleichung

$$V = I_1 \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = I_1 V_1$$

gegeben. $\varphi$ ist das Potential des von dem Magneten herrührenden Feldes, $d\sigma$ ein Flächenelement einer einfach zu-

sammenhängenden Fläche, welche durch den Strom $I_1$ begrenzt wird, und $n$ ist die Normale zu dieser Fläche. Das Integral

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

drückt die Anzahl der Kraftlinien des Feldes aus, welche vom Strome eingeschlossen werden und von ihm aus gesehen von rechts nach links verlaufen.

Das Potential einer gleichmässig magnetisirten Curve hängt nur von den Polen ab und wird durch die Gleichung

$$\varphi = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

gegeben, wo $r_1$ und $r_2$ die Entfernungen der beiden Pole von dem im Raume betrachteten Punkte sind und $m$ die Masse des Magnetismus in jedem Pol ist. Ein Punkt in der Ebene des festen Stromes soll die Coordinaten $\varrho$, $z$ haben, wo $\varrho$ von der Axe aus gemessen werden soll und $z$ von einer beliebigen horizontalen Ebene $xy$. Die Coordinaten der beiden Pole sind $\varrho_1$, $z_1$ und $\varrho_1$, $z_2$. Der Winkel zwischen der Ebene des festen Stromes und der Ebene $xz$ durch die Pole und die Drehungsaxe sei $\vartheta$. (Vgl. Fig. 4.)

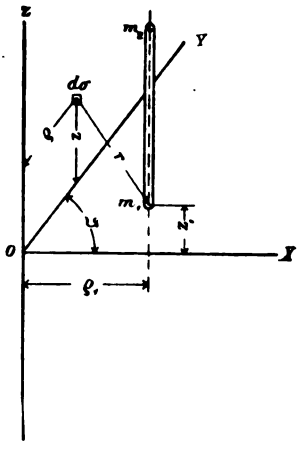



Fig. 4.

Es ist dann:

$$r_1^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho\,\varrho_1 \cos\vartheta + (z - z_1)^2.$$

Setzen wir

$$y_1 = z - z_1, \quad y_2 = z - z_2, \quad a^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho\,\varrho_1 \cos\vartheta,$$

und

$$dn = \varrho\, d\vartheta,$$

dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{m}{\varrho}\left(\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \vartheta}\right)$$

$$= m\,\varrho_1 \sin\vartheta \left(\frac{1}{(a^2 + y_1^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + y_2^2)^{3/2}}\right).$$

Da $d\sigma = d\varrho\, dx$ und $dx = dy_1 = dy_2$ ist, so wird

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = -\varrho_1 m \sin\vartheta \left[ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d\varrho\, dy_1}{(a^2 + y_1^2)^{3/2}} - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d\varrho\, dy_2}{(a^2 + y_2^2)^{3/2}} \right].$$

Da die beiden Doppelintegrale sich auf $2/a^2$ reduciren, ist

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Daraus sehen wir, dass $I_1 V_1 = 0$ und daher auch

$$I_1\, d V_1 = 0$$

ist. Das Resultat ist also dasselbe wie vorher.

Da der Satz für eine ganz beliebige, gleichmässig magnetisirte Curve bewiesen worden ist, deren Endpunkte auf einer Geraden, die parallel zur Dehnungsaxe ist, liegen, so muss er auch für einen Magneten von beliebiger Form gelten, wenn nur die Paare von Elementarpolen, in welche wir uns den Magneten zerlegt denken können, immer auf einer Geraden parallel zur Drehungsaxe liegen.

§ 6. Durch Anwendung des Helmholtz'schen Potentialgesetzes[1]) lässt es sich noch einfacher zeigen, dass das Drehungsmoment, welches auf den Apparat wirkt, immer gleich Null ist.

Wir bezeichnen mit $u$, $v$, $w$ die Componenten der elektrischen Strömung in der Richtung der positiven, rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ im Innern eines continuirlich durchströmten Körpers, und die Werte des elektrodynamischen Potentiales (im elektromagnetischen Maasse), welches die sämtlichen Stromcomponenten $u$, $v$, $w$ im Volumenelement $dx$, $dy$, $dz$ hervorbringen, der Reihe nach mit:

$$-Uu\, dx\, dy\, dz, \quad -Vv\, dx\, dy\, dz, \quad -Ww\, dx\, dy\, dz.$$

Setzen wir weiter

$$\Psi = \iiint \left( u \frac{dr}{d\xi} + v \frac{dr}{d\eta} + w \frac{dr}{d\zeta} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

so können wir unter der Voraussetzung, dass $\Psi$ einen endlichen Wert hat, die Werte von $U$, $V$, $W$ in folgender Form geben:

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen 1. p. 564.

$$U = \frac{1-k}{2}\frac{d\Psi}{dx} + \iiint \frac{u}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$V = \frac{1-k}{2}\frac{d\Psi}{dy} + \iiint \frac{v}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$W = \frac{1-k}{2}\frac{d\Psi}{dz} + \iiint \frac{w}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Unter dem Integralzeichen sind $u$, $v$, $w$ als Functionen von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ zu nehmen, und die Integration ist über alle Teile des Raumes auszudehnen, in dem elektrische Ströme vorkommen.

Da wir es nur mit geschlossenen linearen Strömen zu thun haben, und da für diese $\Psi$ immer gleich Null ist, so bekommen wir

$$U = I\int \frac{\cos\alpha}{r}\,d\lambda, \quad V = I\int \frac{\cos\beta}{r}\,d\lambda, \quad W = I\int \frac{\cos\gamma}{r}\,d\lambda.$$

Um nun dieses Gesetz auf unseren Fall in Anwendung zu bringen, müssen wir uns erst den Magneten durch ein Solenoid ersetzt denken, dessen einzelne Windungen von einem Strom $I'\,dz$ durchflossen werden, und dessen Radius $r_1$ ebenso gross ist wie der des Magneten. Lassen wir nun den Magneten mit dem beweglichen Teil des Stromes eine Drehung ausführen, so ändern sich die Werte von $U$, $V$, $W$ gar nicht, denn die relative Lage der Solenoide und der Teile des Stromes, die im Endlichen liegen, bleibt unverändert, und diejenigen Stromteile, die im Unendlichen liegen, tragen ja überhaupt nicht zu den Werten von $U$, $V$, $W$ bei, da für sie $r$ immer unendlich gross ist.

Es findet also keine Abnahme des gesamten Potentiales statt, und daher ist die Summe der Arbeit, die von den elektrodynamischen Kräften geleistet worden ist, gleich Null. Also muss auch das Drehungsmoment, welches diese Kräfte ausüben, gleich Null sein.

### Der König'sche Apparat.[1])

§ 7. Der Apparat besteht, wie Fig. 5 andeutet, aus einem vom Strome $I$ gleichmässig durchflossenen hohlen Metallcylinder

1) L. Fleischmann, Zeitschr. f. physik. u. chem. Unterricht 8. p. 361—363. 1895; W. König, Wied. Ann. 60. p. 519. 1897.

kreisförmigen Querschnittes vom Radius $R$ und aus hufeisenförmigen Magneten, deren gleiche Pole alle symmetrisch um die Axe des Cylinders liegen. Wir wollen annehmen, dass alle Nordpole innerhalb des Cylinders und die Südpole ausserhalb desselben liegen. Die Magnete und der Hohlcylinder sind jedes für sich um die Axe desselben drehbar. Der Strom tritt in das untere Ende des Cylinders mittels eines Quecksilbercontactes, der sich auf die ganze Peripherie des Cylinders erstreckt, ein und am oberen Ende in derselben Weise wieder aus. Wir wollen annehmen, dass die Magnete gleichmässig magnetisirt sind, also dass wir sie uns durch zwei Flächenbelegungen von den Dichten $m$ und $-m$ ersetzt denken können.

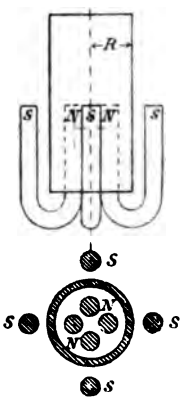


Fig. 5.

§ 8. Wir wollen unter der Annahme des Biot-Savart'schen Satzes beweisen, dass das Drehungsmoment, welches von der Wirkung einer Schicht ausserhalb des unendlich lang gedachten Cylinders auf denselben ausgeübt wird, gleich Null und von einer innerhalb desselben liegenden Schicht gleich $\pm 2\,Q\,I$ ist, je nachdem, ob wir eine positive oder negative Schicht haben. $I$ ist der ganze Strom im Cylinder, und $Q$ der gesamte Magnetismus der Schicht. Ferner soll bewiesen werden, dass das Drehungsmoment, welches von der Wirkung des Cylinders auf eine Schicht innerhalb desselben ausgeübt wird, gleich Null und auf eine Schicht ausserhalb desselben gleich $\pm 2\,Q\,I$ ist.

Wir denken uns den Strom $I$ in dem Cylinder in Stromfäden geteilt, die parallel der Axe desselben laufen und eine Stromstärke

$$dI = \frac{I}{2\pi} d\vartheta$$

besitzen, wo $d\vartheta$ der Winkel ist, unter welchem die Breite des Stromfadens von der Axe aus gesehen wird. Ferner wollen wir die Ebene der Schicht als die $xy$-Ebene eines rechtshändigen, rechtwinkligen Coordinatensystems annehmen, sodass die $Z$-Axe parallel der Axe des Cylinders liegt. Sind nun $z, y, x = 0$ die Coordinaten eines Punktes der Schicht, $\xi, \eta, \zeta$

diejenigen eines Stromfadenelementes $d\lambda$, in welchem die Strömungscomponenten

$$\frac{u}{c} = 0, \quad \frac{v}{c} = 0, \quad \frac{w}{c} = dI$$

sind; dann werden die Componenten der magnetischen Intensität, die durch das Stromelement $d\lambda$ in einem Punkt $x, y, z = 0$ der Schicht hervorgerufen werden, unter Benutzung der Formeln auf p. 684 ausgedrückt durch

$$dL = d\lambda\, dI \frac{\eta - y}{r^3}, \quad dM = -d\lambda\, dI \frac{\xi - x}{r^3}, \quad dN = 0.$$

Die Componenten der Kraft, welche auf ein Flächenelement $d\sigma$, das mit der Magnetismusmenge $\pm m\, d\sigma$ belegt ist, wirken, sind daher

$$dX = \pm m \frac{I}{2\pi} \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta\, d\sigma\, d\vartheta,$$

$$dY = \mp m \frac{I}{2\pi} \frac{\xi - x}{r^3} d\zeta\, d\sigma\, d\vartheta,$$

wo $d\lambda = d\zeta$ gesetzt worden ist. Die Componenten der Kraft, die auf das Stromelement $d\zeta = d\lambda$ wirkt, sind daher $-dX$ und $-dY$.

Das Drehungsmoment dieser Kraft um die $Z$-Axe ist

$$d^3 M_z = -\xi\, dY + \eta\, dX$$
$$= \pm \frac{m I}{2\pi} \left[ \xi \frac{\xi - x}{r^3} + \eta \frac{\eta - y}{r^3} \right] d\zeta\, d\sigma\, d\vartheta.$$

Setzen wir nun

$$\xi = R \sin\vartheta, \qquad \eta = R \cos\vartheta,$$
$$x = r' \cos\alpha, \qquad y = r' \sin\alpha$$

und integriren in Bezug auf $\zeta$ und $\vartheta$, so erhalten wir

$$dM_z = \pm \frac{m I R\, d\sigma}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R - r' \sin(\alpha + \vartheta)}{R^2 + r'^2 - 2 r' R \sin(\alpha + \vartheta)} d\vartheta.$$

Die Function unter dem Integralzeichen verhält sich stetig, während $\vartheta$ alle Werte von 0 bis $2\pi$ durchläuft, wenn $R \gtrless r'$ ist. Nehmen wir also an, dass $R \gtrless r'$ ist, so bekommen wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{R - r' \sin(\alpha + \vartheta)}{R^2 + r'^2 - 2 r' R \sin(\alpha + \vartheta)} d\vartheta = 2k\pi,$$

wo $k$ eine noch zu bestimmende Constante ist, die nun bestimmt werden soll.

Die linke Seite der letzten Gleichung können wir als Function von $r'$ betrachten, die rechte Seite ist aber von $r'$ unabhängig, da $r'$ bei der Integration herausfällt. Kennen wir also einen Wert des Integrals für einen bestimmten Wert von $r'$, so wird dadurch $k$ für alle Werte von $r'$, für die das Integral sich stetig verhält, bestimmt. Wird $r' = 0$ gesetzt, so wird die linke Seite der Gleichung gleich $2\pi/R$, und daher

$$k = \frac{1}{R}.$$

Dieser Wert von $k$ gilt nur, solange $r' < R$ bleibt. In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, indem wir $r' = \infty$ setzen, dass für $r' > R$

$$k = 0$$

ist.

Daraus folgt also, dass, wenn das Flächenelement $d\sigma$ innerhalb des Cylinders liegt, die Wirkung des ersteren auf den Cylinder ein Drehungsmoment von der Grösse

$$dM_z = \pm 2 m I d\sigma$$

ausübt, und wenn das Flächenelement ausserhalb des Cylinders liegt, so ist

$$dM_z = 0.$$

Das Drehungsmoment, welches die ganze positive Schicht innerhalb des Cylinders auf denselben ausübt, ist also

$$M_z = 2 m I \int d\sigma = 2 Q I,$$

und dasjenige, welches die äussere negative Schicht auf denselben ausübt, ist gleich Null.

Es sollen nun die Drehungsmomente bestimmt werden, die auf die beiden Schichten selbst wirken.

Verbinden wir die positive Schicht und den Cylinder starr miteinander, dann lässt sich leicht zeigen, dass das Drehungsmoment des starren Systems gleich

$$2 Q I$$

ist. Nun ist aber das Drehungsmoment, das auf den Cylinder allein wirkt und von der Wirkung dieser Schicht herrührt,

gleich $2QI$, also muss dasjenige der inneren Schicht gleich Null sein.

In ähnlicher Weise lässt sich beweisen, dass das Drehungsmoment, welches auf die äussere Schicht wirkt, gleich

$$-2QI$$

ist.

Es wird also in dem von König beschriebenen Apparat der Cylinder in einer Richtung von einem Drehungsmoment $2QI$ angegriffen, und die Magnete in der entgegengesetzten Richtung von einem Drehungsmoment $-2QI$. Wird alles starr miteinander verbunden, so ist der Apparat im Gleichgewicht. Alle diese Sätze gelten nur für einen unendlich langen Cylinder.

§ 9. Es sollen nun die Drehungsmomente, die auf die Magnetpole und den Cylinder wirken, unter Benutzung der Formel

$$dW = I_1\{dV_1 + I_2\,dL_{12} + I_3\,dL_{13}\ldots\}$$

berechnet werden. Zu diesem Zwecke denken wir uns wieder den Gesamtstrom $I_1$, welcher durch den Cylinder fliesst, in unendlich viele Stromfäden geteilt, von denen ein jeder in einer durch die Drehungsaxe gehenden Ebene liegt und sich im Unendlichen in derselben schliesst. Dreht sich der Cylinder nun, so wollen wir annehmen, dass sich die Stromfäden, ohne ihre Formen oder ihre relativen Lagen zu einander zu verändern, mit demselben um seine Axe drehen. Es werden daher die Ausdrücke $I_2\,dL_{12}$ etc. gleich Null sein, und wir werden daher in dem Ausdrucke für $dW$ nur $I_1\,dV_1$ zu berechnen haben.

In der Fig. 6 denken wir uns den Apparat auf eine horizontale Ebene projicirt. Der Kreis bedeutet den von dem Gesamtstrom durchflossenen Cylinder vom Radius $R$, $ab$ den Stromfaden, $+m$ und $-m$ zwei Pole, die in einer horizontalen Geraden liegen und $\vartheta$ den Winkel zwischen der Ebene des Stromfadens und der Ebene, die durch die Axe und die Pole

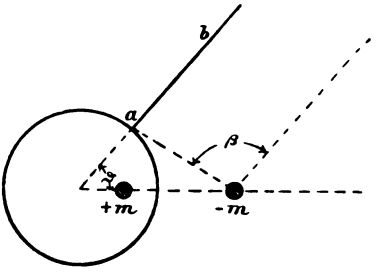



Fig. 6.

geht. Ferner soll $\beta$ den Winkel zwischen einer durch einen der Pole zur Stromfadenebene parallel liegenden Ebene und einer durch denselben Pol und den Teil des auf der Cylinderoberfläche verlaufenden Stromfadens gelegten Ebene bedeuten.

Der Ausdruck für das Potential eines Stromfadens auf den Pol mit der Masse $\pm m$ ist.

$$d V = V_1 d I_1 = \pm m d I_1 \omega.$$

$\omega$ ist hier wieder der räumliche Winkel, unter welchem der Stromfaden von dem Pole aus gesehen wird. In unserem Fall ist nun

$$d I_1 = \frac{d \vartheta}{2 \pi} I_1 \quad \text{und} \quad \omega = 2 \beta.$$

Das Potential $V = V_1 I_1$, welches von allen Stromfäden herrührt, ist daher

$$V = \pm \frac{m I_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta \, d \vartheta.$$

Lassen wir nun den Cylinder und daher auch jeden Stromfaden eine Drehung $d \vartheta$ machen, so bekommen wir für die Aenderung des Potentiales $V$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} d \vartheta = d W = \pm \frac{m I_1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \int_0^{2\pi} \beta \, d \vartheta \right] d \vartheta.$$

Für das Drehungsmoment, welches auf den Cylinder wirkt, und die Drehung begünstigt, haben wir daher

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \pm \frac{m I_1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_0^{2\pi} \beta \, d \vartheta = \pm \frac{m I_1}{\pi} \beta \Big]_{\vartheta = 0}^{\vartheta = 2\pi}$$

Wir wollen nun die Grenzwerte von $\beta$ bestimmen für den Fall, dass der Pol ausserhalb des Cylinders liegt. Es lässt sich leicht aus der Fig. 6 ersehen, dass für $\vartheta = 0$ $\beta = \pi$ ist. Für $\vartheta > \pi$ müssen wir $\omega$ und daher auch $\beta$ mit einem Minuszeichen versehen, da der Strom von dem Pole aus gesehen jetzt von der negativen Seite betrachtet wird. Es wird also für $\vartheta = 2 \pi$ $\beta = - \pi$ und, wenn wir diese Grenzwerte von $\beta$ einsetzen

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \mp 2 m I_1.$$

Die Wirkung eines Poles $-m$ ausserhalb des Cylinders würde also ein Drehungsmoment auf denselben von der Grösse

$$2\,m\,I_1$$

ausüben.

Liegt der Pol innerhalb des Cylinders, so ist $\beta$ für $\vartheta = 0$, sowie für $\vartheta = 2\,\pi$ gleich Null, und daher auch

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = 0.$$

Die Wirkung eines Poles innerhalb des Cylinders auf denselben ist also gleich Null.

Dieselbe Aenderung des elektromagnetischen Potentiales, die wir erhalten haben durch eine Drehung $d\vartheta$ des Cylinders, hätten wir auch erhalten können durch eine Drehung $-d\vartheta$ des Magnetpoles. Daraus folgt, dass das Drehungsmoment, welches auf den Pol $\pm m$ wirkt, gleich

$$-\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \pm 2\,m\,I_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = 0$$

ist. Das Drehungsmoment, welches auf einen Pol $-m$ ausserhalb des Cylinders wirkt, ist also

$$-2\,m\,I_1,$$

und dasjenige, welches auf einen Pol innerhalb desselben wirkt, gleich Null.

Da der Satz für zwei beliebige Pole bewiesen worden ist, so wird er auch für jeden Complex von Polen gelten, nur wird dann für $m$ die Gesamtmenge des Magnetismus gesetzt werden müssen.

§ 10. Wir gehen nun über zur Anwendung der Formel

$$V = V_1\,I_1 = I_1 \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\sigma,$$

die wir schon auf p. 690 benutzt haben. Sind nun $\vartheta$, $\varrho$, $z$ die Cylindercoordinaten eines Flächenelementes $d\sigma$ der Fläche eines Stromfadens, 0, $\varrho_1$, 0 und 0, $\varrho_2$, 0 diejenigen der beiden Pole, so erhalten wir in ähnlicher Weise wie auf p. 692

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -\sin\vartheta\, m \left[ \varrho_1 \int_R^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho\, dz}{(a_1^2 + z^2)^{3/2}} - \varrho_2 \int_R^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho\, dz}{(a_2^2 + z^2)^{3/2}} \right],$$

wo

$$a_1^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\vartheta$$

und

$$a_2^2 = \varrho^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho\varrho_2 \cos\vartheta$$

ist. Integriren wir in Bezug auf $z$ und $\varrho$, so bekommen wir, wenn man zugleich wieder für $a_1$ und $a_2$ ihre Werte einsetzt,

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -2m \left[ \operatorname{arctg} \frac{R - \varrho_2 \cos\vartheta}{\varrho_2 \sin\vartheta} + \operatorname{arctg} \frac{\varrho_1 \cos\vartheta - R}{\varrho_1 \sin\vartheta} \right]$$
$$= -2m f(\vartheta).$$

Es wird also das elektromagnetische Potential, welches von dem Stromelement $I_1 d\vartheta / 2\pi$ stammt, ausgedrückt durch die Gleichung

$$dV = -\frac{I_1 m}{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Und das elektromagnetische Potential, welches von dem ganzen Strom $I_1$ herrührt, ist

$$V = -\frac{I_1 m}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Das Drehungsmoment, welches den Cylinder angreift, ist also

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 2m I_1.$$

Verbinden wir nun Magnet und Cylinder starr miteinander, so wird sich bei einer Drehung des Systems die relative Lage des Magneten zum Strom nicht ändern, also wird auch keine ponderomotorische Arbeit gethan sein, die durch diese Drehung erzeugt wurde. Das Drehungsmoment des Systems um die Axe ist also auch Null, und da das Drehungsmoment des Cylinders um die Axe $2m I_1$ ist, so muss dasjenige des Magneten gleich $-2m I_1$ sein.

Wir können die Formel

$$V = I_1 \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

auch noch in anderer Weise anwenden. Wir denken uns alle Stromfäden durch eine Drehung des Cylinders in den Gleitstellen verzerrt, sodass sie eine Form annehmen, wie in der Fig. 7 angedeutet ist. Denken wir uns nun in die Strecke $ab$ zwei gleich starke und entgegengesetzte Ströme $dI_1$ eingeführt, so hat sich das Potential des Stromfadens $dI_1$ durch das Product aus der Anzahl der Kraftlinien, die durch das Rechteck $abcd$ gehen, und der Stromstärke $dI_1$ des Stromfadens verändert. Summiren wir über alle Stromfäden, so bekommen wir für die gesamte Aenderung des Potentiales

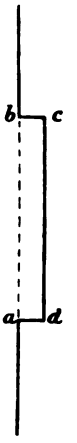


Fig. 7.

$$dV = dI_1 \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wo das Integral über die ganze Fläche des Cylinders zu nehmen ist. Es ist aber

$$dI_1 = \frac{I_1}{2\pi} d\vartheta,$$

und daher bekommen wir für das Drehungsmoment, das auf den Cylinder wirkt,

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{I_1}{2\pi} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Da nun der Cylinder unendlich lang im Verhältnis zu seinem Durchmesser ist, so wird die Anzahl der Kraftlinien, die durch die Enden desselben gehen, gleich Null sein. Die Anzahl der Kraftlinien, die überhaupt von einem Pole $+m$ ausgehen, ist aber $4\pi m$ und daraus folgt, dass

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 4\pi m$$

ist. Es wird also

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 2 m I_1.$$

§ 11. Um das Helmholtz'sche Potentialgesetz auf den König'schen Apparat anzuwenden, können wir uns jeden der hufeisenförmigen Magnete erst durch zwei unendlich lange Magnetstäbe ersetzt denken, deren obere Enden mit den Pol-

flächen des Magnetes zusammenfallen, deren untere Enden aber unendlich weit von dem unteren Gleitcontacte entfernt sind. Dass dies möglich ist, lässt sich leicht durch folgende Ueberlegung einsehen. Die Wirkung der gleichmässig magnetisirten Stäbe hängt nur von ihren Endflächen ab. Zwei dieser Flächen sind aber unendlich weit von allen Strömen entfernt, also sind ihre Wirkungen gleich Null. Es bleiben also nur die Wirkungen der Flächen, die mit denen des Hufeisenmagnetes zusammenfallen, übrig. Nun können wir uns die Magnetstäbe ersetzt denken durch unendlich lange Solenoide, deren Radius derselbe ist, wie der des Magnetes. Lassen wir nun den Cylinder eine Drehung ausführen und nehmen an, dass die Stromfäden sich verzerren, wie wir oben in Fig. 7 angedeutet haben, so wird das ganze System von Stromfäden nur dadurch geändert, dass zwei neue kreisförmige Stromfäden vom Radius $R$ und der Stärke $dI_1$ in den Gleitcontacten hinzukommen. Einer dieser kreisförmigen Stromfäden $dI_1$ ist aber unendlich weit von den Solenoiden entfernt, und sein Potential in Bezug auf dieselben ist daher Null. Es bleibt also noch das Potential $dP$ des unteren der beiden Kreisströme $dI_1$ zu ermitteln. Wir wollen annehmen, dass unsere beiden Magnetstäbe in Magnetfäden geteilt sind, und dass diese durch Solenoide von sehr kleinem Radius $r_1$ ersetzt sind.

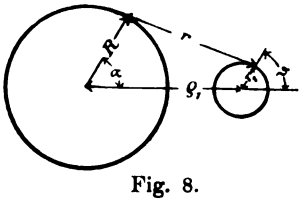


Fig. 8.

In der Fig. 8 sei nun $\varrho_1$ die Entfernung der Axe eines Solenoids von derjenigen des Cylinders. Ferner sind $R$, $\alpha$, $z = o$ die Cylindercoordinaten eines Punktes auf dem Gleitkreise, und $r_1$, $\vartheta$, $z$, diejenigen eines Punktes auf dem Solenoid. Dieses sind zwei verschiedene Systeme von Cylindercoordinaten. $R$ und $r_1$ sind dabei die Radien des Cylinders bez. des Solenoids. Die Anfangsebenen sind in beiden Fällen dieselben. Es lässt sich dann $r$ durch folgende Gleichung ausdrücken

$$r^2 = [R \sin\alpha - r_1 \sin\vartheta]^2 + [R\cos\alpha - (\varrho_1 + r_1\cos\vartheta)]^2 + z^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{r} = \{R^2 + r_1^2 + \varrho_1^2 + z^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha - r_1[2R(\sin\alpha\sin\vartheta + \cos\alpha\cos\vartheta) - 2\varrho_1\cos\vartheta]\}^{-1/2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$a = R^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho_1 R\cos\alpha + z^2,$$

und entwickeln $1/r$ nach Potenzen von $r_1$, so erhalten wir unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung als der ersten:

$$\frac{1}{r} = a^{-1/2} + a^{-3/2}\left[R(\sin\alpha\sin\vartheta + \cos\alpha\cos\vartheta) - \varrho_1\cos\vartheta\right] r_1.$$

Für ein Element $dl = R\,d\alpha$ des Kreisstromes ist

$$u = -\sin\alpha\, dI_1, \quad v = \cos\alpha\, dI_1, \quad w = 0,$$

oder

$$u = -\frac{\sin\alpha\, I_1}{2\pi}\,d\alpha, \quad v = \frac{\cos\alpha\, I_1}{2\pi}\,d\alpha,$$

und für die Elemente $d\lambda = r_1\,d\vartheta$ des Solenoids ist

$$\cos\alpha = -\sin\vartheta, \quad \cos\beta = \cos\vartheta.$$

Da die Stromstärke des Solenoids $I_1'\,dz$ ist, wird

$$U = I\int\frac{\cos\alpha}{r}\,d\lambda = -\,r_1\,I_1'\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,dz}{r},$$

$$V = I\int\frac{\cos\beta}{r}\,d\lambda = \quad r_1\,I_1'\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\vartheta\,d\vartheta\,dz}{r},$$

$$W = I\int\frac{\cos\gamma}{r}\,d\lambda = 0.$$

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck

$$-\,u\,dl\,U - v\,dl\,V$$

für das elektrodynamische Potential eines Elementes $dl$ des Kreisstromes ein und integriren dann in Bezug auf $dl$, so erhalten wir für das Potential des ganzen Kreisstromes

$$dP = -\,\frac{\sin\alpha\, r_1\, R\, I_1\, I_1'\,d\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,dz\,d\alpha}{r}$$

$$-\,\frac{\cos\alpha\, r_1\, R\, I_1\, I_1'\,d\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\,d\vartheta\,dz\,d\alpha}{r}.$$

Dies ist nun aber auch die ganze Aenderung des Potentiales des Apparates, die durch eine Drehung des Cylinders hervorgebracht worden ist, unter der Annahme, dass wir es nur mit einem Solenoid zu thun haben.

Das Drehungsmoment, welches diese Drehung fördert, ist also:

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\frac{\sin\alpha\, r_1\, R\, I_1\, I_1'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, dz\, d\alpha}{r}$$

$$-\frac{\cos\alpha\, r_1\, R\, I_1\, I_1'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\, d\vartheta\, dz\, d\alpha}{r}.$$

Setzen wir für $1/r$ seinen Wert ein und integriren in Bezug auf $\vartheta$ und $z$, so erhalten wir

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = r_1^2\, R\, I_1\, I_1'\int_0^{2\pi}\frac{R-\varrho_1\cos\alpha}{R^2+\varrho_1^2-2\,\varrho_1\, R\cos\alpha}\, d\alpha.$$

Das Integral ist von derselben Form, wie dasjenige, welches wir auf p. 695 schon behandelt haben. Es hat entweder den Wert $2\pi/R$ oder Null, je nachdem ob $\varrho_1$ kleiner oder grösser als $R$ ist. Es ist daher das Drehungsmoment, das auf den Cylinder wirkt und von einem Magnetfaden herrührt, gleich

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 2\pi r_1^2 I_1 I_1',$$

und dasjenige, welches von allen Magnetfäden herrührt, ist

$$\sum\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 2 I_1 \sum \pi r_1^2 I_1' = 2 I_1 \sum m$$

$$= 2 I_1 Q,$$

wo $Q$ der Gesamtmagnetismus ist.

Dieselbe Verzerrung der Stromfäden hätten wir auch erhalten, wenn wir den Cylinder festgehalten und die Quecksilberrinne des Gleitcontactes rückwärts gedreht hätten. Das Drehungsmoment, welches auf die Rinne wirkt, ist also

$$-2 I_1 Q.$$

Helmholtz[1]) denkt sich die ganze Bewegung dadurch gt, dass gleiche und entgegengesetzte Kräfte den Cylinder die Rinne im Gleitkreise angreifen. Die Kräfte wirken ntial zum Geleitkreise.
Die Drehung des Magneten wäre also nur dadurch zu ren, dass die Rinne denselben mit sich zieht.

### Der Pohl'sche Apparat.

§ 12. Es soll nun das Drehungsmoment, welches auf eweglichen Teil des in der Fig. 9 angedeuteten Apparates , berechnet werden. An einem horizontalen, um eine ale Axe beweglichen Arme $oc$ ist ein dünner Magnet in aler Lage befestigt. Das nicht in der Axe liegende Ende

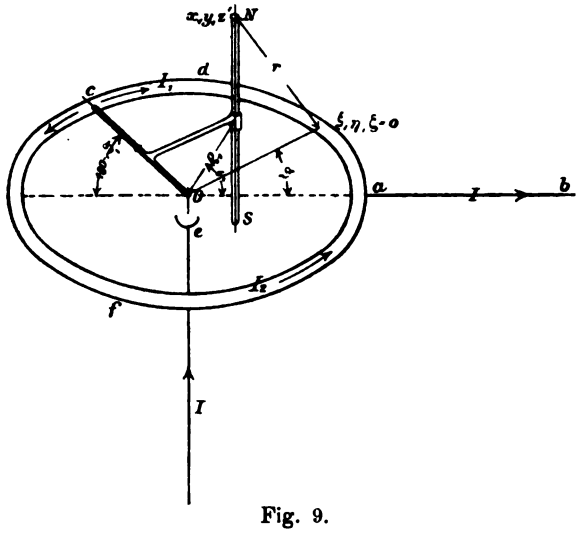



Fig. 9.

eweglichen Armes $oc$ taucht in eine kreisförmige Queck- rinne $fad$ ein. Die Rinne ist mit einem ins Unendliche ufenden, horizontalen Drahte $ab$ verbunden. Wir nehmen er Strom fliesst längs der Drehungsaxe vom Unendlichen em Quecksilbernäpfchen $e$, dann längs des horizontalen s $oc$ nach der Rinne $fad$, in welcher sich der Strom und dann sich wieder in dem horizontalen, ins Unendliche

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen 1. p. 741.

verlaufenden Drahte $a\,b$ vereinigt. Der Strom wird im Unendlichen auf beliebige Weise geschlossen.

§ 13. Wir legen ein Coordinatensystem zu Grunde, welches den Nullpunkt im Schnittpunkt der Ebene der Rinne $f\,a\,d$ und der Drehungsaxe hat, die $Z$-Axe in der Drehungsaxe, und die $X$-Axe in der Horizontalen $a\,b$ hat. $z$ sei positiv nach oben, und das Coordinatensystem sei ein rechtshändiges.

Wir wollen erst das Drehungsmoment berechnen, welches auf den Pol $m'$ wirkt, dessen Coordinaten $x, y, z'$ sind, wenn die Kräfte des Drehungsmomentes von dem Teil des Stromes der Rinne herrühren, der zwischen der $X$-Axe und dem Arme $o\,c$ liegt, in der Richtung der wachsenden Winkel genommen. In der Rinne werden wir zwei Ströme von der Stärke $I_1$ und $I_2$ haben, sodass

$$I_1 + I_2 = I,$$

dem Gesamtstrom, ist. Es sei ferner $\vartheta_1$ der Winkel, welchen der bewegliche Arm mit der $X$-Axe macht, $R$ der Radius der Rinne $f\,a\,d$, $\varrho_1$ die Entfernung des Magneten vom Anfangspunkt der Coordinaten, $\alpha_1$ der Winkel zwischen $\varrho_1$ und der $X$-Axe, und $\vartheta$ der Winkel, welcher einen zu irgend einem Element $d\lambda$ der Rinne gezogenen Radius mit der $X$-Axe macht.

Die Componenten der Kraft, die auf einen im Punkte $x, y, z$ befindlichen Einheitspol wirken und die durch einen im Punkte $\xi, \eta, \zeta$ liegendes Stromelement $d\lambda$ hervorgerufen werden, sind nach p. 684 $-dL$, $-dM$ und $-dN$.

Es ist aber in unserem Falle $\zeta = 0$, $\cos(\lambda x) = \sin\vartheta$. $\cos(\lambda y) = -\cos\vartheta$ und $\cos(\lambda z) = 0$ und daher wird

$$-dL = -z'\frac{i}{c}\frac{d\lambda}{r^3}\cos\vartheta,$$

$$-dM = -z'\frac{i}{c}\frac{d\lambda}{r^3}\sin\vartheta,$$

$$-dN = 0.$$

Die Entfernung $r$ zwischen einem Stromelement $d\lambda$, dessen Polarcoordinaten $R, \vartheta$ sind, und einem Magnetpol $m'$, dessen Coordinaten $\varrho_1, \alpha_1, z'$ sind. kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$r^3 = [(R^2 + \varrho_1^2 + z'^2) - 2\varrho_1 R\cos(\vartheta - \alpha_1)]^{3/2} = [a_1 + b_1\cos(\vartheta - \alpha_1)]^{1/2}.$$

Die Componenten der Kraft, welche auf den Pol $m'$ wirken, sind also, wenn wir $i/c = I_1$ und $d\lambda = R\,d\vartheta$ setzen,

$$dX' = -\frac{z'\,m'\,I_1\,R\cos\vartheta\,d\vartheta}{[a_1 + b_1\cos(\vartheta - \alpha_1)]^{3/2}},$$

$$dY' = -\frac{z'\,m'\,I_1\,R\sin\vartheta\,d\vartheta}{[a_1 + b_1\cos(\vartheta - \alpha_1)]^{3/2}}.$$

Das Drehungsmoment um die $Z$-Axe, welches von diesem Stromelement und Magnetpol herrührt, ist also

$$x\,dY' - y\,dX' = -\frac{m'\,I_1\,z'\,R\,x\sin\vartheta\,d\vartheta}{[a_1 + b_1\cos(\alpha_1 - \vartheta)]^{3/2}} + \frac{m'\,I\,z'\,R\,y\cos\vartheta\,d\vartheta}{[a_1 + b_1\cos(\alpha_1 - \vartheta)]^{3/2}}.$$

Das ganze Drehungsmoment, welches von dem Pole $m'$ und dem genannten Teil des Stromes herrührt, ist, wenn wir für $x$ und $y$ ihre Werte in Polarcoordinaten

$$x = \varrho_1\cos\alpha_1, \qquad y = \varrho_1\sin\alpha_1$$

setzen,

$$M'_{r,z} = m'\,I_1\,\varrho_1\,z'\,R\int_0^{\vartheta_1}\frac{\sin(\alpha_1 - \vartheta)\,d\vartheta}{[a_1 + b_1\cos(\alpha_1 - \vartheta)]^{3/2}}.$$

Setzen wir nun nach der Integration einmal $z' = z_1$, $m' = m$ und das andere Mal $z' = -z_2$ und $m' = -m$ und beobachten ferner, dass für den Teil der Rinne von $\vartheta_1$ bis $2\pi$ der Strom ein entgegengesetztes Vorzeichen hat, so erhalten wir für das gesamte Drehungsmoment, welches von der Wirkung der ganzen Rinne $f\,a\,d$ herrührt,

$$M_{r,z} = m\,I\,z_1\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2+z_1^2-2\varrho_1 R\cos(\alpha_1-\vartheta_1)}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2+z_1^2-2\varrho R\cos\alpha_1}}\right]$$
$$+ m\,I\,z_2\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2+z_2-2\varrho_1 R\cos(\alpha_1-\vartheta_1)}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2+z_2^2-2\varrho_1 R\cos\alpha_1}}\right].$$

Wir gehen nun dazu über, das Drehungsmoment zu berechnen, welches von der Wirkung des Stromes $I$ in der geraden Strecke $a\,b$ auf den Magneten herrührt. Es ist für $a\,b$

$$-dL = 0, \quad -dM = -\frac{z\,I\,d\lambda}{r^3}, \quad -dN = 0.$$

Die Componenten der Kraft, die auf den Pol $m'$ wirkt, sind

$$dX' = 0, \quad dY' = -m'\,I\,z'\frac{d\xi}{r^3}, \quad dZ' = 0,$$

wo $d\lambda = d\xi$ gesetzt worden ist.

Ferner ist

$$r^3 = [(x-\xi)^2 + y^2 + z'^2]^{3/2} = [(\varrho_1^2 + z'^2) - 2\varrho_1 \cos\alpha_1 \xi + \xi^2]^{3/2}$$
$$= (a_2 + b_2 \xi + \xi^2)^{3/2}.$$

Das Drehungsmoment, welches auf den Pol $m'$ wirkt und von $a\,b$ herrührt, ist also

$$M'_{a\,b,z} = -\,m'\,I\,z'\,\varrho_1 \cos\alpha_1 \int_R^\infty \frac{d\xi}{(a_2 + b_2\xi - \xi^2)^{3/2}}.$$

Setzen wir wieder nach der Integration einmal $z' = z_1$, $m' = m$ und das andere Mal $z' = -z_2$ und $m' = -m$, so erhalten wir durch Addition für das ganze Drehungsmoment, welches auf beide Pole wirkt und von $a\,b$ herstammt,

$$M_{a\,b,z} = -\frac{m\,I\,z_1\,\varrho_1 \cos\alpha_1}{\varrho_1^2 + z_1^2 - \varrho_1^2 \cos\alpha_1^2}\left[1 + \frac{\varrho_1\cos\alpha_1 - R}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1}}\right]$$
$$- \frac{m\,I\,z_2\,\varrho_1\cos\alpha_1}{\varrho_1^2 + z_2^2 - \varrho_1^2\cos^2\alpha_1}\left[1 + \frac{\varrho_1\cos\alpha_1 - R}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1}}\right].$$

Wir haben nun die Wirkung des verticalen, in der $Z$-Axe liegenden Drahtes auf den Magneten zu bestimmen. Es wurde schon auf p. 686 bewiesen, dass, wenn der Strom in der Drehungsaxe liegt, das Drehungsmoment, welches auf einen Pol $m'$ wirkt, gleich

$$M'_{z,z} = m'\,I \int_a^b d\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)$$

ist. $a$ und $b$ sind die Werte von $(\zeta - z)/r$ für den Anfang bez. das Ende des Stromes. In unserem Fall wird das ganze Drehungsmoment, das auf den Magneten wirkt, gleich

$$M_{z,z} = m\,I\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)\Big|_{-1}^{-\frac{z_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2}}} - m\,I\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)\Big|_{-1}^{+\frac{z_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2}}}$$
$$= -\frac{m\,I\,z_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2}} - \frac{m\,I\,z_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2}}.$$

Es muss endlich noch der Ausdruck für das Drehungsmoment, welches durch die Wechselwirkung des beweglichen Armes $o\,c$ und des Magneten bedingt wird, berechnet werden.

Magnet und Strom sind in diesem Falle starr miteinander verbunden, und wir können daher die Formel

$$M_{o\,c,\,z} = m' I \int_a^b d\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)$$

anwenden. Wir bekommen dann für das ganze Drehungsmoment, das auf den beweglichen Teil wirkt und von der genannten Wechselwirkung herrührt,

$$M_{o\,c,\,z} = m I \int_{a_1}^{b_1} d\left(\frac{\zeta - z}{r}\right) - m I \int_{a_2}^{b_2} d\left(\frac{\zeta - z}{r}\right),$$

wo

$$a_1 = \frac{-z_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2}}, \qquad b_1 = \frac{-z_1}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) + z_1^2}},$$

$$a_2 = \frac{z_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2}} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{z_2}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) + z_2^2}}$$

ist, oder

$$M_{o\,c,\,z} = -mIz_1\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2}}\right]$$
$$- mIz_2\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2}}\right].$$

Fassen wir nun alle diese Drehungsmomente um die $Z$-Axe zusammen, um das gesamte Drehungsmoment zu bilden, das auf das bewegliche System wirkt, so erhalten wir

$$M_z = \frac{-mIz_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1}}$$
$$\left[\frac{R + \sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1}}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1} + R - \varrho_1\cos\alpha_1}\right]$$
$$- \frac{mIz_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1}}$$
$$\left[\frac{R + \sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1}}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 + R^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1} + R - \varrho_1\cos\alpha_1}\right].$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Lage des Armes, hängt vielmehr nur von der Lage des Magneten ab. Lassen wir nun $R$ unendlich gross werden, so wird $M_z = 0$. Für $z_1 = z_2 = \infty$ wird

$$M_z = -2ml,$$

also wie der Fall des unendlich langen Drahtes und eines Poles. Lassen wir $z_1 = z_2$ und $\varrho_1 = 0$ werden, so heisst das, die beiden Pole liegen in der Drehungsaxe und symmetrisch zur Ebene der Rinne, und dann wird

$$M_z = -\frac{2\,m\,I\,x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}}.$$

Zu diesem Drehungsmoment $M_z$, welches nur die Wechselwirkung zwischen Magneten und Strom berücksichtigt, kommt noch die Wirkung der einzelnen Stromteile aufeinander und die Wirkung der senkrechten Componente des Erdmagnetismus. Auf diese beiden Wirkungen soll später zurückgekommen werden, jetzt aber soll $M_z$ noch auf dreierlei Weise berechnet werden und zwar dadurch: dass wir ad 1 das Drehungsmoment $M_z$ aus den Veränderungen der Potentiale der geschlossenen Ströme, in welchen wir uns unseren Strom geteilt denken können, auf die beiden Pole berechnen; zweitens aus den Veränderungen der Potentiale der Ströme im Magnetfelde, in dem sie sich befinden, und drittens durch das Helmholtz'sche Potentialgesetz.

§ 14. Wir denken uns den Strom $I$ in unserem Apparat durch folgende Ströme ersetzt:

Es soll ein Strom $I - I_2 = I_1$ um die ganze Rinne, ein Strom $I$ um $o\,c\,d\,a\,o$ in entgegengesetzter Richtung von $I_1$ und ein Strom $I$ von $-\infty$ bis 0 längs der $Z$-Axe und von 0 bis $+\infty$ längs der $X$-Axe fliessen. Der letzte Strom soll von nun an der rechtwinklige Strom genannt werden. Diese drei Ströme sind den Strömen im Apparate äquivalent.

Das Potential eines Stromes $I$ auf einen Pol $m'$ ist gleich

$$V = m'\,I\,\omega.$$

$\omega$ ist der räumliche Winkel, unter welchem der Strom vom Pole aus gesehen wird.

Es soll $\omega$ für die verschiedenen Ströme und den Pol $m'$, dessen Coordinaten $x$, $y$, $z = z'$ sind, berechnet werden. Dies geschieht sehr leicht durch einen Ausdruck, den Maxwell für $\omega$ gegeben hat, nämlich durch

$$\omega = \int\int \Pi\,ds\,d\sigma + \omega_0.$$

Hierin ist $\omega_0$ der räumliche Winkel für einen Anfangspunkt $A$. Lassen wir den Pol $m'$ längs einer Curve $s$ zu einem

anderen Punkt $B$ übergehen, so geht $\omega_0$ in $\omega$ über. $d\sigma$ ist ein Element des Stromes und $\Pi$ wird durch folgende Determinante definirt.

$$\Pi = -\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} x-\xi, & y-\eta, & z-\zeta \\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d\xi}{d\sigma}, & \frac{d\eta}{d\sigma}, & \frac{d\zeta}{d\sigma} \end{vmatrix}.$$

Hierin sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten eines Punktes im Strome, und $r$ die Entfernung dieses Punktes vom Pole.

Wir gehen nun über zur Berechnung der Wirkung des rechtwinkligen Stromes. Die Kraft, die in der Richtung $ds$ wirkt, ist

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = -m' I \int \Pi d\sigma.$$

Durchläuft der Strom eine Curve, die nicht stetig ist, so müssen wir das Integral $\int \Pi d\sigma$ immer nur soweit berechnen, wie die Curve stetig verläuft, und die einzelnen Werte für die verschiedenen Teile des Stromes addiren. In unserem Fall bekommen wir für die $X$-Axe

$$\Pi_x = \frac{z' \cos\alpha}{[\varrho_1^2 + \xi^2 - 2\varrho_1 \xi \cos\alpha_1 + z'^2]^{3/2}},$$

und für die $Z$-Axe

$$\Pi_z = -\frac{\varrho_1}{[\varrho_1^2 + (z'-\zeta)^2]^{3/2}}.$$

Das Drehungsmoment, welches auf den Pol $m'$ wirkt, ist

$$-\varrho_1 \frac{\partial V_{z'}}{\partial s} = -\frac{\partial V_{z'}}{\partial \alpha_1} = -m' I \varrho_1 \int \Pi d\sigma.$$

Setzen wir nun die obigen Werte von $\Pi$ ein, so bekommen wir

$$-\frac{\partial V_{z'}}{\partial \alpha_1} = -m' I \varrho_1 \left[ z' \cos\alpha_1 \int_0^\infty \frac{d\xi}{[\varrho_1^2 + z'^2 - 2\varrho_1 \xi \cos\alpha_1 + \xi^2]^{3/2}} - \varrho_1 \int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{[\varrho_1^2 + z'^2 - 2z'\zeta + \zeta^2]^{3/2}} \right].$$

Das Drehungsmoment, welches auf beide Pole wirkt, erhalten wir, wenn einmal $z' = z_1$ und $m' = m$ gesetzt wird, und das andere Mal $z' = -z_2$ und $m' = -m$ genommen wird. Wir bekommen also für dies Drehungsmoment

$$-\frac{\partial V_{(z_1, z_2)}}{\partial \alpha_1} = -m\,l\left[\frac{z_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 - \varrho_1 \cos\alpha_1}} + \frac{z_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 - \varrho_1 \cos\alpha_1}}\right] = A.$$

Es soll nun die Wirkung berechnet werden, die von der Veränderung des Potentiales des Stromes $o\,c\,d\,a\,o$ auf den Pol $m'$ herrührt. In diesem Falle soll das $\omega$ zuerst wirklich berechnet werden. In der Formel

$$\omega = \int\int \Pi\, ds\, d\sigma + \omega_0$$

soll $\omega_0 = 0$ sein, und daher muss $ds = dz$ sein. Wir berechnen nun $\Pi$ für die verschiedenen Teile dieses Stromes.

Für den Radius $o\,c$ bekommen wir, wenn man für $x$ und $y$ ihre Werte in Polarcoordinaten setzt,

$$\Pi_{oc} = \frac{\varrho_1 \sin(\vartheta_1 - \alpha_1)}{(\varrho_1^2 + \varrho^2 + z^2 - 2\,\varrho_1\,\varrho\cos(\vartheta_1 - \alpha_1))^{3/2}}.$$

$\varrho$ ist die Entfernung von 0 zu irgend einem Punkte auf $o\,c$. Für $o\,a$ wird

$$\Pi_{oa} = \frac{-\varrho_1 \sin\alpha_1}{[\varrho_1^2 + \varrho + z^2 - 2\,\varrho_1\,\varrho\cos\alpha_1]^{3/2}},$$

und für $a\,c\,d$ wird

$$\Pi_{ac} = \frac{\varrho_1\cos(\vartheta - \alpha_1) - R}{[R^2 + z^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho_1 R\cos(\vartheta - \alpha_1)]^{3/2}}.$$

Der Winkel $\vartheta$ hat dieselbe Bedeutung wie auf p. 706.

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck für $\omega$ ein und bilden das Product $m'\,I\,\omega$, so wird

$$V_{ocda} = -m'\,I\left[\int_0^{z'} dz \int_0^{R} \frac{\varrho_1 \sin(\vartheta_1 - \alpha_1)\, d\varrho}{[\varrho_1^2 + \varrho^2 + z^2 - 2\,\varrho_1\,\varrho\cos(\vartheta_1 - \alpha_1)]^{3/2}} - \int_{\vartheta_1}^{0} R\, d\vartheta \int_0^{z'} \frac{[\varrho_1\cos(\vartheta - \alpha_1) - R]\, dz}{[R^2 + z^2 + \varrho_1^2 - 2\,\varrho_1 R\cos(\vartheta - \alpha_1)]^{3/2}} - \int_0^{z'} dz \int_R^0 \frac{\varrho_1 \sin\alpha_1\, d\varrho}{[\varrho_1^2 + z^2 + \varrho^2 - 2\,\varrho_1\,\varrho\cos\alpha_1]^{3/2}}\right].$$

Wir haben hier angenommen, dass der Pol $m'$ auf der negativen Seite, also über dem Strome, liegt. Die Integration ist in der Richtung des Stromes ausgeführt.

Denken wir uns nun, dass der Magnet und der bewegliche Arm eine Drehung $\partial \alpha_1 = \partial \vartheta$ ausführt und bilden wir dann wieder $V$, so wird das erste Doppelintegral, da $\vartheta_1 - \alpha_1$ eine Constante ist, unverändert wieder in $V$ eingehen, zu dem zweiten wird ein Element an der unteren Grenze $\vartheta = 0$ hinzukommen, und im dritten Integral geht $\alpha_1$ in $\alpha_1 + d\alpha_1$ über. Es wird also das Drehungsmoment, welches von dieser Veränderung des Potentiales herrührt, gleich

$$\frac{\partial V_{ocda}}{\partial \alpha_1} = m' I \left[ R \int_0^{z'} \frac{(\varrho_1 \cos \alpha_1 - R)\, dz}{[R^2 + z^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1 R \cos \alpha_1]^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_0^{z'} \int_R^0 \frac{\varrho_1 \sin \alpha_1 \, dz \, d\varrho}{[\varrho_1^2 + z^2 + \varrho^2 - 2\varrho_1 \varrho \cos \alpha_1]} \right] = B.$$

Führen wir die angedeuteten Operationen aus und setzen dann einmal $z' = z_1$ und $m' = m$, das andere Mal $z' = -z_2$ und $m' = -m$ und addiren dann die beiden so erhaltenen Ausdrücke, so bekommen wir für das ganze Drehungsmoment, welches durch die Wirkung des Stromes $ocdao$ auf den Magneten erzeugt wird,

$$mI\left[\frac{z_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 - \varrho_1 \cos \alpha_1}} + \frac{z_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 - \varrho_1 \cos \alpha}} - \frac{1}{c_1}\frac{(R + c_1) z_1}{c_1 + d} - \frac{1}{c_2}\frac{(R + c_2) z_2}{c_2 + d}\right],$$

wo

$$c_1 = \sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 + R^2 - 2R\varrho_1 \cos \alpha_1},$$

$$c_2 = \sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 + R^2 - 2R\varrho_1 \cos \alpha_1},$$

und

$$d = R - \varrho_1 \cos \alpha_1$$

ist.

Da nun das Potential der beiden Pole in Bezug auf den kreisförmigen Strom durch eine Drehung des Armes $oc$ nicht geändert wird, übt die Wirkung desselben auf die Pole kein Drehungsmoment um die Axe aus. Wir erhalten also das ganze Drehungsmoment, welches auf den beweglichen Arm $oc$

wirkt, wenn wir zu dem letzten Ausdruck den Ausdruck $A$ auf p. 712 addiren. Es wird dann

$$M_z = -mI\left[\frac{1}{c_1}\frac{(R+c_1)z_1}{c_1+d} + \frac{1}{c_2}\cdot\frac{(R+c_2)z_2}{c_2+d}\right].$$

Setzen wir nun für $c_1$, $c_2$ und $d$ ihre Werte ein, so bekommen wir genau die Gleichung für $M_z$, die wir durch den Biot-Savart'schen Satz auf p. 709 gewannen.

§ 15. Wir gehen nun dazu über, dasselbe Drehungsmoment $M_z$ zu berechnen, indem wir die Formel

$$V = I\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

auf p. 690 benutzen, um das Potential des Stromes im magnetischen Felde zu berechnen und um dann aus der Aenderung, welche dieses Potential durch eine Drehung des Armes $oc$ erfährt, das Drehungsmoment zu bestimmen.

Es ist wie in den vorhergehenden Fällen

$$\varphi = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Wir setzen für unseren Fall $\partial n = \xi\, d\alpha_1$, wenn wir es mit dem rechtwinkligen Strom, und $\partial n = dz$, wenn wir es mit dem Strom $ocdao$ zu thun haben. $r_1$ und $r_2$ sind immer die Entfernungen von ihren zugehörigen Polen zu dem Flächenelement $d\sigma$ der Stromfläche, welche wir betrachten, und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten des Flächenelementes.

Es soll erst das Drehungsmoment berechnet werden, das von der Wirkung des rechtwinkligen Stromes herrührt. Es ist für ein Flächenelement $d\sigma$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{m}{\xi}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right],$$

$$r_1 = \sqrt{\varrho_1^2 + \xi^2 - 2\varrho_1 \xi \cos\alpha_1 + (z_1 - \zeta)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\varrho_1^2 + \xi^2 + 2\varrho_1 \xi \cos\alpha_1 + (-z_2 - \zeta)^2}.$$

Setzen wir nun

$$a_1 = \varrho_1^2 + (z_1 - \zeta)^2, \quad a_2 = \varrho_1^2 + (z_2 + \zeta)^2, \quad b = -2\varrho_1 \cos\alpha_1,$$

dann wird

$$V = - m \varrho_1 \sin \alpha_1 I \left[ \int_{-\infty}^{0} d\zeta \int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{(a_1 + b\xi + \xi^2)^{3/2}} - \int_{-\infty}^{0} d\zeta \int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{(a_2 + b\xi + \xi^2)^{3/2}} \right].$$

Es ist jetzt das Drehungsmoment zu finden, welches auf beide Pole wirkt. Lassen wir die Ebene des Stromes sich um einen Winkel $- d\alpha_1$ drehen, so ändert sich $V$ um $(\partial V / \partial \alpha_1) d\alpha_1$ und dies ist die geleistete Arbeit. Das Drehungsmoment ist also

$$- \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = - m I \left[ \frac{\varkappa_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + \varkappa_1^2 - \varrho_1 \cos \alpha_1}} + \frac{\varkappa_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + \varkappa_2^2 - \varrho_1 \cos \alpha_1}} \right].$$

Dieser Ausdruck stimmt genau überein mit dem Ausdruck $A$ für dieses Drehungsmoment auf p. 712.

Da durch eine Drehung des Armes $o\,c$ keine Veränderung in dem Potential, welches von der Wirkung des kreisförmigen Stromes $I - I_2$ herrührt, hervorgebracht wird, so bleibt uns nur noch die Wirkung zwischen dem magnetischen Felde und dem Strome $o\,c\,d\,a\,o$ zu berechnen.

Für den Strom $I$ um $o\,c\,d\,a\,o$ ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} = m \left[ \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \varkappa} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \varkappa} \right]$$

und

$$r_1 = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\vartheta - \alpha_1) + \varkappa_1^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1\varrho \cos(\vartheta - \alpha_1) + \varkappa_2^2}.$$

$\varrho$ ist die Entfernung eines Elementes der Stromfläche $o\,c\,d\,a\,o$ von der Drehungsaxe und $\vartheta$ der Winkel zwischen dem Radiusvector dieses Elementes und der $X$-Axe. Die anderen Bezeichnungen haben dieselben Bedeutungen, wie auf p. 706. Es ist daher

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = m \left[ \frac{\varkappa_1}{r_1^3} + \frac{\varkappa_2}{r_2^3} \right],$$

da für den zweiten Pol $z = -z_2$ ist. Dieses in die Gleichung für $V$ eingesetzt, giebt, da

$$d\sigma = \varrho\, d\vartheta\, d\varrho$$

ist,

$$V = Im \int_0^R \int_0^{\vartheta_1} \left[\frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}\right] \varrho\, d\vartheta\, d\varrho.$$

Denken wir uns nun, dass die Pole mit dem Arm $oc$ nicht starr verbunden sind, und lassen wir dann erst die beiden Pole sich ihre Lage um die Länge $\varrho_1\, d\vartheta$ verändern und dann den Arm eine Drehung $d\vartheta$ ausführen. Anstatt dass die Pole sich um $\varrho_1\, d\vartheta$ bewegen, können wir uns auch denken, dass der ganze Strom sich erst um $-d\vartheta$ dreht und hernach der Arm $oc$ die Drehung $d\vartheta$ ausführt.

Die Arbeit, die durch diese Veränderung der Lagen der Pole und des Armes geleistet worden ist, muss dieselbe sein wie die, welche geleistet worden wäre, wenn die Pole und der Arm sich als starres System bewegten, denn die geleistete Arbeit hängt ja nur von der Differenz der Werte des Potentiales am Anfang und am Ende der unendlich kleinen Bewegung ab. Wir können also die ganze Aenderung in $V$, welche durch die Bewegung des starren Systems hervorgebracht wird, durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\, d\vartheta = -\, Im \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\int_0^R \int_0^{\vartheta_1} \left[\frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}\right] \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \right] d\vartheta$$

$$+\, Im \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left[\int_0^R \int_0^{\vartheta_1} \left[\frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}\right] \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \right] d\vartheta_1.$$

Das erste Doppelintegral soll in Bezug auf beide Grenzwerte von $\vartheta$ variirt werden, das zweite aber nur in Bezug auf $\vartheta = \vartheta_1$, die obere Grenze. Da aber $d\vartheta = d\vartheta_1$ ist, reducirt sich der obige Ausdruck, indem wir $\partial / \partial \vartheta$ unter das Integralzeichen nehmen, auf

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\, d\vartheta = Im\, d\vartheta \int_0^R \left[\frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_1^3}\right]^{\vartheta=0} \varrho\, d\varrho.$$

Das Drehungsmoment, welches von dem Strom $I$ um $o\,c\,d\,a\,o$ ausgeübt wird, ist daher

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = I m \left[ z_1 \int_0^R \frac{\varrho\, d\varrho}{[\varrho_1^2 + z_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\alpha_1 + \varrho^2]^{3/2}} + z_2 \int_0^R \frac{\varrho\, d\varrho}{[\varrho_1^2 + z_2^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\alpha_1 + \varrho^2]^{3/2}} \right],$$

$$= \frac{-m I z_1}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2 - 2R\varrho_1 \cos\alpha_1 + R^2}} \left[ 1 + \frac{\varrho_1 \cos\alpha_1 (\varrho_1 \cos\alpha_1 - R)}{\varrho_1^2 \sin^2\alpha_1 + z_1^2} \right] + \frac{m I z_1 \sqrt{\varrho_1^2 + z_1^2}}{\varrho_1^2 \sin^2\alpha_1 + z_1^2}$$

$$+ \frac{-m I z_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2 - 2R\varrho_1 \cos\alpha_1 + R^2}} \left[ 1 + \frac{\varrho_1 \cos\alpha_1 (\varrho_1 \cos\alpha_1 - R)}{\varrho_1^2 \sin^2\alpha_1 + z_2^2} \right] + \frac{m I z_2 \sqrt{\varrho_1^2 + z_2^2}}{\varrho_1^2 \sin^2\alpha_1 + z_2^2}.$$

Vereinigen wir diesen Ausdruck mit demjenigen für $-\partial V/\partial \alpha_1$ auf p. 715, so erhalten wir wieder den auf p. 709 angegebenen Wert des ganzen Drehungsmomentes $M_z$, das auf den beweglichen Teil des Apparates wirkt.

§ 16. Um nun auch noch das Helmholtz'sche Potentialgesetz auf den Pohl'schen Apparat anzuwenden, denken wir uns den Magneten wieder durch ein Solenoid ersetzt, dessen einzelne Windungen von einem Strom $I' dz$ durchflossen werden, und dessen Radius $r_1$ ebenso gross ist wie der des Magneten. Ferner denken wir uns wieder unseren Apparat wie vorher von drei Strömen durchflossen. Die Potentiale zweier dieser Ströme in Bezug auf das Solenoid verändern sich bei einer Drehung desselben, und die Abnahme des gesamten Potentiales wird gleich der Arbeit sein, welche von den elektrodynamischen Kräften geleistet worden ist. Das Potential des kreisförmigen Stromes wird bei der Drehung des Solenoids gar nicht verändert, dasjenige des Stromes $o\,c\,d\,a\,o$ wird aber durch Hinzufügung eines Stromelementes in $c\,d\,a$ und durch Veränderung der Lage des Solenoids in Bezug auf die Strecke $o\,a$ verändert, das Potential des rechtwinkeligen Stromes wird nur durch die Veränderung der Lage des Solenoids

in Bezug auf die horizontale Strecke von $o$ bis $\infty$ beeinflusst werden. Da die Ströme längs $o\,a$ gleich und entgegengesetzt sind, wird die Gesamtänderung des Potentiales $dV$ nur von der Aenderung des Potentiales des Stromes in $c\,d\,a$ und in der horizontalen Strecke von $R$ bis $\infty$ herrühren. Der Bequemlichkeit der Rechnung wegen denken wir uns, dass das neu hinzugekommene Element $dl = R\,d\alpha_1$ an $c\,d\,a$ im Punkte $a$ hinzugefügt worden ist. Es ist dann für dieses Element

$$u = I, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

und für diejenigen des Solenoids ist

$$d\lambda = r_1\,d\vartheta, \quad \cos\alpha = -\sin\vartheta, \quad \cos\beta = \cos\vartheta, \quad \cos\gamma = 0.$$

Setzen wir diese Werte in die Ausdrücke

$$-Uu\,dl, \qquad -Vv\,dl, \qquad -Ww\,dl$$

ein und bilden dann die Gleichung des Drehungsmomentes, so wird diese

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -RII'\int_0^{2\pi}\int_{-z_2}^{z_1}\frac{r_1\cos\vartheta\,d\vartheta\,dx}{r_{(x=R)}}$$

$$+II'\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\int_0^{2\pi}\int_{-z_2}^{z_1}\int_R^{\infty}\frac{r_1\sin\vartheta\,d\vartheta\,dz\,dx}{r}.$$

Wir können nun $r$ durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$r^2 = [\varrho_1\sin\alpha_1 + r_1\sin\vartheta]^2 + [x - \varrho_1\cos\alpha_1 - r_1\cos\vartheta]^2 + z^2,$$

wie man sich leicht mit Hülfe der Fig. 10 überzeugen kann. $\varrho_1$, $\alpha_1$ sind die Polarcoordinaten der Axe des Solenoids in Bezug auf die Drehungsaxe und $r_1$, $\vartheta$ sind diejenigen eines Punktes des Solenoids in Bezug auf die Axe desselben. Entwickeln wir $1/r$ nach Potenzen von $r_1$ durch den binomischen Satz und vernachlässigen alle höheren Potenzen von $r_1$ als die erste, indem wir annehmen, dass $r_1$ sehr klein ist im Vergleich zu den anderen Grössen, mit denen wir es zu thun haben, so be-

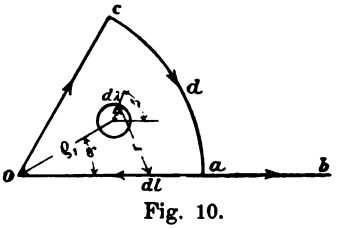


Fig. 10.

kommen wir für das Drehungsmoment, das von der Wirkung aller Ströme auf den Magneten herrührt:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = m\,l \left| R \int_{-z_2}^{z_1} \frac{(\varrho_1 \cos\alpha_1 - R)\,dz}{[R^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1 R\cos\alpha_1 + z^2]^{3/2}} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_{-z_2}^{z_1} \int_{R}^{\infty} \frac{\varrho_1 \sin\alpha_1\,dz\,dx}{[\varrho_1^2 + z^2 + x^2 - 2\varrho_1 x\cos\alpha_1]^{3/2}} \right],$$

wo

$$\pi r_1^2 I' = m$$

gesetzt worden ist.

Dieser Ausdruck stimmt, abgesehen von den Grenzen der Integrale, formell mit dem Ausdrucke $B$ auf p. 713 überein. Reduciren wir nun diesen Ausdruck in einer ähnlichen Weise, wie wir es dort thaten, so bekommen wir wieder den Ausdruck für $M_z$, den wir auf p. 709 erhalten haben.

### Die Wirkung der Erde auf den Pohl'schen Apparat.

§ 17. Teilen wir wieder unseren Strom wie vorher in drei Ströme, so wird nur der Strom *o c d a o* sein Potential in Bezug auf die verticale Componente $Z$ der Erdintensität durch eine Drehung des Armes *o c* verändern. Setzen wir

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = Z \quad \text{und} \quad d\sigma = \frac{1}{2} R^2 d\vartheta,$$

so wird

$$V = I \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{R^2 I Z}{2} \int_0^{\vartheta_1} d\vartheta,$$

da wir $Z$ positiv nach oben nehmen wollen, und unser Strom dann negativ genommen werden muss. Das Drehungsmoment, welches von der Wirkung der $Z$-Componente der Erdkraft herrührt, ist also

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{R^2 I Z}{2}.$$

### Die Wirkung der Stromteile des Pohl'schen Apparates aufeinander.

§ 18. Um die Wirkung der Ströme aufeinander zu berechnen, wollen wir die Endkräfte bestimmen, die auf die End-

flächen der verschiebbaren Uebergangsschicht der Gleitstelle wirken. Die Endkräfte sollen durch das Helmholtz'sche Potentialgesetz bestimmt werden.[1])

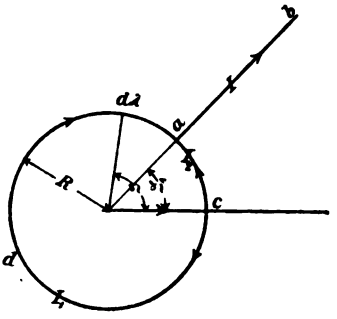


Fig. 11.

Legen wir die $X$-Axe durch den beweglichen Arm $o\,c$ und die $Z$-Axe in die Drehungsaxe, so werden diese Kräfte der Grösse nach durch

$$Y = IV$$

ausgedrückt. Es ist hier

$$V = \int \frac{v\,d\lambda}{r}$$

der Wert von $V$ in der Gleitstelle, und $I$ der Strom, der durch dieselbe fliesst. Das Integral ist über alle Stromelemente $d\lambda$ zu erstrecken. Ist nun $\vartheta$ der Winkel, welchen der Radius durch irgend ein Element $d\lambda$ des Kreises mit der $X$-Axe macht, so ist für den Strom $I_1$ in $c\,d\,a$

$$v = -\,I_1 \cos\vartheta,$$

für den Strom $I_2$ in $c\,a$

$$v = I_2 \cos\vartheta$$

und für den Strom $I$ in der horizontalen Strecke $a\,b$

$$v = I \sin\vartheta_1.$$

Die Entfernung der Gleitstelle von einem Punkte des Kreises wird ausgedrückt durch

$$r = 2\,R \sin\frac{\vartheta}{2},$$

und von einem Punkte von der Strecke $a\,b$ durch

$$r^2 = \varrho^2 + R^2 - 2\,\varrho\,R\cos\vartheta_1.$$

$\varrho$ bedeutet die Entfernung eines Punktes auf $a\,b$ von der Drehungsaxe. Wir bekommen also für $V$, wenn wir für den Kreis

$$d\lambda = R\,d\vartheta$$

und für die Strecke $a\,b$

$$d\lambda = d\varrho$$

setzen,

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. 1. p. 740.

$$V = -I_1 \int_{\vartheta_1}^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} + I_2 \int_{0}^{\vartheta_1} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$+ I\sin\vartheta_1 \int_{R}^{\infty} \frac{d\varrho}{[\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos\vartheta_1]^{\frac{1}{2}}}$$

oder

$$V = -I\left[\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4} + 2\cos\frac{\vartheta}{2}\right]_{\vartheta_1}^{2\pi} + I_2\left[\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4} + 2\cos\frac{\vartheta}{2}\right]_{0}^{2\pi}$$

$$+ I\sin\vartheta_1 \log\left[-2R\cos\vartheta_1 + 2\varrho + 2\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos\vartheta_1}\right]_{R}^{\infty}.$$

$V$ wird also logarithmisch unendlich gross, und daher lässt sich das Drehungsmoment $RIV$, das von der Wirkung der Ströme herrührt und auf den Arm $oc$ wirkt, auch nicht bestimmen. Die Unbestimmtheit kommt daher, dass wir unendlich dünne Drähte angenommen haben, die es in der Natur nicht giebt.

Hätten wir unseren Strom wieder in drei Ströme geteilt und auf diese das Neumann'sche Potentialgesetz angewandt, so wären wir auf dieselben Integrale gestossen.

### Zusammenfassung der Resultate.

§ 19. Die Untersuchung der drei Apparate nach den verschiedenen Methoden, die wir zur Anwendung gebracht haben, lässt folgende Schlüsse ziehen:

1. Das Biot-Savart'sche Gesetz führt uns in der Form, wie wir es ausgesprochen haben, zu keinem Widerspruch, weder mit der Erfahrung, die man an diesen Apparaten gewonnen hat, noch mit den Resultaten der Rechnungen nach den von uns angewandten anderen Methoden.

2. Je nach der Art der Anschauung, unter welcher wir einen Apparat betrachten, trägt ein bestimmter Teil des Stromes zu dem Ausdrucke für das ganze Drehungsmoment, welches auf den beweglichen Teil des Apparates wirkt, bei oder nicht bei; daher können wir nur sagen, die Wirkung rührt von dem ganzen Strom her.

3. Die Gesetze haben nur eine Bedeutung, wenn wir sie auf alle Teile der geschlossenen Ströme im Apparate anwenden.

4. Es ist ganz einerlei, ob in dem Pohl'schen Apparat der Arm $oc$ gerade oder gekrümmt ist, ob der Strom durch den Magneten geht oder nicht.

5. Aus Messungen, die an constanten, geschlossenen Strömen gemacht werden, lässt sich niemals eine Entscheidung treffen, welche Stromteile die wirksamen sind.

### Schlussbemerkungen.

Aus der Form, in welcher wir den Biot-Savart'schen Satz angewendet haben, geht ferner hervor, dass auf ein starres System, bestehend aus Pol und Stromelement, ein Drehungsmoment wirkt. Dieses ist aber nicht, wie Herr H. Lorberg[1]) meint, im Widerspruch mit dem bekannten Satz, dass ein starres System durch Kräfte, welche zwischen seinen Teilen wirken, nicht in Bewegung gesetzt werden kann, denn für geschlossene Ströme und vollständige Magnete bleibt dieser Satz auch nach unserer Art der Darstellung immer richtig. Wir hätten auch annehmen können, dass, wenn wir einen Pol und ein Stromelement starr verbinden, keine Bewegung stattfinden soll, aber es wäre dann notwendig, zu der Kraft, welche der Pol auf das Stromelement ausübt, ein Drehungsmoment hinzuzufügen, das auf den Pol wirkt.[2]) Es mag ja nicht sympathisch sein, anzunehmen, dass die inneren Kräfte eines starren Systems ein Drehungsmoment hervorrufen, aber es scheint doch weniger gegen diese Annahme einzuwenden zu sein, als gegen die, welche Hr. Lorberg macht, dass die Kraft eines geradlinigen Stromteiles oder eines Stromelementes auf einen Pol nicht durch den Pol, sondern durch das Stromelement geht. In der Mechanik sagt man doch, dass, wenn eine Kraft auf einen Punkt oder Körper wirkt, die Richtung der Kraft durch den betreffenden Punkt oder Körper geht. Uebrigens ist diese ganze Frage lediglich eine solche der Zweckmässigkeit, solange es sich um geschlossene Ströme handelt. Will man den Wirkungen der einzelnen Stromelemente wirklich auf den Grund gehen, so darf man überhaupt nicht von unvermittelten Fernewirkungen reden.

1) H. Lorberg, Ann. der Phys. 3. p. 522. 1900.

2) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus. p. 205. 1891.

Herr Lecher[1]) behauptet, dass die alte Biot-Savart'sche Vorstellung der Rotation eines Poles um einen linearen Leiter ohne Berücksichtigung der Zuleitungsdrähte den experimentellen Ergebnissen widerspricht, und dass die landläufige Erklärung des alten Pohl'schen Versuches mittels Rotation des Poles längs der Kraftlinien des linearen Mittelleiters unhaltbar ist, dass die Drehung vielmehr erfolgt durch die seitliche Zuleitung. Wir dagegen behaupten, dass alle Leiter mitwirken; dass sich aber der Apparat auch so construiren lässt, dass die Wirkung hauptsächlich dem Mittelleiter zugeschrieben werden kann. Lassen wir in der Berechnung des Pohl'schen Apparates nach dem Biot-Savart'schen Gesetz $z_1 = z_2 = \infty$ werden, so verschwinden alle Glieder, die von der Rinne und dem horizontalen Zuleitungsdrahte herrühren. Dies ist nicht der Fall, wenn $\varrho_1 = 0$ wird. Es bleibt nur das Glied übrig, welches von der Wirkung des verticalen Drahtes auf den Südpol herstammt. Das ganze Drehungsmoment reducirt sich auf $-2\,m\,I$. Es lässt sich in diesem Fall also die Wirkung durch den Mitteldraht allein erklären, und wir können jetzt sagen, dass der Pol längs einer Kraftlinie des Mittelleiters sich zu bewegen strebt.

Hr. Hagenbach[2]) untersucht den Fall, in dem wir es mit einem verticalen Magneten zu thun haben, in dessen Mitte ein Strom durch einen horizontalen Draht zugeleitet und an dem oberen Ende des Magneten wieder abgeleitet wird. Der Strom soll durch die ganze Breite des Magneten fliessen. Es wird behauptet, dass die Wirkung der äusseren horizontalen Zuleitung um die Axe des Magneten gleich Null ist, weil auf den Nordpol und Südpol des Magneten ein Drehungsmoment um eine horizontale Axe wirkt, dessen Componente um die verticale Axe gleich Null ist. Diese Erklärung der Nichtwirkung der horizontalen Zuleitung scheint nach der Ansicht des Verfassers nur für den Fall gültig zu sein, dass wir es mit zwei Polen zu thun haben, die in der Drehungsaxe liegen, aber nicht für den, dass wir es mit zwei magnetischen Flächenbelegungen zu thun haben.

1) E. Lecher, Ann. d. Phys. **3**. p. 521. 1900; Physik. Zeitschr. **2**. p. 62. 1900.

2) E. Hagenbach, l. c.

Um das Drehungsmoment um die $Z$-Axe der positiven Flächenbelegung zu bestimmen, zerlegen wir die Fläche in Elemente $d\sigma$, sodass die Magnetismusmenge auf ein Flächenelement gleich $m\,d\sigma$ ist. Dann ergiebt sich, unter der Benutzung des Ausdruckes für $M'_{ab,z}$ auf p. 708 für das Drehungsmoment der positiven Flächenbelegung,

$$M'_{R\infty,z} = -\,m\,I\,z_1 \int_R \int^{\infty} \frac{\varrho \cos\alpha_1\, d\sigma\, d\xi}{[\varrho^2 + x_1^2 - 2\,\varrho\,\xi\cos\alpha_1 + \xi^2]^{3/2}}$$

$$= -\,m\,I\,z_1 \int_0^R \int_R^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 \cos\alpha_1\, d\varrho\,.\,d\xi\, d\alpha_1}{[\varrho^2 + \xi^2 + x_1^2 - 2\,\varrho\,\xi\cos\alpha_1]^{3/2}}.$$

Hier bedeutet nun $R$ den Radius des Magneten, und $z_1$, $\varrho$, $\alpha_1$ sind Coordinaten des Flächenelementes. Für $d\sigma$ haben wir gesetzt

$$d\sigma = \varrho\, d\varrho\, d\alpha_1.$$

Für die negative Schicht bekommen wir denselben Ausdruck, nur muss für $z_1$ $z_2$ gesetzt werden. Das Vorzeichen bleibt dasselbe, da $m$ und $z$ gleichzeitig das Zeichen wechseln. Das ganze Drehungsmoment der beiden Schichten um die verticale Axe des Magneten, welches von der horizontalen Zuleitung herrührt, ist also von Null verschieden.

Gehen wir in dem Pohl'schen Apparat zur Unipolarrotation über, indem wir $\varrho_1 = 0$ setzen, so ersehen wir aus der Untersuchung, die wir in § 15 durchgeführt haben, dass das Drehungsmoment nur von der Veränderung der Induction durch die Fläche des Stromes $o\,c\,d\,a\,o$ und der Stromstärke abhängig ist. Ferner folgt aus der Formel

$$V = I \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

dass die Gesamtarbeit, die in einer vollen Drehung des Armes $o\,c$ geleistet wird, gleich dem Producte der Induction durch den von der Gleitstelle beschriebenen Kreis und der Stromstärke ist. Poincaré[1]) hat bewiesen, dass, wenn der bewegliche Teil des Stromes verschiedene Gleitstellen hat, die Arbeit, die in einer ganzen Drehung geleistet wird, gleich dem

1) H. Poincaré, L'éclairage électrique **23**. p. 41. 1900.

Product der Stromstärke und der algebraischen Summe der Induction durch die verschiedenen Gleitkreise ist.

Helmholtz[1]) erklärt die Drehung im Falle der Unipolarrotation dadurch, dass er annimmt, dass das Potential der Stromelemente in der Gleitstelle dadurch geändert wird, dass sie von radialer in tangentiale Richtung übergehen. Wir dagegen haben uns eine Dehnung des Stromleiters *c d a* vorgestellt.

Es wäre noch zu bemerken, dass unsere Resultate mit denen des Hrn. König[2]) völlig, und mit denen des Hrn. Hagenbach bis auf den schon erwähnten Fall im Einklang stehen.

1) H. v. Helmholtz, Gesammelte Abhandl. 1. p. 697, 736.
2) W. König, Ann. d. Phys. 2. p. 854. 1900.

(Eingegangen 26. August 1901.)

## 3. *Ueber die Entmagnetisirungsfactoren kreiscylindrischer Stäbe; von Carl Benedicks.*

1. Bei allen physikalischen Messungen einer gewissen Eigenschaft eines Materiales ist man bestrebt, das Resultat sowohl von der äusseren Form etc. der untersuchten Proben als auch von der im Einzelfalle verwendeten Untersuchungsmethode unabhängig zu machen.

Handelt es sich z. B. darum, die magnetische Susceptibilität einer Eisensorte zu bestimmen, und ist man dabei auf die magnetometrische Methode angewiesen, dann ist es bekanntlich am vorteilhaftesten, wenn die Eisenprobe in der Gestalt eines Rotationsellipsoids vorliegt, weil man in diesem Falle mittels eines auf theoretischem Wege erhaltenen, von dem Axenverhältnis des Rotationsellipsoids abhängigen sogenannten Entmagnetisirungsfactors für die specielle Einwirkung auf das magnetisirende Feld, die durch den freien Magnetismus des Ellipsoids entsteht, die nötige Correction machen kann.

Hat dagegen die Probe die Gestalt eines Cylinders, lässt sich der entsprechende Entmagnetisirungsfactor allgemein nicht auf theoretischem Wege berechnen.

Es ist daher für diesen häufig vorkommenden Fall von grosser Bedeutung, dass man auf experimentellem Wege die Grösse der Entmagnetisirung zu bestimmen sucht; es ist ferner von grossem Wert, sich davon zu überzeugen, ob überhaupt die Anwendung der magnetometrischen Methode an Cylindern Resultate ergiebt, die mit den an Ellipsoiden oder nach der ballistischen Methode gewonnenen übereinstimmen.

In einer Arbeit[1]) „Ueber Entmagnetisirungsfactoren kreiscylindrischer Stäbe", welche die früheren diesbezüglichen An-

1) C. R. Mann, Dissert., Berlin 1895.

gaben du Bois'[1]) complettiren sollte, hat Mann die erstere dieser Aufgaben ins Auge gefasst; betreffs der letzteren enthält sein Werk nur Andeutungen von mangelnder Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen Methoden, und auch in der sonst so reichhaltigen magnetischen Literatur ist über diesen Punkt wenig zu finden, obwohl es freilich nicht an Stellen fehlt, wo bei absoluten Bestimmungen mit Cylindern nach der magnetometrischen Methode infolge der Ungleichförmigkeit der Magnetisirung grosse Vorsicht empfohlen wird.

Indessen hat der Verfasser an anderer Stelle[2]) hervorgehoben, dass die nach der magnetometrischen Methode berechnete mittlere Intensität der Magnetisirung in runder Zahl um 10—30 Proc. niedriger sein muss als die, welche sich aus ballistischen Bestimmungen mit einer kurzen auf der Mitte desselben Cylinders angebrachten Inductionsrolle ergiebt; das Verhältnis der mittleren Intensität zu dieser Maximiintensität ist nämlich gleich dem Verhältnis des Polabstandes des Cylinders zu dessen Länge.

Die Consequenzen, zu denen diese Thatsache führt in Bezug auf die Aufstellung correcter Entmagnetisirungsfactoren für Cylinder, sind es, die der Verfasser hier näher ins Auge fassen will; ich gehe dabei von einigen zu diesem Zwecke ausgeführten Bestimmungen aus.

2. Als Untersuchungsmaterial benutzte ich einen Cylinder aus sehr homogenem, in Gysinge aus Dannemoraeisen hergestelltem Gussstahl.[3]) Die Länge dieses Cylinders betrug 20 cm, sein Durchmesser 0,8 cm[4]); das Dimensionsverhältnis $\mathfrak{M}$ (Länge: Durchmesser) war also gleich 25.

Zuerst wurde die Intensität der Magnetisirung nach der

1) H. du Bois, Magnetische Kreise, p. 45. 1894; Wied. Ann. 46. p. 497. 1892.

2) C. Benedicks, Journ. de phys. 1901; Öfv. K. Sv. Vet.-Akad. Förhandl. 1901.

3) Sog. Elektrostahl, durch elektrische Schmelzung gewonnen.

4) Einige Bestimmungen, die ich an einem und demselben Cylinder ausgeführt habe, mögen hier verzeichnet werden: Specifisches Gewicht = 7,835, Elasticitätscoefficient = 21,240 kg/mm², elektrischer Leitungswiderstand (in verschiedenen Querschnitten) 0,2005, 0,2002, 0,2004, 0,1995, Mittel 0,2002. Analyse, ausgeführt von Dr. Tamm-Stockholm ergab: C = 0,90 Proc., Si = 0,28 Proc., S = 0,015, P = 0,014, Mn = 0,41.

*magnetometrischen Methode* bestimmt, in der üblichen Weise mit dem Cylinder in ost-westlicher Lage. Bei den Bestimmungen, über die l. c. näher berichtet ist, wurden alle nötigen Vorsichtsmaassregeln getroffen, wie directe Bestimmung des erdmagnetischen Horizontalcomponenten an Ort und Stelle, Berücksichtigung der Torsion des Aufhängefadens, strenge Compensation des magnetisirenden Solenoids, dessen Länge 40 cm betrug, durch ein anderes Solenoid etc.

Die Bestimmungen wurden für einen gewissen Magnetisirungscyklus in der Weise ausgeführt, dass die grösste verwendete Stromstärke, die der Feldstärke 206,2 C.G.S. entsprach, zu wiederholten Malen umgekehrt wurde, worauf die Ablesungen für verschiedene Punkte der einen Cyklushäfte und dann für die entsprechenden Punkte der anderen vorgenommen wurden, sodass das arithmetische Mittel aus den Bestimmungen der beiden Hälften direct genommen werden konnte. Von zwei nahe zusammenfallenden Serien wird die vollständigere in Tab. 1 angeführt. In Columne 1 wird die magnetisirende Feldstärke des Solenoids $H_1$ und in Columne 2 die magnetometrisch ermittelte mittlere Intensität der Magnetisirung $J_{magn.}$ (erhalten durch Division von dem Moment des Cylinders durch dessen Volumen) angegeben. Graphisch werden diese Werte durch die Curve I, Fig. 1 wiedergegeben. Die Einheiten sind C.G.S.

Tabelle 1.

| $H_1$ | $J_{magn.}$ | $J_{ball.}$ | $\frac{J_{magn.}}{J_{ball.}}$ | $H_1$ | $J_{magn.}$ | $J_{ball.}$ | $\frac{J_{magn.}}{J_{ball.}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22,9 | 165 | 240 | 0,687 | 183,3 | 1111 | 1340 | 0,828 |
| 45,8 | 466 | 641 | 0,726 | 160,4 | 1082 | 1321 | 0,819 |
| 68,7 | 712 | 963 | 0,740 | 137,5 | 1048 | 1299 | 0,807 |
| 91,6 | 866 | 1131 | 0,766 | 114,6 | 1006 | 1265 | 0,796 |
| 114,6 | 950 | 1220 | 0,779 | 91,6 | 953 | 1219 | 0,782 |
| 137,5 | 1012 | 1270 | 0,796 | 68,7 | 876 | 1141 | 0,768 |
| 160,4 | 1061 | 1304 | 0,813 | 45,8 | 734 | 993 | 0,739 |
| 183,3 | 1101 | 1331 | 0,827 | 22,9 | 469 | 658 | 0,713 |
| 206,2 | 1136 | 1350 | 0,841 | — | 151 | 224 | 0,674 |

Darauf wurde nach der *ballistischen Methode* die Magnetisirung in der Mitte des Cylinders mit Hülfe einer dort an-

gebrachten kurzen Inductionsrolle bestimmt, während der Cylinder denselben Cyklus wie vorher durchlief, nur wurde die Feldstärke sprungweise geändert. Aus den somit erhaltenen Bestimmungen[1]) der magnetischen Induction $B$ wurde die Magnetisirungsintensität $J_{\text{ball.}}$ ermitttelt aus der Formel

$$J_{\text{ball.}} = \frac{B - H_1}{4\pi - N},$$

die einfach zu deduciren ist, wo $H_1$, wie vorher, das magnetisirende Feld des Solenoids ist und $N$ der Entmagnetisirungsfactor, für den Mittelpunkt geltend, welcher auf 0,04 geschätzt

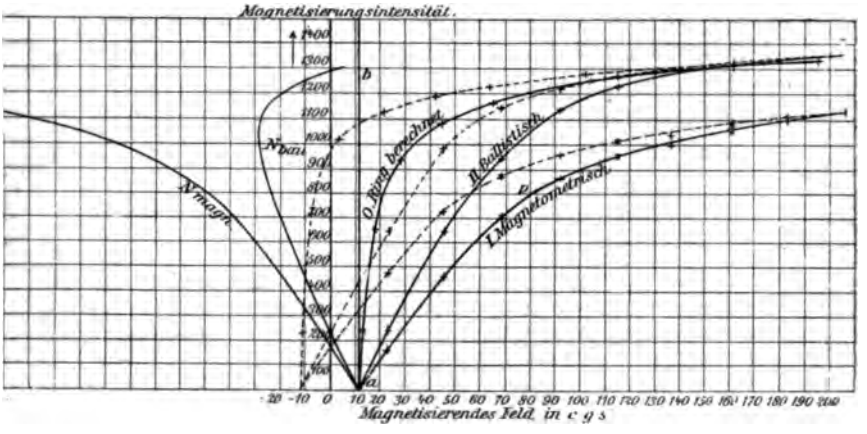



Fig. 1.

wurde (vgl. im Folgenden), ein Fehler in $N$ ist hier offenbar von wenig Belang.

Die Werte von $J_{\text{ball.}}$ in Columne 3 der Tab. 1 sind aus der erhaltenen Curve II, Fig. 1, für gerade die Werte von $H_1$ angegeben, die in Columne 1 stehen.

In Columne 4 wird der Uebersichtlichkeit halber $J_{\text{magn.}}/J_{\text{ball.}}$ eingeführt, ein Verhältnis, das auch das Verhältnis zwischen dem Polabstand und der ganzen Länge des Cylinders aus-

1) Nähere Beschreibung findet sich z. B. in J. Ewing, Magn. Induction in Iron 3 ed. 1900.

drückt. Für den vorliegenden Zweck wird jedoch Columne 4 kaum benutzt.

Um bei diesen zwei Curven die Entmagnetisirung zu bestimmen, ist eine „Normal"-Curve erforderlich, die das Verhältnis zwischen Magnetisirungsintensität und wirklicher Feldstärke ausdrückt, mit anderen Worten für endlose Gestalt gilt. Zu diesem Zwecke wurde der Cylinder durch Abdrehen in die Form eines langgestreckten *Rotationsellipsoids* [1]) von 18 cm Länge und 6 mm Durchmesser gebracht, also mit dem Axenverhältnis 30, wofür nach Neumann der Entmagnetisirungsfactor $N = 0{,}0432$ berechnet wird.

Als Garantie für die correcte Form des Rotationsellipsoids werden in Tab. 2 die Resultate einer mit der Mikrometerschraube ausgeführten Messung des Diameters ($= 2y$) in verschiedenen Abständen von der Mitte mitgeteilt ($= \pm x$). In der obersten Reihe für $y$ sind die theoretischen Werte, die man aus der Formel $y = b\sqrt{a^2 - x^2}/a$ für $2a = 180$, $2b = 6$ mm erhält, angeführt.

1) Da es eine weit verbreitete Ansicht zu sein scheint, dass die Herstellung von Rotationsellipsoiden von hinreichend genauer Gestalt mit grossen Schwierigkeiten verbunden sei, will ich nach eigener Erfahrung behaupten, dass dies *nicht* der Fall ist.

Es kommt nur darauf an — und dies ist die eigentliche Schwierigkeit bei der Arbeit — eine möglichst genaue Vorlage zu schaffen: auf einer Metallscheibe (z. B. aus Zink) construirt man möglichst genau die Hälfte der gewünschten Ellipse, sägt dann mit einer Laubsäge die Scheibe nahe an der Ellipse entlang ab und bringt es durch vorsichtiges Feilen nnd Schaben dahin, dass die Kante so nahe wie möglich mit der gezogenen Ellipse zusammenfällt. Dieser Vorlage folgt man nun beim Drehen, indem ein an dem Support des Drehstuhles befestigter Fühlhebel als Index benutzt wird. Infolge der Federung des langgestreckten Ellipsoids ist es vorteilhaft, zuletzt den Drehstahl durch eine kleine rotirende Fraise zu ersetzen.

Die Vorlage braucht nicht dieselbe Präcision zu haben, die man von dem fertigen Ellipsoid verlangt, denn man kann ohne Schwierigkeit für die Fehler der Vorlage, wenn diese auf der Teilmaschine gemessen und durch eine Curve versinnlicht werden, durch geeignete Einstellung des Fühlhebels corrigiren.

Tabelle 2.

| mm $x$ = | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 51 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ ber. | 3,000 | 2,985 | 2,939 | 2,862 | 2,750 | 2,598 | 2,472 |
| $y$ gef. für $+x$ | 2,99 | 2,95 | 2,90 | 2,84 | [2,65]* | 2,61 | 2,49 |
| $y$ gef. für $-x$ | 2,99 | 2,96 | 2,90 | 2,825 | 2,76 | 2,61 | 2,44 |
| $\Delta y$ $+x$ | −0,01 | −0,035 | −0,039 | −0,022 | [−0,105] | +0,012 | +0,018 |
| $\Delta y$ $-x$ | −0,01 | −0,025 | −0,039 | −0,037 | +0,010 | +0,022 | +0,032 |

| mm $x$ = | 57 | 63 | 69 | 75 | 81 | 84 | 87 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ ber. | 2,322 | 2,142 | 1,926 | 1,658 | 1,308 | 1,077 | 0,768 |
| $y$ gef. für $+x$ | 2,35 | 2,145 | 1,935 | 1,66 | 1,32 | 1,125 | 0,73 |
| $y$ gef. für $-x$ | 2,29 | 2,10 | 1,90 | 1,645 | 1,32 | 1,08 | 0,73 |
| $\Delta y$ $+x$ | +0,028 | +0,003 | +0,009 | +0,003 | +0,012 | +0,048 | −0,038 |
| $\Delta y$ $-x$ | −0,032 | −0,042 | −0,026 | −0,012 | +0,012 | +0,003 | −0,038 |

* Vollständig locale Vertiefung.

Hieraus ersieht man, dass die Abweichungen ($\Delta y$) von der Idealform sehr geringfügig sind. Aus $2a = 180$, $2b = 6$ mm berechnet sich das Volumen des Ellipsoids zu 3,393 cm³, während das wirkliche, durch Wägung ermittelte, 3,338 cm³ war; diese Abweichung, 1,6 Proc., dürfte darin liegen, dass die obigen Messungen an der ziemlich rauhen Oberfläche Maximiwerte sind.

Merkwürdigerweise giebt es, soviel ich habe finden können, keine ausgeführte *directe experimentelle Verification* der *Gleichförmigkeit in der Magnetisirung* eines Rotationsellipsoids.[1]) Um die Richtigkeit dieses fundamentalen Punktes zu controliren, habe ich an meinem Ellipsoid eine Serie ballistischer Bestimmungen der magnetischen Induction in vier verschiedenen Punkten in der Entfernung von je 0, 25, 50 und 75 mm von der Mitte angestellt. Die Prüfungsrollen bestanden aus Kupferdraht von 0,2 mm Durchmesser, der in Lagen von je 15 Windungen möglichst eng um das Ellipsoid an den verschiedenen Punkten gewickelt war. Das Resultat stellt Tab. 3 dar, welche

1) Für die Kugel sind solche ausgeführt: O. Grotrian, Wied. Ann. 57. p. 750. 1896.

die Induction $B$ in C.G.S. angiebt, bei vier verschiedenen Feldstärken $H_1$.

Tabelle 3.

| $H_1$ | $B$, bei einer Entfernung von der Mitte von: | | | | Durchschnittszahl |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 25 | 50 | 75 mm | |
| 22,9 | 3820 | 4060 | 3800 | 3780 | 3865 |
| 68,7 | 12100 | 12500 | 12000 | 12500 | 12270 |
| 114,6 | 14800 | 14800 | 15000 | 15300 | 14970 |
| 206,2 | 16500 | 17300 | 16900 | 17000 | 16920 |

Daraus ergiebt sich, dass die Variationen allerdings etwas grösser sind als die directen Bestimmungsfehler (die sich auf 1—1,5 Proc. belaufen), aber die Abweichungen, die völlig unregelmässig sind, lassen sich aus der Schwierigkeit, für jede Inductionsrolle den Diameter genau zu bestimmen, erklären.

*Innerhalb der Versuchsfehler erweist sich also das Ellipsoid als gleichförmig magnetisirt.*

Die Magnetisirungscurve für das Ellipsoid konnte nun entweder ballistisch oder magnetometrisch bestimmt werden; die letztere Methode wurde als die bequemere gewählt. Um zu ermitteln, ob das Abdrehen irgend einen Einfluss auf die Susceptibilität gehabt, wurden drei Serien ausgeführt, die erste unmittelbar nach dem Abdrehen, die zweite nach schwachem Glühen und die dritte nach nochmaligem, etwas stärkerem Glühen. Die Abweichungen lagen innerhalb des Bereiches der Beobachtungsfehler ($< 0{,}6$ Proc.), und da eine eventuelle Einwirkung infolge der mechanischen Bearbeitung hätte durch das Glühen beseitigt werden müssen, kann man hieraus schliessen, dass keine solche Einwirkung stattgefunden hat. Dies stimmt zu den in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Charlottenburg, gemachten Erfahrungen.

In Tab. 4 wird das Resultat der magnetometrischen Bestimmungen an dem Ellipsoid angeführt. $H_1$ ist die magnetisirende Feldstärke im Solenoid. $J$ ist die beobachtete Intensität der Magnetisirung, (das Volumen des Ellipsoids ist das durch Wägung ermittelte,) und $H$ die wirkliche, corrigirte Feldstärke, die aus der Formel $H = H_1 - NJ$ mit dem Werte $N = 0{,}0432$ abgeleitet wird. Die Einheit ist wie vorher C.G.S.

Tabelle 4.

| $H_1$ | $J$ | $H$ | $H_1$ | $J$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 22,9 | 236 | 12,7 | 206,2 | 1306 | 149,8 |
| 45,8 | 649 | 17,8 | 160,4 | 1266 | 105,7 |
| 68,7 | 943 | 28,0 | 114,6 | 1210 | 62,3 |
| 91,6 | 1090 | 44,5 | 91,6 | 1172 | 41,0 |
| 114,6 | 1164 | 64,4 | 68,7 | 1116 | 20,5 |
| 160,4 | 1247 | 106,5 | 45,8 | 1004 | 2,4 |
| 206,2 | 1300 | 150,1 | 22,9 | 707 | − 7,6 |
| 252,0 | 1334 | 194,4 | 0 | 238 | −10,3 |

Die Werte von $H$ und $J$ werden graphisch durch die Curve 0 auf Fig. 1 wiedergegeben, welche also das Verhältnis bei Magnetisirung eines geschlossenen Ringes von demselben Material repräsentirt.

3. Die Curven 0, I und II (Fig. 1) sind das nötige Material zur *Bestimmung der Entmagnetisirung* bei einem Cylinder vom Dimensionsverhältnis $\mathfrak{M} = 25$.

Wie dies offenbar der Fall sein soll, durchschneiden die drei Curven die Abscissenaxe in ein und demselben Punkt $a$; durch diesen ist die senkrechte Linie $a\,b$ gezogen worden. Werden nun links von $a\,b$ die horizontalen Differenzen abgesetzt, die sich zwischen Punkten mit demselben $J$ auf 0 und I finden, so erhält man die Curve $N_{\text{magn.}}$ — Um aus der Curve I die absolute Magnetisirungscurve (0) (Zurückscheerung) zu erhalten, hat man also die Abscisslängen für I, von $a\,b$ gerechnet, statt dessen von der Curve $N_{\text{magn.}}$ abzusetzen.

Auf dieselbe Weise geben 0 und II die Curve $N_{\text{ball.}}$

*$N_{magn.}$ und $N_{ball.}$ repräsentiren die von Mann bez. du Bois*[1]) *angegebenen untereinander verschiedenen Entmagnetisirungsfactoren für Cylindern.*

Fassen wir zunächst die letztere, $N_{ball.}$ *Curve* ins Auge.

Bis zu einer Magnetisirung von 800 C.G.S. zeigt sie eine fast vollkommen gerade Linie[2]), die einem constanten Entmagnetisirungsfactor $N = 0{,}0444$ entspricht; bei stärkerer Magne-

1) Namentlich für grössere $\mathfrak{M}$; vgl. weiter unten.

2) Dies kommt in der hier reproducirten Fig. 1 leider nicht deutlich zum Vorschein; beide Curven, $N_{\text{ball.}}$ und $N_{\text{magn.}}$, sind hier mit Unrecht unten ein wenig gebogen worden.

tisirung nimmt dagegen die Entmagnetisirung schnell ab, was darauf beruht, dass 0 und II dann beinahe zusammenfallen. — Dass II sogar etwas höher fällt, dürfte vielleicht nicht ausschliesslich Versuchsfehlern zuzuschreiben sein; bekanntlich pflegt der Kohlenstoffgehalt von geschmiedeten Stahlstücken gegen die Oberfläche etwas abzunehmen, und da dieser äussere Teil durch das Abdrehen des Ellipsoids weggenommen worden, ist es daher wahrscheinlich, dass der Rest etwas, obwohl unerheblich, grösseren Kohlenstoffgehalt und geringere Susceptibilität haben kann. Dass die Probe der Länge nach homogen war, geht aus den ausgeführten Bestimmungen des Leitungswiderstandes hervor. Jedenfalls fallen die Curven oben sehr nahe zusammen, und man wird ohne Bedenken annehmen können, dass das Material in beiden Fällen ganz dasselbe ist.

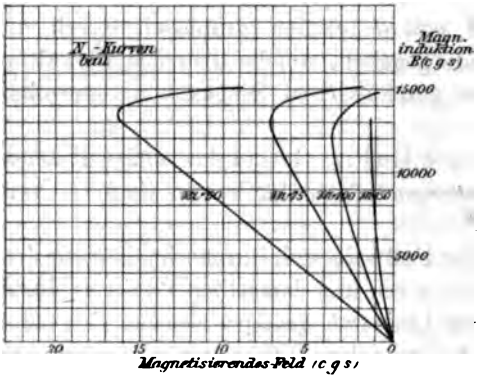



Fig. 2.

Dass die $N_{ball.}$ Curve wirklich oben stark abnimmt, geht auch aus Ewing's Bestimmungen hervor. Auf Grund der ballistisch gewonnenen Curven, welche er mitteilt[1]) und welche du Bois zur erstmaligen Berechnung von $N$ benutzt hat, habe ich hier, Fig. 2, für die verschiedenen Dimensionsverhältnisse $\mathfrak{M}$, die er angewandt hat, auf gleiche Weise wie oben die $N_{ball.}$ Curven gezogen; wie man sieht, haben diese vollkommen analogen Verlauf wie die obige.

Auch aus einer Arbeit von Lamb[2]), wo er ballistisch die Induction an demselben Stück teils in der Form eines Cylinders, teils nach Umbiegung und Zusammenschweissen desselben in der Form eines Ringes bestimmt hat, geht hervor, dass ein constanter Wert von $N$ nicht ganz befriedigend ist.

1) J. Ewing, Phil. Trans. **176.** Plate 37, Fig. 3. 1885.
2) C. G. Lamb, Phil. Mag. (5) **48.** p. 262. 1899.

Es ist also klar, dass es ebenso unrichtig wäre, denselben Wert von $N$ für stärkere Magnetisirung anzuwenden, wie es richtig ist, mit du Bois einen constanten Wert von $N$ bei schwächerer Magnetisirung (bis zu $J = 800$—$900$ C.G.S.) zu benutzen. Die Normalcurve, die man sonst in diesem Falle erhalten würde, würde für höhere Magnetisirung sich allzu „günstig" für das Material erweisen. Soviel ich sehen kann, ist man für höhere Magnetisirung auf die Anwendung graphischer „Zurückscheerung" mit einer gezogenen $N_{\text{ball.}}$ Curve angewiesen. — Allerdings sind in dieser Hinsicht weitere Versuche nötig.

Was den *numerischen Wert* von $N_{\text{ball.}}$ bis zu 800 betrifft, ist dieser, wie erwähnt, nach meinen Bestimmungen (für $\mathfrak{M} = 25$) $= 0{,}0444$. Nach du Bois wäre die nämliche Zahl gleich 0,0533. Der Grund der Abweichung dürfte darin liegen, dass du Bois, der die Werte für $\mathfrak{M} = 300$ bis $\mathfrak{M} = 50$ aus Ewing's ballistischen Messungen ableitete, für $\mathfrak{M} < 50$ *die magnetometrischen* Bestimmungen Tanakadaté's[1]) benutzte und für solche fällt, wie wir im Folgenden sehen werden, $N$ erheblich grösser aus. Ausserdem giebt Mann an, dass schon du Bois' Wert für $\mathfrak{M} = 50$ (aus Ewing's ballistischen Bestimmungen) sich als zu hoch erweist.

Ich glaube daher, dass du Bois' Zahl trotz der guten Uebereinstimmung seiner Entmagnetisirungsfactoren mit den Werten von Ascoli und Lori[2]) für Drahtbündel von entsprechenden äusseren Dimensionsverhältnissen kaum als correct gelten kann.

Was wieder die $N_{\text{magn.}}$ *Curve* angeht, stimmt ihre Gestalt mit den aus Mann's Bestimmungen erhaltenen nahe überein. — Vgl. Fig. 3, wo ich die fraglichen Curven aus seinen Werten für $\mathfrak{M} = 19{,}8$ und $\mathfrak{M} = 29{,}6$ gezogen habe. Doch verläuft der untere Teil der Curven nach Mann etwas länger geradlinig. Es ist indessen klar, was dieser Forscher auch besonders hervorhebt, dass ein constanter Wert von $N$ nur so lange verwendbar ist, bis $J$ (mittlere Intensität) höchstens 800 C.G.S.

---

1) A. Tanakadaté, Phil. Mag. (5) **26.** p. 450. 1888.

2) M. Ascoli u. F. Lori, Rendic. R. Acc. dei Lincei **3.** p. 190. 1894.

beträgt. Für höhere Werte von $J$ nimmt dagegen $N_{magn.}$ sehr rasch zu, was eine graphische Zurückscheerung in hohem Grade unsicher machen würde. Der Grund dieser schnellen Steigerung liegt darin, dass die directe Zurückscheerung von I auf 0 in hohem Grade künstlich ist, denn diese Curven vertreten streng genommen verschiedene Grössen: 0 die Magnetisirung bei gleichförmigem Felde, aber I dagegen einen mittleren Wert, der mit einem annähernd constanten Factor $l/L$[1]) (Polabstand: Stablänge) sich von dem Werte unterscheidet, den derselbe annehmen würde, wenn die Magnetisirung in der Mitte über den ganzen Cylinder gleichförmig verbreitet wäre. Da bei steigender Magnetisirung die Neigung der Curven gegen die Horizontalaxe immer kleiner wird, müssen die Abscissendifferenzen selbstverständlich hier colossal werden.

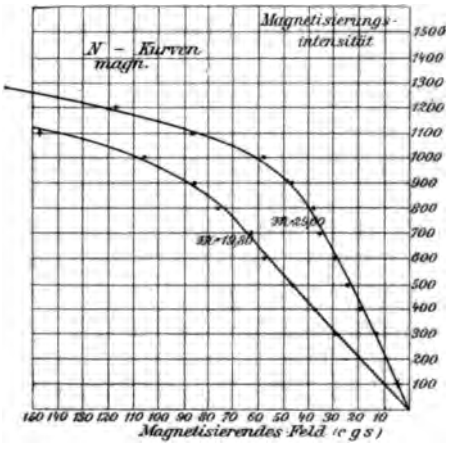



Fig. 3.

Das rationelle, obwohl nicht bequeme Verfahren besteht in einer verticalen „Hebung" von I entsprechend einer Multiplication der Werte von $J_{magn.}$ mit $L/l$, die graphisch mit Hülfe der Polabstandscurve (wie ich l. c. unter II: 6 gezeigt habe) ausgeführt werden kann, sodass I zu II übergeht, und darauf folgender graphischer Zurückscheerung mit $N_{ball.}$

Durch Anwendung der Zurückscheerung mit einer $N_{magn.}$ Curve direct von I auf 0 (durch Benutzung bloss des geradlinigen, Rechnung gestattenden Teiles der $N_{magn.}$ Curve würde man das mögliche Beobachtungsgebiet allzu sehr einschränken!) lassen sich die gemachten magnetometrischen Beobachtungen nicht vollständig verwerten. Denn wenn man z. B. einen Punkt

1) Vgl. Tab. 1, Columne 4; $\frac{1}{2} = \frac{J_{magn.}}{J_{ball.}}$.

(vgl. Fig. 1 bei $p$) bei einer mittleren Intensität = 800 C.G.S. und einer nicht corrigirten Feldstärke = 81 C.G.S. bestimmt hat, so würde das durch Zurückscheerung mit $N_{\text{magn.}}$ besagen, dass man eine mittlere Intensität = 800 C.G.S. bei einem mittleren Feld = 21 C.G.S. beobachtet hätte. Indessen hat bei dieser Bestimmung die Mitte des Stabes sich thatsächlich bei einer Magnetisirung = 1070 C.G.S. (vgl. Fig. 1) befunden, dem Felde 41 C.G.S. entsprechend. Beide Resultate sind natürlich richtig, aber im letzteren Falle sind die Beobachtungen besser ausgenutzt worden. Es wird dabei allerdings vorausgesetzt, dass man die Polabstandscurve kennt.

Mann hebt in seiner Arbeit an mehreren Stellen hervor, dass man nicht vergessen darf, dass es sich bei Cylindern nur um mittlere Werte der Magnetisirung handelt. Dies ist ganz richtig, aber man darf auch nicht übersehen, dass man durch Benutzung seiner Werte von $N$ (oder meines $N_{\text{magn.}}$) ebenfalls den mittleren Wert der Feldstärke erhält, und man kann sagen [vgl. die Arbeit Lamb's[1])] dass, wenn die mittlere Intensität $J$ bei dem mittleren Felde $H$ vorhanden ist, auch die absolute Intensität $J$ bei dem absoluten Felde $H$ sich findet.

Was nun den *numerischen Wert* von $N$ betrifft, den man aus dem ersten geradlinigen Teile meiner $N_{\text{magn.}}$ Curve erhält, so ist dieser $N = 0{,}0658$. Der entsprechende Wert Mann's für $\mathfrak{M} = 25$ ist, wenn man eine nötige Correction von $+0{,}002$, von der gleich unten die Rede sein wird, in Betracht zieht, $N = 0{,}0648$. Diese gar nicht schlechte Uebereinstimmung zeugt von der Genauigkeit unserer Arbeiten und lässt zugleich die übliche Annahme als gerechtfertigt erscheinen, dass nur die Form, nicht das Material auf $N$ Einfluss übt. Meine Probe bestand wie erwähnt, aus Stahl von 0,9 Proc. C, Mann's Material war weiches Eisen. Indessen besteht der Unterschied, dass das geradlinige Stück meiner $N_{\text{magn.}}$ Curve erheblich kürzer ist als das entsprechende bei Mann. Dieser Umstand dürfte damit zusammenhängen können, dass ich aus besonderem Grunde Hysteresiscurven benutzt habe, während Mann Commutirungscurven verwendete, welch letzteres Ver-

1) l. c.

fahren unbedingt den Vorzug zu verdienen scheint, wenn es sich um Bestimmung von $N$ handelt.

Die genannte *notwendige Correction von Mann's Werten* rührt davon her, dass er von der Annahme ausgegangen ist, dass sich ein Cylinder von dem Dimensionsverhältnis $\mathfrak{R} = 300$ in magnetometrischer Hinsicht wie ein Ellipsoid von derselben Länge und demselben Durchmesser verhalte und dass somit der Entmagnetisirungsfactor eines solchen Ellipsoides $N = 0{,}00075$ bei entsprechenden Cylindern benutzt werden könne. Wenn man den Polabstand bei Cylindern studirt hat, erscheint diese

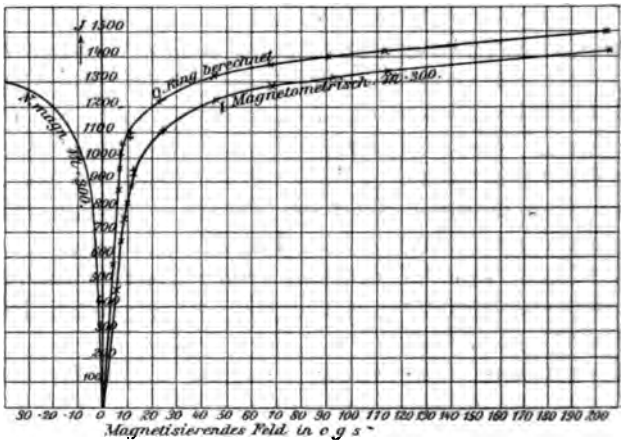



Fig. 4.

Annahme ziemlich zweifelhaft. Um den wirklichen Sachverhalt zu ermitteln, habe ich sowohl magnetometrische als auch ballistische Bestimmungen an einem Eisendraht (weiches Eisen aus Lesjöfors) von dem Dimensionsverhältnis 300 (Länge = 223,5 mm, Durchmesser = 0,745 mm) ausgeführt. Bei den Messungen verfuhr ich genau in derselben Weise wie Mann, mit Commutirung für verschiedene Feldstärken. In Tab. 5 ist das Resultat (in C.G.S.) angegeben. $H_1$ ist das magnetisirende Feld des Solenoids und $J_{magn.}$ die durch die magnetometrische Methode ermittelte mittlere Magnetisirung. Diese Werte werden in Fig. 4 graphisch durch die Curve I wiedergegeben. Für dieselben Werte von $H_1$ wurde dann die Intensität der Magnetisirung $J_{ball.}$ in der Mitte der Probe ballistisch bestimmt (Columne 3).

Tabelle 5.

Für $m = 300$.

| $H_1$ | $J_{magn.}$ | $J_{ball.}$ | $H$ | $H_1$ | $J_{magn.}$ | $J_{ball.}$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,01 | 474 | 575 | 3,72 | 22,9 | 1106 | 1235 | 22,3 |
| 5,73 | 670 | 865 | 5,30 | 45,8 | 1229 | 1326 | 45,1 |
| 6,87 | 752 | 954 | 6,39 | 68,7 | 1283 | 1372 | 68,0 |
| 8,02 | 814 | 1010 | 7,52 | 91,6 | 1320 | 1405 | 90,9 |
| 9,74 | 886 | 1068 | 9,21 | 114,6 | 1346 | 1428 | 113,8 |
| 11,45 | 936 | 1097 | 10,91 | 206,2 | 1431 | 1499 | 205,5 |

Was in Columne 4 als $H$ verzeichnet wird, ist das wirkliche Feld in der Mitte, mit Hülfe von du Bois' hier anwendbarem Werte $N = 0{,}00050$ (Magn. Kreise p. 45) und den $J_{ball.}$ Werten berechnet. Die Werte von $H$ und $J_{ball.}$ sind graphisch durch die Curve 0 (Fig. 4) angegeben, die also die Normalcurve für endlose Gestalt darstellt.

Durch Zurückscheerung von I auf 0 erhält man die gezogene $N_{magn.}$ Curve; der untere geradlinige Teil derselben, der somit dem Gültigkeitsbereich der Mann'schen Werte von $N$ angehört, ergiebt für einen Cylinder mit $\mathfrak{M} = 300$ den Wert $N_{magn.} = 0{,}0028$. Dieser Wert, mit Abzug des von diesem Physiker in Betracht gezogenen $N = 0{,}00075$, *also die Zahl 0,002, muss folglich zu sämtlichen Entmagnetisirungsfactoren Mann's addirt werden.*

### Zusammenfassung.

Wenn man mit $N_{magn.}$ und $N_{ball.}$ die für die magnetometrische bez. ballistische Methode gültigen Entmagnetisirungsfactoren für Cylindern bezeichnet, gelangt man durch die vorliegende Arbeit zu folgenden Resultaten:

1. *Die Mann'schen Werte* von $N_{magn.}$ haben sich für das Dimensionsverhältnis $\mathfrak{M} = 25$ als richtig erwiesen, wenn man in Betracht zieht, dass

2. sie sämtlich um 0,002 vergrössert werden müssen,

3. dass sie nicht weiter als bis zu einer mittleren Magnetisirungsintensität $J = 800$ C.G.S. zutreffen, und dann schnell zunehmen, sodass

4. für höhere $J$ Magnetometerbestimmungen nur auf complicirtem Wege (vgl. p. 736) zur Normalcurve reducirt und völlig verwertet werden können.

5. *Die* $N_{\text{ball.}}$ *Curven* sind, wie du Bois zuerst nachgewiesen hat, unten geradlinig, nehmen aber bei etwa $J = 1000$ C.G.S. sehr schnell gegen Null ab, sodass man dann bei höherer Magnetisirung aus ballistischen Messungen Resultate erhalten muss, die von der Länge des Cylinders so gut wie unabhängig sein dürften.

6. Die von du Bois zur Berechnung von $N_{\text{ball.}}$ benutzten Ewing'schen Messungen sind zu diesem Zweck nicht besonders geeignet, weil teils, wie Mann hervorgehoben hat, das magnetisirende Solenoidfeld keine Gewähr für Gleichförmigkeit leistet, teils Hysteresiscurven, deren Form stets bis zu einem gewissen Grade von der erreichten Maximalfeldstärke abhängt, sich zu diesem Zweck weniger gut eignen als Commutirungscurven.

7. Gegen du Bois' Verwendung von Tanakadaté's Messungen in diesem Zusammenhang lässt sich einwenden, dass diese *magnetometrisch* sind und folglich nicht mit Ewing's *ballistischen* Messungen auf gleicher Linie stehen. Die Folge davon ist, dass du Bois' Werte für $\mathfrak{M} < 50$ sicherlich zu hoch in Bezug auf ballistische, aber zu niedrig in Bezug auf magnetometrische Messungen sind.

8. Der *Unterschied* zwischen den $N_{\text{ball.}}$ und den (grösseren) $N_{\text{magn.}}$ Factoren besteht darin, dass erstere das magnetisirende Solenoidfeld $H_1$ zu dem Maximalwert des wirklichen Feldes im Mittelpunkte des Cylinders corrigiren, letztere dagegen zu dessen Mittelwert für den ganzen Cylinder.

9. Jedenfalls kann zum Zweck genauerer Messungen die Anwendung von Ellipsoiden kaum nachdrücklich genug empfohlen werden; um die Herstellung von Ellipsoiden vielleicht einigermaassen zu erleichtern, werden (p. 730) einige Andeutungen in dieser Hinsicht mitgeteilt.

Upsala, Phys. Inst. d. Univ., Juni 1901.

(Eingegangen 1. October 1901.)

## 4. *Bestimmungen der Resonanz elektrischer Schwingungen mit Hülfe des Cohärers;* *von Franz Kiebitz.*

Bei meinen Untersuchungen über die elektrischen Schwingungen eines stabförmigen Leiters hatte ich die Beobachtung gemacht[1]), dass ein Cohärer am besten anspricht, wenn er mit zwei den Erregerdrähten parallelen Drähten verbunden ist, deren Länge je eine Viertelwellenlänge beträgt. Demnach spricht der Cohärer im *Knoten* der Potentialschwankung maximal an.

Hr. Slaby gründet die Erklärung seines Systems der abgestimmten und mehrfachen Funkentelegraphie[2]) auf die gegenteilige Annahme, dass der Cohärer im *Bauche* der Potentialschwankung am wirksamsten angebracht wird.

Zur Entscheidung dieses Widerspruches habe ich weitere Untersuchungen vorgenommen, die in der vorliegenden Abhandlung beschrieben sind, und habe dabei mein früheres Resultat im Gegensatz zu Slaby bestätigt gefunden.

Hinsichtlich der Interpretation meines Resultates möchte ich gleich folgendes bemerken: Der Cohärer wird am besten ansprechen, wenn möglichst grosse Potentialdifferenzen an seinen beiden Enden erzeugt werden. Wenn nun der Cohärer als Isolator von sehr kleiner Capacität wirkte, so würde die beste Anordnung die sein, dass an seine beiden Enden Drähte angelegt würden, die je eine halbe Wellenlänge lang sind. Wenn aber die Capacität des Cohärers sehr gross ist, oder wenn der Cohärer als Leiter wirkt, so muss Resonanz eintreten, wenn die Länge der an ihn angehängten Drähte je ein Viertel der Wellenlänge beträgt, und diese Anordnung muss dann am günstigsten sein, obwohl die Potentialdifferenz an

1) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 5. p. 902. 1901.
2) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. 22. p. 38—42. 1901.

den Enden des Cohärers am kleinsten ist, wenn er in der Nähe des Knotens der Potentialschwankung liegt. Nach meinen Versuchen, die diese Anordnung als die beste ergeben, ist also zu schliessen, dass der Cohärer entweder als grosse Capacität, oder als Leiter wirkt. Vielleicht tritt beides zusammen ein, indem der unbestrahlte Cohärer zunächst als grosse Capacität wirkt, nach der ersten Schwingung aber als Leiter.

Die Beobachtungsmethode besteht darin, dass Wellen von bekannter Länge, wie sie ein stabförmiger Erreger aussendet, durch isolirte Drähte von veränderlicher Länge aufgefangen werden, die in verschiedenen Fällen verschieden angeordnet sind (geradlinig, kreisförmig). Als Indicator dient ein Cohärer, und es werden diejenigen Drahtlängen aufgesucht, für welche maximale Wirkung vorhanden ist, d. h. die grösste Widerstandsabnahme des Cohärers stattfindet.

Ehe die benutzten Empfängeranordnungen im einzelnen mitgeteilt werden, ist es notwendig, zu erläutern, durch welche Mittel es gelungen ist, während langer Beobachtungsreihen die elektrischen Schwingungen immer vollkommen gleichmässig zu erregen, und unter welchen Umständen ein Cohärer regelmässig genug arbeitet, um zur Messung der Resonanzerscheinung dienen zu können.

### 1. Der Erreger.

Zur Erregung der elektrischen Wellen wurde die schon früher von mir benutzte und beschriebene[1]) Anordnung gewählt. Ein grosses Inductorium $J$ (Fig. 1) mit Deprezunterbrecher lädt eine isolirt aufgestellte Leydener Flasche $F$ (die früher benutzte wurde ersetzt durch eine von 30 cm Höhe, $11^1/_2$ cm Durchmesser, 4 mm Glasdicke und 20 cm Höhe des Stanniolbelages). Die Entladung derselben erfolgte mittels einer Funkenstrecke $f$ zwischen Zinkelektroden durch die primäre Spule eines Teslatransformators. Von den secundären Polen desselben führt der eine direct metallisch, der andere durch eine zwischengeschaltete kleine Zuführungsfunkenstrecke zu den inneren Enden der beiden geradlinigen $38^1/_2$ cm langen und 6 mm dicken Messingstäbe $e$ und $e'$. Dieselben sind auf

1) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 5. p. 874. 1901.

Glasfüssen isolirt befestigt und bilden bei $f'$ zwischen ihren rund gefeilten Enden eine Funkenstrecke in einem Petroleumbade. Die äusseren Enden tragen zur Vervollständigung der Isolation kleine Siegellackkuppen.

Die Aufstellung des Erregers war ausserordentlich stabil; die Funkenstrecke $f'$ war kleiner als 1 mm, und als günstigste Betriebsspannung des Inductoriums wurden für die beschriebenen Versuche durchgängig 10 Volt gewählt.

Da die Widerstandsverringerung eines Cohärers von der Zeit der Bestrahlung abhängt, und ein bestrahlter Cohärer

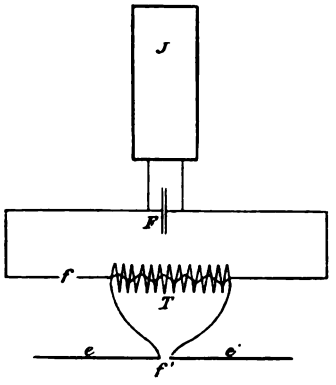



Fig. 1.

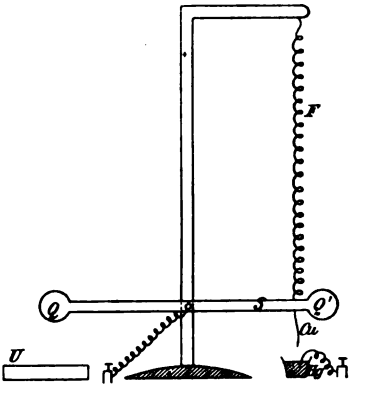



Fig. 2.

bei weiterer Bestrahlung sogar oft seinen Widerstand vergrössert, so war es notwendig, den primären Stromkreis des Inductoriums bei allen Beobachtungen gleich lange Zeit zu schliessen. Es wurde dies ermöglicht durch einen Unterbrecher von der folgenden Form:

Ein 40 cm langer isolirter Messingstab $S$ (Fig. 2) ist in verticaler Ebene frei um seine Mitte drehbar. Seine Enden sind beschwert durch aufgeschraubte Bleikugeln $Q$ und $Q'$ von 300—400 g Masse. Der Stab wird in horizontaler Lage gehalten durch eine bei $Q'$ befestigte wenig gespannte Spiralfeder $F$. Er trägt ausserdem bei $Q'$ einen 2 mm starken Kupferdraht $Cu$, welcher dicht über einer mit Petroleum bedeckten Quecksilberoberfläche $Hg$ schwebt.

Die Mitte des Stabes ist mit dem einen, das Quecksilber mit dem anderen Pole der Stromquelle verbunden.

Drückt man nun die Kugel $Q$ auf eine feste Unterlage $U$ herab, und lässt man sie sodann los, so schwingt der Stab um seine horizontale Ruhelage und schliesst dabei den Contact zwischen *Cu* und *Hg* für eine ganz bestimmte Zeit. Die Bewegung ist überdies so stark gedämpft, dass der Stab bereits nach der ersten Schwingung zur Ruhe kommt und der Strom somit nur ein einziges Mal geschlossen wird.

Durch Veränderung des Quecksilberniveaus und der Federspannung kann man die Dauer des Stromschlusses in ziemlich weiten Grenzen variiren. Bei der von mir gewählten Einstellung wurde der Strom ungefähr $^3/_4$ Secunden lang geschlossen, und es ist mir mit Hülfe dieses Stromschlüssels gelungen, wochenlang mit genau der gleichen Strahlung zu arbeiten.

### 2. Der Cohärer.

Die benutzten Cohärer enthielten entweder Nickelfeilicht oder Eisenschrauben, welche in Glasröhren zwischen Messingelektroden geschüttet waren. Diese Glasröhren wurden auf Paraffinklötze geschmolzen, welche auf straff im Zimmer ausgespannten Hanffäden lagen. Bei dieser Anordnung waren die Cohärer genügend frei von Erschütterungen, sodass sie durch Umhergehen im Zimmer nicht gestört wurden.

Die Paraffinklötze besassen auch geeignete, mit Quecksilber gefüllte Vertiefungen; mit Hülfe derselben konnten die Elektroden des Cohärers abwechselnd mit den Fangdrähten und dem Messstromkreise durch übergelegte Kupferbügel verbunden werden.

Bei Versuchen, die ein Verschieben des Cohärers nötig machten (vgl. unten p. 749 u. 751), führten die ausgespannten Fäden durch Glasröhren, die in das Paraffin eingeschmolzen waren. Dadurch war es möglich, die Verschiebung so ruhig vorzunehmen, dass dabei der Cohärer seinen Widerstand nicht änderte.

Zunächst wurden die Cohärer mit *Nickelfeilicht* gefüllt. Sie zeigten eine intensive Wirkung nur dann, wenn sie ein wenig gepresst waren. Wenn jedoch ein derartiger gepresster Cohärer bestrahlt wird, sodann sein Widerstand gemessen und durch Klopfen mit einer Glasstange wieder auf Unendlich ge-

bracht wird, so wird durch dieses Klopfen die Schichtung des Feilichts so stark gelockert, dass man es jetzt mit einem weniger stark gepressten Cohärer zu thun hat, der nach einer neuen Bestrahlung unter denselben Bedingungen eine geringere Widerstandsabnahme zeigt.

Aus diesem Grunde waren die gepressten Cohärer von vornherein ungeeignet für Resonanzversuche, und da es nicht gelang, mit ungepressten Nickelstaubcohärern starke Wirkung zu erhalten, so wurden nur solche Cohärer verwendet, die mit *Eisenschrauben* gefüllt waren.

Sie bestanden aus Glasröhren von 1—1,5 qcm innerem Querschnitt, welche auf eine Länge von 4—10 cm mit Eisenschrauben gefüllt waren, von denen 100 Stück etwas mehr als 9 g wogen. Für die vorliegenden Untersuchungen erwiesen sich Cohärer mit mehr als 20 g Schrauben nicht als geeignet; die besten Resultate wurden erhalten, wenn der Cohärer mit etwa 10 g Schrauben gefüllt war. Die Enden der Röhre waren mit Gummistopfen verschlossen, durch die ein 2 mm starker Kupferdraht zu den Empfängerdrähten führte.

Es war durchaus notwendig, die Cohärer in Stanniol zu hüllen, oder auch mit einer Messingröhre zu umgeben, weil sie sonst schon ohne angehängte Drähte auf elektrische Wellen ansprachen.

Die *Messung* des Cohärerwiderstandes wurde lange Zeit dadurch ausgeführt, dass ein Accumulator, der zu messende Cohärer und ein aperiodisches Präcisions-Milli-Volt und -Ampèremeter von Siemens & Halske hintereinander geschaltet wurden. Aus der Stromstärke, der elektromotorischen Kraft und dem Widerstand des Ampèremeters wurde der Widerstand des Cohärers berechnet. Diese Anordnung ist im Folgenden stets gemeint, wenn von der *Hauptschlussmethode* die Rede ist.

Bei späteren Beobachtungen wurde der Widerstand auf folgende Weise gemessen: Der Stromkreis eines Accumulators wird durch ein empfindliches Spiegelgalvanometer mit $10^5\ \Omega$ Vorschaltwiderstand geschlossen. Der Ausschlag beträgt sodann 500 Scalenteile (Millimeter).

Schaltet man nun den zu messenden Cohärer dem Galvanometer parallel, so beobachtet man einen kleineren Ausschlag $\alpha$,

und berechnet aus dem Widerstand $66^2/_3$ $\Omega$ des Galvanometers den des Cohärers nach der Formel

$$\frac{200}{3} \cdot \frac{\alpha}{500 - \alpha}.$$

Diese Messanordnung ist stets gemeint, wenn von der *Nebenschlussmethode* gesprochen werden wird.

Aus dem angegebenen Grunde (vgl. p. 744) wurden die Cohärer nie gepresst verwendet, sondern so stark durchgeschüttelt, dass sie als vollkommen locker geschichtet angesehen werden konnten. Ihr Widerstand ist dann zu gross, als dass er nach der Hauptschlussmethode gemessen werden könnte. Die Nebenschlussmethode zeigt, dass er grösser ist als $3 . 10^6$ $\Omega$.

Schaltet man aber hintereinander einen Accumulator, den geschüttelten Cohärer und das beschriebene Spiegelgalvanometer, so erhält man einen Ausschlag, der über die Scala hinausgeht, woraus ein Widerstand von weniger als $5 . 10^4$ $\Omega$ folgt. Dies erklärt sich dadurch, dass der Cohärer im Hauptschluss bereits durch den beim Schliessen des Stromes auftretenden Inductionsstoss eine Widerstandsabnahme erfährt.[1]) Dieselbe lässt sich durch Erschüttern wieder beseitigen. Klopft man nämlich bei geschlossenem Stromkreis den Cohärer, so kann man das Galvanometer wieder vollständig in seine Ruhelage zurückführen. Da sich dies auf $^1/_{10}$ mm genau beurteilen lässt, so ist erwiesen, dass der Widerstand des vollkommen geschüttelten Schraubencohärers grösser ist als $5 . 10^8$ $\Omega$.

Durch den Umstand, dass schon durch geringe Potentialschwankungen, wie sie beim Schliessen und Oeffnen des Stromes entstehen, der Cohärer beeinflusst wird, erklärt sich auch die Erscheinung, dass man beim Messen mit der Hauptschlussmethode häufig abweichende Stromstärken abliest, wenn man ohne sonst etwas an der Anordnung zu ändern, den Messstrom abwechselnd öffnet und schliesst.

Nachdem ich diesen der Hauptschlussmethode anhaftenden Fehler gefunden hatte, benutzte ich nur noch die Neben-

1) Beiläufig bemerke ich, dass man die Erregung des Cohärers durch sehr lange elektrische Drahtwellen bereits zwischen den secundären Polen eines kleinen Inductoriums sehr deutlich zeigen kann.

schlussmethode, bei der dieser Fehler ausgeschlossen war, wie die Versuche zeigten. Die Fehler der Hauptschlussmethode haben übrigens nie mehr als 10 Proc. im ungünstigsten Falle betragen, sodass die Richtigkeit der auch aus der Hauptschlussmethode gewonnenen Resultate dadurch keineswegs in Frage gestellt wird.

### 3. Beobachtungen.

Der Besprechung der einzelnen Empfängeranordnungen schicke ich einige Bemerkungen voraus, welche durchgängig für alle mitgeteilten Beobachtungen gelten:

Es wurde stets die Strahlung des in der beschriebenen Weise (vgl. oben p. 742) erregten geradlinigen Leiters von 77 cm Gesamtlänge beobachtet.

Der Empfänger war bei sämtlichen Beobachtungen in 5 m Entfernung vom Erreger auf isolirenden Glasgestellen aufgestellt, und zwar symmetrisch zum Erreger. (In den Figuren ist diese Entfernung also immer im Verhältnis viel zu klein gezeichnet.)

Alle angeführten Beobachtungen beziehen sich auf die oben p. 745 beschriebenen Eisenschraubencohärer, weil die mit Nickelfeilicht gefüllten Cohärer zu keinen befriedigenden Ergebnissen geführt haben.

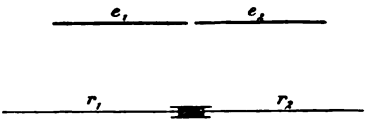


Fig. 3.

*1. Anordnung* (vgl. Fig. 3). Der Cohärer ist mit zwei den Erregerdrähten $e_1$ und $e_2$ parallelen, 2 mm starken Kupferdrähten $r_1$ und $r_2$ verbunden.

Nach jeder Bestrahlung wird der Widerstand des Cohärers durch die Hauptschlussmethode (vgl. oben p. 745) gemessen. Er ist für $r_1 = r_2 = 0$ unendlich gross. Für $r_1 = r_2 = 35$ bis 40 cm fällt er auf 5,5—6 $\Omega$ (Maximum der Wirkung). Ein Minimum erreicht die Widerstandsverringerung mit 13—14 $\Omega$ bei $r_1 = r_2 = 70$ cm.

Es bestätigt sich also das schon früher (vgl. p. 741 Anm.) für Schwingungen von grösserer Wellenlänge mit der gleichen Anordnung gefundene Ergebnis, dass der Cohärer am vorteilhaftesten im Knoten der Potentialschwankung angebracht wird.

2. *Anordnung* (vgl. Fig. 4). Der Empfänger ist kreisförmig und besteht aus 3 mm starkem Kupferdraht. Er ist in der aus Fig. 4 ersichtlichen Weise aufgestellt. *C* ist der Cohärer, *B* ein Drahtbügel, der auf den beiden parallelen Drähten *D* verschoben werden kann, sodass die Länge des Empfängerkreises stetig verändert werden kann.

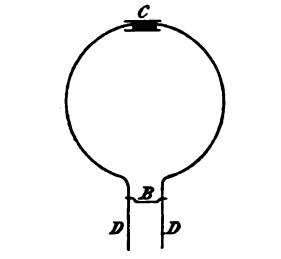


Fig. 4.

Der Widerstand des bestrahlten Cohärers wird mit der Hauptschlussmethode gemessen.

Wenn der Bügel *B* nicht aufliegt, so wird der Cohärer nur sehr schwach erregt.

Ein durch die Verschiebung von *B* zwischen 110 und 170 cm veränderlicher Drahtkreis ergiebt eine maximale Widerstandsabnahme des Cohärers (von $\infty$ bis zu ca. 17 $\Omega$), wenn die Länge des Kreises 140—150 cm beträgt, d. h. wenn die Länge des kreisförmigen Erregers ungefähr eine ganze Wellenlänge ist.

Ein in der Umgebung der halben Wellenlänge (77cm) veränderlicher kreisförmiger Empfänger zeigt keine Maxima oder Minima; der Cohärer nimmt einen Widerstand von ca. 50 $\Omega$ an.

Die nachstehende Fig. 5 stellt beispielsweise eine von vielen Beobachtungsreihen dar. Die Abscissen sind den Längen des Empfängerkreises proportional, die Ordinaten der Leitfähigkeit, die dem Cohärer durch die Bestrahlung mitgeteilt wird.

Nach jeder Beobachtung wurde der Bügel an einer anderen Stelle aufgelegt; die Messungen wurden so lange fortgesetzt, bis für jede angegebene Länge des Empfängerkreises im ganzen zehn Messungen vorgenommen worden waren. Die stark gezogene Curve bezieht sich auf den Mittelwert aus diesen zehn Beobachtungen; von den schwach gezogenen Curven zeigt die obere die grösste, die untere die kleinste gemessene Leitfähigkeit an.

Der kreisförmige Empfänger giebt also beste Wirkung, wenn seine Länge eine ganze Wellenlänge ist. Für eine halbe Wellenlänge zeigt er keine Resonanz.

Auch hieraus folgt, dass der Cohärer im Knoten der Potentialschwankung maximal anspricht; denn in dem Falle, wo der Empfängerkreis eine ganze Wellenlänge ist, muss bei *B* ein Knoten der Potentialschwankung liegen, weil sonst die überragenden Drahtenden die Resonanzerscheinung stören müssten. *C* ist von *B* um eine halbe Wellenlänge entfernt, liegt also auch in einem Knoten der Potentialschwankung.

Ist der kreisförmige Erreger eine halbe Wellenlänge lang, so könnte Resonanz eintreten, falls *B* ein Knoten und *C* (um

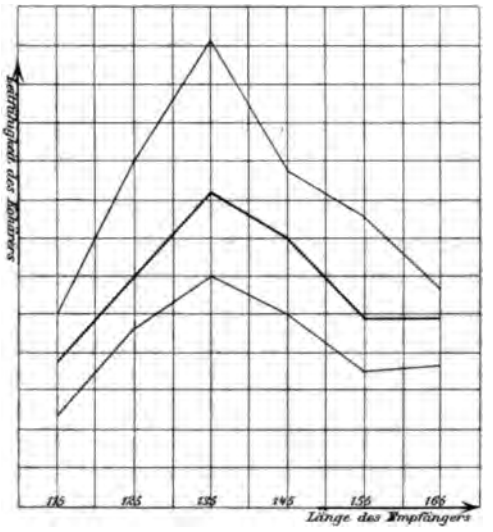



Fig. 5.

$^1/_4$ Wellenlänge von *B* entfernt) ein Bauch der Potentialschwankung wäre. Der Umstand, dass keine Resonanz vorhanden ist, zeigt, dass am Cohärer kein Bauch liegt.

*3. Anordnung* (vgl. Fig. 6). An den Enden eines den Erregerdrähten parallelen 2 mm starken Kupferdrahtes *r* werden zwei gleiche Cohärer angebracht. Ihr Widerstand nach der Bestrahlung wird einzeln nach der Hauptschlussmethode gemessen.

Es gelingt sehr schwer, beide Cohärer gleich stark zu erregen; fast immer wird nur der eine durchgeschlagen, und die Wirkung ist schwach.

Wenn $r = 30$ cm war (nahezu eine Viertelwellenlänge), so gelang es noch am besten, beide Cohärer gleichzeitig zu erregen und zwar so stark, dass der Widerstand eines jeden auf 20 $\Omega$ sank.

*4. Anordnung* (vgl. Fig. 7). Die Wirkung bei dieser Anordnung erklärt sich dadurch, dass ein Cohärer bereits am Ende eines einzigen den Erregerdrähten parallelen Drahtes $r$ (vgl. Fig. 7) anspricht, und zwar sinkt sein Widerstand im günstigsten Falle, nämlich für $r = e$ auf 16—15 $\Omega$. Die Wirkung ist also besser als bei der Anordnung 3.

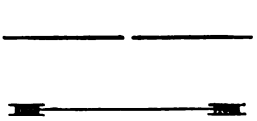


Fig. 6.

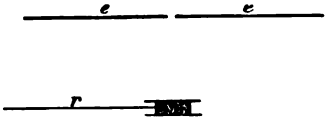



Fig. 7.

Die Resonanz erklärt sich in diesem Falle genau so wie bei der Anordnung 1 dadurch, dass am freien Ende von $r$ sich ein Bauch, am Cohärer ein Knoten der Potentialschwankung ausbilden kann.

Es wurde versucht durch *Erdleitungen* und Capacitäten, die in mannigfacher Weise an die Cohärerenden *direct* angelegt wurden, die Wirkung zu vergrössern. Immer zeigte sich jedoch eine Verschlechterung der Wirkung ausser in dem einen Falle, wo die Erdleitung durch einen den Erregerdrähten parallelen, nach der Gasleitung an die Wand geführten Draht hergestellt wurde. In diesem Falle fing die Erdleitung selbst Energie auf, und der Cohärerwiderstand sank auf 9 $\Omega$.

Zum Vergleich sei angeführt, dass bei der 1. Anordnung (vgl. Fig. 3) der Widerstand auf 5—6 $\Omega$ gebracht wurde. Diese Anordnung ist also bei weitem die günstigste.

*5. Anordnung* (vgl. Fig. 8). Eine Anordnung mit geknicktem Empfängerdrahte, die einigermaassen der Anlage des Slaby'schen Systems der abgestimmten Funkentelegraphie entspricht, wurde in der folgenden Weise hergestellt: Von einem Punkte $E$ der Symmetrieebene (Erdungspunkt des Slaby'schen Sytems) wird eine Erdleitung parallel[1]) den Erregerdrähten

1) Uebersichtlicher und der Slaby'schen Anordnung entsprechender wäre es gewesen, die Erdleitung senkrecht zu den Erregerdrähten zu

nach einer an der Wand befindlichen Wasserleitung gelegt. In entgegengesetzter Richtung liegt an $E$ parallel dem Erreger ein 2 mm starker Kupferdraht von veränderlicher Länge $f$. Senkrecht dazu liegt der ebenfalls veränderliche Draht $r$; an seinem äusseren Ende ist der Cohärer angebracht.

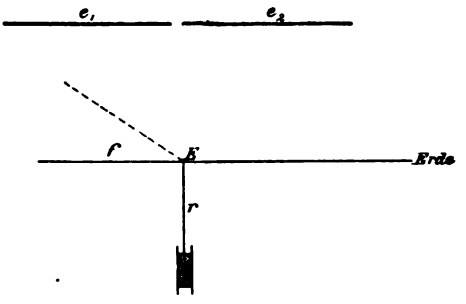



Fig. 8.

Es wurden sehr zahlreiche Beobachtungen in der Weise vorgenommen, dass $f$ während einer Beobachtungsreihe unverändert blieb, und an Stelle von $r$ Drähte von sehr verschiedener Länge aufgelegt wurden. Die Summe $f + r$ wurde auf diese Weise verändert zwischen 80 und 10 cm.

Es zeigte sich, dass für $f = 0$ der Widerstand des Cohärers durch die Bestrahlung ungefähr auf 32 $\Omega$ sank, welches auch die Länge von $r$ sein mochte. Ebensowenig liess sich für $f = 38$ deutliche Resonanz durch Verändern von $r$ nachweisen, weil der Cohärer in allen Fällen einen Widerstand annahm, der von 17 $\Omega$ wenig verschieden war.

Für mittlere Werte von $f$ jedoch ergab sich eine auffallende Abhängigkeit der Wirkung von der Länge vor $r$; am schärfsten war sie für $f = 30$ nachzuweisen. Die folgende Tabelle enthält beispielsweise eine Beobachtungsreihe.

Es wurden Drähte von der aus der ersten Columne ersichtlichen Länge in der angegebenen Reihenfolge aufgelegt und sodann der geschüttelte Cohärer dreimal bestrahlt. Die

führen, damit sie keine Strahlung von ihnen aufnimmt. Leider musste ich jetzt die Versuche abbrechen, ohne sie in dieser Weise vervollständigen zu können. Das Schlussresultat würde dadurch aber jedenfalls verändert sein, nach Anm. 2 auf folgender Seite.

Ausschläge $\alpha$ wurden mit der Nebenschlussmethode beobachtet (Ruhelage des Galvanometers 0, Ausschlag für $\Omega = \infty$ 500) und aus ihnen der mittlere Wert des Cohärerwiderstandes berechnet, der in der letzten Columne angegeben ist.

| $r$ = cm | $\alpha$ = | | | $\Omega$ = |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 86 | 91 | 88 | 14,4 |
| 45 | 143 | 132 | 161 | 27 |
| 25 | 87 | 77 | 117 | 15,5 |
| 5 | 109 | 106 | 109 | 18,4 |
| 45 | 147 | 151 | 163 | 30 |
| 25 | 92 | 116 | 87 | 16,3 |
| 5 | 99 | 108 | 110 | 18 |
| 10 | 76 | 78 | 88 | 12,5 |
| 50 | 148 | 152 | 124 | 26 |
| 40 | 198 | 135 | 148 | 31 |
| 10 | 74 | 72 | 73 | 11,4 |

Man erkennt deutlich, dass auch bei dieser Anordnung der Cohärer am besten anspricht, wenn die Gesamtlänge der resonirenden Drähte $(f + r)$ etwa eine Viertelwellenlänge beträgt (im vorliegenden Falle 40 cm), und nicht eine halbe Wellenlänge, dass also der Cohärer im Knoten der Potentialschwankung am besten anspricht, nicht im Bauche.[1])

Der Draht $f$ wurde auch in verschiedene schräge Lagen gelegt (vgl. die punktirte Linie der Fig. 8). Dann zeigte sich, dass die Wirkung sehr rasch abnahm, wenn man die Neigung gegen die den Erregerdrähten parallele Lage vergrösserte.[2])

### Resultate.

Mit dem Cohärer lässt sich die Resonanz elektrischer Wellen nachweisen, wenn man dafür sorgt, dass die Wellen immer in vollkommen gleichmässiger Weise erregt werden.

1) Nach diesem Resultate hätte man mit der Erdleitung die beste Wirkung erzielen müssen, wenn $f = {}^1/_4 \lambda = 38\,{}^1/_2$ cm, $r = {}^1/_2 \lambda = 77$ cm gewesen wäre. Leider musste ich die Versuche abbrechen, ohne dies prüfen zu können.

2) Dies zeigt, dass die von der Erdleitung aufgenommene Strahlung nur unwesentlich den Cohärer beeinflusste.

Gepresste Cohärer eignen sich nicht zu Resonanzversuchen. Die besten Ergebnisse gaben ungepresste und stark geschüttelte Eisenschraubencohärer.

Beim Messen des Widerstandes legt man den Cohärer am besten in einen Nebenschluss.

Der Cohärer spricht bei den verschiedensten Anordnungen am besten immer im Knoten der Potentialschwankung an und zwar ist die Anordnung am wirksamsten, dass an beide Enden des Cohärers zwei isolirte Drähte, die je eine Viertelwellenlänge lang sind, angelegt werden.

Giessen, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 28. September 1901.)

## 5. *Ueber vollständige Gefrierpunktscurven binärer Metalllegirungen; von A. W. Kapp.*[1])

### Historisches.

Die Schmelzerscheinungen der Metallegirungen sind eingehend zuerst von Rudberg[2]) untersucht. Er findet folgendes: Setzt man zu einem flüssigen Metall ein anderes hinzu, so wird dadurch der Schmelzpunkt erniedrigt. Wir haben also einen variablen Schmelzpunkt. Unterhalb dieses zeigt sich noch einer, der für alle Legirungen derselben beiden Metalle sich nicht ändert. Bei fortgesetztem Zusatz kann man es erreichen, dass der variable Schmelzpunkt so weit sinkt, bis er mit dem constanten zusammenfällt. Die betreffende Legirung zeigt also nur einen Schmelzpunkt und somit einen Erstarrungsvorgang, wie er sonst nur reinen Metallen eigentümlich ist. Rudberg findet, dass diese Legirung in einfachem Atomverhältnis der Componenten zusammengesetzt ist und nimmt an, dass sich zwischen zwei Metallen stets eine „chemische Legirung" bildet, welcher der constante Schmelzpunkt zukommt. Ist ein Metall im Ueberschuss vorhanden, so erstarrt dieses zuerst und ruft den ersten Schmelzpunkt hervor. Schliesslich erstarrt die chemische Legirung und ruft den zweiten constanten Schmelzpunkt hervor.

E. Wiedemann[3]) dagegen meint, dass bei dem oberen Schmelzpunkte die Erstarrung des überschüssigen Metalles nur beginnt, jedoch fortdauert bis zum unteren Fixpunkte, bei dem schliesslich das Erstarren der chemischen Legirung eintritt. Und umgekehrt beim Schmelzen wird beim unteren Fixpunkte zunächst die chemische Legirung flüssig, in der

1) Auszug aus dem zweiten Teile der gleichnamigen Dissertation. Königsberg 1901. Berichtigung: In dem Abdruck des ersten Teiles (Ann. d. Phys. 5. p. 906, Zeile 8. 1901) muss es heissen 0,8 mm statt 6,8 mm.

2) F. Rudberg, Pogg. Ann. 18. p. 240. 1830.

3) E. Wiedemann, Wied. Ann. 3. p. 237. 1878; 20. p. 228. 1883.

sich das überschüssige Metall von Grad zu Grad in immer steigendem Maasse auflöst, bis schliesslich beim oberen Fixpunkte die gänzliche Auflösung stattfindet. Durch diese Ansicht will E. Wiedemann die Erscheinung erklären, dass die Zahlen Rudberg's und auch eigene Beobachtungen in dem ganzen Intervall zwischen den Fixpunkten eine Verzögerung der Abkühlung zeigen, dass also in dem ganzen Intervall eine Abgabe von latenter Wärme stattfindet.

Als Beweis für die molecularen Umlagerungen hat Ermann[1]) seine Beobachtungen über die Volumenänderung des Rose'schen Metallgemisches gedeutet. Dasselbe zeigt vor dem Schmelzen eine starke Contraction, der dann in der Nähe der Schmelztemperatur eine starke Ausdehnung folgt. Die Contraction soll einen Uebergang der Legirung in eine dichtere Modification zur Ursache haben.

Mazzotto[2]) findet dasselbe bei den Legirungen von Darcet, Rose, Lipowitz und Wood und bestimmt sogar die zur Umlagerung verbrauchte Wärmemenge zahlenmässig.

Ganz ähnliche Erscheinungen wie bei den Metalllegirungen wurden für Gemenge von organischen Substanzen durch die Untersuchungen von Battelli und Palazzo[3]) und die von Battelli und Martinetti[4]) festgestellt.

Die aus diesen Arbeiten gewonnenen Anschauungen über die Ursache des doppelten Schmelzpunktes lassen mit Notwendigkeit folgern, dass die den niedrigsten und einheitlichen Schmelzpunkt aufweisenden Legirungen die sogenannten „chemischen Legirungen" sein müssen, ihre Zusammensetzung daher einfachen Atomverhältnissen entsprechen muss. Diese Folgerung scheint nicht nur durch die Angaben Rudberg's bestätigt zu werden, sondern auch durch eine ganze Reihe späterer Untersuchungen. So giebt z. B. W. Roberts[5]) an, dass die betreffende Silber-Kupferlegirung im Verhältnis ihrer

1) G. Ermann, Pogg. Ann. **9.** p. 557. 1827.

2) D. Mazzotto, Atti della R. Accad. di Torino **17.** p. 111. 1881.

3) A. Battelli u. L. Palazzo, Nuovo Cimento 3. Reihe **17.** p. 94. 1884.

4) A. Battelli u. M. Martinetti, Atti della R. Accad. di Torino **20.** p. 1. 1885.

5) W. Roberts, Ann. de Chim. (5) **13.** p. 11. 1878.

Atomgewichte zusammengesetzt ist. Ganz ähnliches ist für organische Gemenge gefunden worden, nur dass hier das Verhältnis des Moleculargewichtes in Frage kommt. Nach Schaffgotsch[1]) hat von allen Gemengen von Kaliumnitrat und Natriumnitrat dasjenige den niedrigsten Schmelzpunkt, welches von jeder Substanz gleichviel Molecüle enthält. Dasselbe gilt nach H. Courtonne[2]) für Gemenge aus Naphtalin und Stearinsäure und nach Th. Turner[3]) für solche aus Terpentinhydrochlorid und Terpentinmonochlorid. In neuester Zeit sind besonders von L. Vignon[4]) eine ganze Reihe von Beobachtungen gleichen Resultates veröffentlicht.

So sehr auch hierdurch die Lehre von einer „chemischen Legirung" gesichert erschien, ist man dennoch wieder von ihr zurückgekommen. Neben theoretischen Betrachtungen waren es wohl hauptsächlich die Versuche von Guthrie[5]), dessen Angaben über die Zusammensetzung der einen einheitlichen Schmelzprocess aufweisenden von ihm als „eutektisch" bezeichneten Legirungen in vollständigem Widerspruch mit denen anderer stehen. Er findet weder bei vier untersuchten eutektischen Wismutlegirungen noch bei einer grossen Reihe der entsprechenden organischen Gemenge, den sogenannten Kryohydraten, eine Abhängigkeit der Zusammensetzung von stöchiometrischen Gesetzen. Die Resultate Guthrie's werden wenigstens für die Kryohydrate von A. Miolati[6]) bestätigt, welcher insbesondere die Behauptungen L. Vignons zurückweist, dann ferner von A. Dams[7]), der eine Reihe von vollständigen Gefrierpunktscurven für organische Gemenge aufgestellt hat.

Die Auffassung über den ganzen Erstarrungsvorgang ist schliesslich durch die von W. Ostwald[8]) gegebene Erklärungsweise sehr verfeinert worden, welcher hierzu die Gesetze der Gefrierpunktserniedrigung heranzieht.

1) F. G. Schaffgotsch, Pogg. Ann. **102.** p. 293. 1854.
2) H. Courtonne, Compt. rend. **95.** p. 922. 1882.
3) Th. Turner, Chem. News (5) **51.** p. 133. 1885.
4) L. Vignon, Compt. rend. **113.** p. 133. 1891.
5) F. Guthrie, Phil. Mag. (5) **17.** p. 462. 1884.
6) A. Miolati, Zeitschr. f. physik. Chem. **9.** p. 649.
7) A. Dams, Wied. Ann. **54.** p. 486. 1895.
8) W. Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie, 2. Aufl. p. 1023. 1891.

### Die Versuche.

Zum Studium der hier in Frage kommenden Erscheinungen schien es mir das Zweckmässigste zu sein, vollständige Gefrierpunktscurven aufzustellen. Zu den Versuchen wurden die leicht schmelzbaren Metalle Bi, Sn, Pb, Cd verwendet, besonders weil hier noch die Anwendung eines Quecksilberthermometers möglich war. Aus den angegebenen Metallen lassen sich sechs Gruppen von Legirungen bilden, nämlich BiSn, BiPb, BiCd, SnPb, SnCd, PbCd. In jeder Gruppe wurden die Metalle in neun verschiedenen von 10 zu 10 Proc. der einen Componente wachsenden Verhältnissen zusammengeschmolzen und von jeder Legirung die Erkaltungszeiten beobachtet. Indem ich mich nicht darauf beschränkte, nur die Schmelzpunkte zu bestimmen, sondern auch die dazu gehörigen Erkaltungszeiten, glaubte ich auch ein Urteil über die Menge der bei den beiden Schmelzpunkten festwerdenden Substanzen zu bekommen. Geschmolzen wurden die Metalle in einem dünnen Eisentiegel, welcher am Ende eines langen eisernen Stabes befestigt war. Der von einem Stative gehaltene Eisenstab trug gleichzeitig an einer geeigneten Aufhängevorrichtung das Thermometer. Um das Oxydiren möglichst einzuschränken, wurde jedesmal der Inhalt des Tiegels mit einer Schicht fein pulverisirter Holzkohle bedeckt. Leider zeigte sich, dass dieses Mittel bei denjenigen Legirungen, welche Cadmium enthalten, vollständig versagte, weil dieses Metall bei Anwesenheit von Kohle noch mehr als gewöhnlich dazu neigte, in höheren Temperaturen plötzlich unter Glüherscheinungen zu oxydiren. Zum ersten Male wurde ich hierauf durch das Verhalten des Thermometers aufmerksam, dessen Quecksilberfaden infolge der im Tiegel sich entwickelnden Glut plötzlich emporschoss und beinahe das Zerspringen des Thermometers veranlasst hätte.

Jede Legirung wurde eine bestimmte Anzahl Grade über den Schmelzpunkt der schwerer schmelzenden Componente erhitzt und dann der Tiegel in eine passende, innen mit Asbest ausgekleidete Ausbohrung eines Holzklotzes versenkt und noch mit einem des Thermometers wegen geteilten Asbestdeckels zugedeckt. Hierdurch wurde einerseits die Abkühlung passend verzögert, andererseits die Bedingungen der Abkühlung in einer

für den vorliegenden Zweck genügenden Weise für jeden Erkaltungsprocess gleichartig gestaltet. Die Erkaltungszeiten wurden mit Hülfe eines Secundenpendels für ein Sinken des Thermometers um je einen Scalenteil notirt. Die Beobachtungsdaten sind für die sechs Gruppen von Legirungen in den folgenden sechs Tabellen zusammengestellt. In der ersten Columne stehen die Scalenteile[1]) des Thermometers. Die erste Horizontalreihe giebt die procentische Zusammensetzung der einzelnen Legirungen, die letzten zwei das besondere Verhalten der Legirung bei den beiden Schmelzpunkten; z. B. bedeuten die zu der 50 proc. Legirung der Tab. I gehörigen Zahlen der letzten Horizontalreihe, dass das Thermometer beim unteren Schmelzpunkt bis 7,60 sank, dann wieder bis 7,81 stieg und hier constant blieb. Das Thermometer war mit dem Luftthermometer verglichen worden. Die endgültigen Angaben der Schmelzpunkte, welche auch zur Construction der später folgenden Curven verwendet worden sind, beziehen sich auf das Luftthermometer.

### Besprechung der Versuchsergebnisse.

Bei der Durchsicht der Tabellen fällt wohl zunächst der Umstand auf, dass der untere Fixpunkt nicht wie bisher angegeben für alle Legirungen derselben beiden Metalle genau der gleiche ist, sondern ebenso wie der obere Fixpunkt, wenn auch nur in sehr geringem Maasse von der Zusammensetzung der Legirung abhängt. Im Gegensatz zu dem oberen Fixpunkt steigt jedoch der untere mit wachsendem Gehalt am zweiten Metall etwas an und erreicht für die eutektische Legirung seinen höchsten Wert, um von hier bei noch stärkerem Zusatz vom zweiten Metall wieder abzufallen. Diese geringe Veränderlichkeit des unteren Fixpunktes, welche sich bei Metalllegirungen wohl wegen der Schwierigkeit einer genauen Messung hoher Temperaturen bisher der Beobachtung entzogen hat, ist bei organischen Substanzen auch in dem von mir angegebenen Sinne bereits von A. Battelli und M. Martinetti[2]) bei einem Gemenge von Paraffin und Diphenylamin beobachtet worden.

1) 1 Scalenteil = 10 mm, 1° C. = 0,187 Scalenteile.

2) A. Battelli u. M. Martinetti, Atti della R. Accad. di Torino **20.** p. 1. 1885.

## Tabelle I.

### Wismut-Zinnlegirungen.

| n- iren | 0 % Bi | 10,28 Bi | 20,09 Bi | 30,09 Bi | 40,00 Bi | 50,03 Bi | 60,00 Bi | 70,11 Bi | 80,05 Bi | 90,17 Bi | 100 % Bi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 12 | 10 | 9 | 8 | 8 | 15 |
| 32 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 12 | 10 | 9 | 9 | 8 | 147 |
| 31 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 12 | 10 | 10 | 9 | 9 | 80 |
| 30 | 7 | 9 | 10 | 10 | 11 | 13 | 11 | 10 | 10 | 10 | 15 |
| 29 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 14 | 12 | 11 | 11 | 10 | 15 |
| 28 | 8 | 10 | 11 | 11 | 12 | 14 | 12 | 11 | 11 | 10 | 14 |
| 27 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 15 | 13 | 11 | 11 | 10 | 10 |
| 26 | 15 | 11 | 12 | 12 | 13 | 15 | 13 | 12 | 11 | 13 | 9 |
| 25 | 230 | 11 | 12 | 12 | 13 | 17 | 15 | 13 | 11 | 44 | 9 |
| 24 | 11 | 13 | 13 | 12 | 13 | 17 | 15 | 13 | 12 | 57 | 9 |
| 23 | 11 | 73 | 14 | 14 | 15 | 17 | 15 | 14 | 13 | 39 | 9 |
| 22 | 11 | 89 | 19 | 14 | 17 | 18 | 16 | 15 | 15 | 34 | 10 |
| 21 | 12 | 59 | 91 | 16 | 17 | 18 | 17 | 15 | 15 | 29 | 10 |
| 20 | 12 | 42 | 80 | 18 | 18 | 20 | 18 | 15 | 15 | 28 | 11 |
| 19 | 14 | 31 | 60 | 18 | 19 | 22 | 18 | 17 | 16 | 28 | 11 |
| 18 | 14 | 27 | 47 | 18 | 20 | 22 | 21 | 17 | 34 | 27 | 12 |
| 17 | 14 | 25 | 40 | 32 | 23 | 24 | 22 | 19 | 67 | 26 | 13 |
| 16 | 14 | 24 | 35 | 98 | 24 | 26 | 22 | 20 | 47 | 26 | 15 |
| 15 | 16 | 23 | 33 | 63 | 24 | 26 | 25 | 20 | 42 | 26 | 15 |
| 14 | 18 | 22 | 32 | 57 | 27 | 29 | 26 | 22 | 42 | 26 | 15 |
| 13 | 19 | 23 | 28 | 52 | 104 | 30 | 29 | 23 | 42 | 26 | 17 |
| 12 | 20 | 24 | 31 | 50 | 71 | 32 | 30 | 42 | 42 | 27 | 18 |
| 11 | 21 | 24 | 39 | 48 | 74 | 33 | 32 | 63 | 42 | 27 | 18 |
| 10 | 22 | 26 | 62 | 44 | 69 | 62 | 36 | 63 | 43 | 27 | 20 |
| 9 | 23 | 27 | 35 | 48 | 67 | 80 | 52 | 59 | 49 | 31 | 22 |
| 8 | 25 | 29 | 34 | 48 | 67 | 80 | 52 | 148 | 83 | 41 | 24 |
| 7 | 27 | 31 | 48 | 235 | 425 | 515 | 610 | 300 | 180 | 90 | 25 |
| 6 | 29 | 35 | 75 | 45 | 75 | 82 | 32 | 202 | 125 | 68 | 27 |
| 5 | 32 | 38 | 38 | 26 | 40 | 60 | 35 | 64 | 100 | 54 | 29 |
| 4 | 36 | 40 | 39 | 36 | 42 | 58 | 25 | 36 | 41 | 36 | 32 |
| 3 | 38 | 43 | 42 | 41 | 47 | 56 | 27 | 36 | 38 | 32 | 34 |
| | 25,7 | 23,3 | 21,30 | 16,9 bis 17,2 | 13,6 | 10,85 | | 12,0 | 18,1 | 25,1 | 32,5 |
| | | | 7,00 | 7,5 bis 7,65 | 7,6 bis 7,8 | 7,60 bis 7,81 | 7,64 bis 7,88 | 7,70 bis 7,85 | 7,70 | 7,55 | |

## Tabelle II.

### Blei-Wismutlegirungen.

| Temperaturen | 0 % Bi | 10,07 Bi | 19,21 Bi | 29,52 Bi | 39,88 Bi | 50,20 Bi | 60,17 Bi | 70,45 Bi | 80,28 Bi | 89,90 Bi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44—43 | 7 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 9 | 7 | 7 | 7 |
| 43—42 | 70 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 10 | 7 | 8 | 7 |
| 42—41 | 6 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 10 | 7 | 8 | 6 |
| 41—40 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 10 | 7 | 7 | 7 |
| 40—39 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 10 | 8 | 8 | 7 |
| 39—38 | 6 | 6 | 8 | 8 | 7 | 8 | 11 | 8 | 9 | 7 |
| 38—37 | 6 | 7 | 7 | 8 | 7 | 8 | 11 | 8 | 9 | 7 |
| 37—36 | 6 | 38 | 8 | 8 | 7 | 9 | 11 | 8 | 9 | 8 |
| 36—35 | 6 | 20 | 3 | 8 | 8 | 9 | 11 | 9 | 9 | 8 |
| 35—34 | 6 | 18 | 8 | 8 | 8 | 10 | 13 | 9 | 10 | 8 |
| 34—33 | 7 | 15 | 9 | 9 | 9 | 10 | 12 | 10 | 10 | 8 |
| 33—32 | 8 | 13 | 12 | 10 | 9 | 10 | 13 | 10 | 10 | 9 |
| 32—31 | 7 | 12 | 24 | 10 | 9 | 10 | 13 | 9 | 11 | 10 |
| 31—30 | 8 | 12 | 27 | 11 | 9 | 11 | 14 | 10 | 11 | 10 |
| 30—29 | 8 | 11 | 23 | 10 | 10 | 12 | 15 | 11 | 12 | 10 |
| 29—28 | 9 | 10 | 22 | 10 | 10 | 12 | 14 | 11 | 13 | 10 |
| 28—27 | 9 | 11 | 20 | 12 | 11 | 12 | 16 | 12 | 13 | 14 |
| 27—26 | 9 | 10 | 19 | 12 | 11 | 13 | 16 | 12 | 14 | 125 |
| 26—25 | 10 | 11 | 18 | 12 | 12 | 13 | 17 | 14 | 14 | 45 |
| 25—24 | 10 | 11 | 18 | 13 | 12 | 14 | 17 | 14 | 14 | 37 |
| 24—23 | 10 | 11 | 17 | 21 | 12 | 15 | 19 | 14 | 17 | 32 |
| 23—22 | 12 | 12 | 17 | 32 | 13 | 15 | 19 | 15 | 18 | 30 |
| 22—21 | 12 | 13 | 18 | 29 | 14 | 16 | 20 | 16 | 27 | 27 |
| 21—20 | 13 | 12 | 17 | 29 | 15 | 17 | 22 | 17 | 122 | 26 |
| 20—19 | 14 | 13 | 19 | 26 | 15 | 18 | 23 | 18 | 51 | 25 |
| 19—18 | 14 | 14 | 18 | 27 | 16 | 19 | 25 | 19 | 43 | 24 |
| 18—17 | 15 | 15 | 20 | 30 | 17 | 20 | 26 | 20 | 38 | 25 |
| 17—16 | 16 | 16 | 24 | 44 | 19 | 21 | 27 | 21 | 38 | 25 |
| 16—15 | 17 | 17 | 22 | 38 | 45 | 22 | 29 | 26 | 40 | 28 |
| 15—14 | 18 | 18 | 23 | 36 | 49 | 23 | 31 | 52 | 40 | 27 |
| 14—13 | 19 | 19 | 22 | 33 | 45 | 26 | 34 | 57 | 40 | 27 |
| 13—12 | 20 | 20 | 24 | 32 | 40 | 26 | 34 | 57 | 41 | 28 |
| 12—11 | 23 | 22 | 25 | 32 | 40 | 28 | 37 | 59 | 43 | 28 |
| 11—10 | 24 | 23 | 26 | 32 | 35 | 30 | 40 | 58 | 44 | 30 |
| 10—9 | 25 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 46 | 56 | 45 | 32 |
| 9—8 | 27 | 27 | 31 | 33 | 37 | 62 | 51 | 55 | 46 | 34 |
| 8—7 | 29 | 29 | 34 | 35 | 39 | 64 | 72 | 58 | 50 | 36 |
| 7—6 | 32 | 29 | 36 | 37 | 39 | 67 | 142 | 83 | 95 | 81 |
| 6—5 | 34 | 30 | 37 | 39 | 40 | 292 | 505 | 328 | 212 | 91 |
| 5—4 | 38 | 32 | 42 | 43 | 88 | 80 | 148 | 57 | 43 | 40 |
| 4—3 | 39 | 33 | 45 | 46 | 39 | 44 | 50 | 37 | 40 | 46 |
| | 42,82 | 36,8 | 32,00 | 23,30 | 15,80 | 9,5 | 7,8 | 14,30 | 20,9 21,7 | 26,9 bis 27,5 |
| | | | | | 4,45 | 5,08 bis 5,43 | 5,9 | 5,8 | 5,8 | 6,0 |

## Tabelle III.

### Cadmium-Wismutlegirungen.

| ı- ren | 0 % Bi | 8,826 Bi | 19,26 Bi | 30,22 Bi | 40,07 Bi | 50,03 Bi | 60,13 Bi | 70,44 Bi | 80,28 Bi | 89,90 Bi | 100 % Bi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 43 | 7 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 42 | 144 | 6 | — | 7 | 5 | — | — | — | — | — | — |
| 41 | 26 | 6 | 7 | 7 | 5 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4 | — |
| 40 | 11 | 7 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | — |
| 39 | 9 | 7 | 7 | 7 | 5 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | — |
| 38 | 9 | 42 | 8 | 8 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | — |
| 37 | 9 | 36 | 8 | 8 | 6 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | — |
| 36 | 9 | 27 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 | 5 | — |
| 35 | 10 | 24 | 9 | 8 | 7 | 8 | 7 | 6 | 6 | 5 | — |
| 34 | 11 | 20 | 46 | 9 | 7 | 8 | 7 | 7 | 6 | 5 | — |
| 33 | 11 | 18 | 30 | 10 | 7 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 15 |
| 32 | 11 | 16 | 27 | 9 | 8 | 9 | 9 | 7 | 6 | 5 | 145 |
| 31 | 12 | 17 | 24 | 10 | 8 | 9 | 8 | 7 | 7 | 6 | 80 |
| 30 | 12 | 15 | 23 | 27 | 8 | 9 | 9 | 8 | 7 | 7 | 15 |
| 29 | 13 | 14 | 21 | 31 | 9 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 15 |
| 28 | 14 | 15 | 21 | 27 | 9 | 10 | 10 | 9 | 8 | 6 | 14 |
| 27 | 14 | 15 | 20 | 26 | 10 | 11 | 11 | 9 | 8 | 7 | 10 |
| 26 | 14 | 15 | 20 | 26 | 10 | 12 | 11 | 9 | 8 | 7 | 9 |
| 25 | 16 | 15 | 20 | 26 | 11 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 9 |
| 24 | 17 | 16 | 20 | 25 | 34 | 13 | 12 | 10 | 9 | 9 | 9 |
| 23 | 17 | 16 | 20 | 25 | 24 | 14 | 14 | 11 | 9 | 59 | 9 |
| 22 | 18 | 16 | 20 | 26 | 23 | 14 | 13 | 12 | 10 | 37 | 10 |
| 21 | 19 | 17 | 21 | 26 | 23 | 14 | 15 | 12 | 11 | 29 | 10 |
| 20 | 21 | 18 | 22 | 27 | 23 | 15 | 16 | 12 | 12 | 25 | 11 |
| 19 | 22 | 18 | 22 | 28 | 24 | 18 | 16 | 14 | 12 | 23 | 11 |
| 18 | 23 | 20 | 23 | 30 | 25 | 32 | 18 | 14 | 13 | 22 | 12 |
| 17 | 24 | 20 | 24 | 31 | 25 | 29 | 20 | 15 | 35 | 23 | 13 |
| 16 | 25 | 22 | 25 | 30 | 27 | 33 | 20 | 16 | 54 | 21 | 15 |
| 15 | 33 | 23 | 26 | 31 | 27 | 33 | 22 | 18 | 40 | 21 | 15 |
| 14 | 33 | 23 | 28 | 33 | 29 | 33 | 23 | 18 | 36 | 22 | 15 |
| 13 | 34 | 26 | 29 | 35 | 29 | 36 | 25 | 19 | 36 | 21 | 17 |
| 12 | 34 | 26 | 30 | 36 | 31 | 37 | 27 | 21 | 35 | 23 | 18 |
| 11 | 35 | 28 | 32 | 38 | 32 | 38 | 28 | 23 | 35 | 23 | 18 |
| 10 | 38 | 30 | 35 | 41 | 34 | 44 | 898 | 608 | 316 | 149 | 20 |
| 9 | 41 | 135 | 275 | 388 | 450 | 612 | 95 | 119 | 105 | 77 | 22 |
| 8 | 46 | 40 | 39 | 49 | 31 | 31 | 32 | 28 | 28 | 21 | 24 |
| 7 | 50 | 36 | 35 | 37 | 28 | 30 | 32 | 26 | 23 | 19 | 25 |
| 6 | 54 | 39 | 36 | 39 | 30 | 33 | 31 | 28 | 24 | 21 | 27 |
| | 42,20 | 38,30 | 34,73 | 30,03 | 24,54 bis 24,60 | 18,50 | 10,60 | 10,30 10,40 | 17,20 | 28,55 bis 28,57 | 32,50 |
| | | 9,45 bis 9,65 | 9,84 bis 9,94 | 9,9 bis 10,06 | 9,52 bis 16,00 | 9,95 bis 10,11 | 10,03 bis 10,16 | | 10,08 bis 10,14 | 10,10 | |

## Tabelle IV.

### Cadmium-Zinnlegirungen.

| Temperaturen | 0 % Sn | 10,05 Sn | 19,14 Sn | 29,43 Sn | 40,0 Sn | 50,0 Sn | 60,03 Sn | 71,03 Sn | 80,14 Sn | 90,0 Sn | 100 Sn |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45—44 | 6 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 44—43 | 7 | 8 | 7 | 6 | 5 | 6 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 |
| 43—42 | 10 | 9 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 5 | 5 |
| 42—41 | 130 | 9 | 7 | 8 | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| 41—40 | 33 | 8 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 |
| 40—39 | 19 | 8 | 8 | 8 | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 | 6 |
| 39—38 | 14 | 9 | 8 | 8 | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 | 7 |
| 38—37 | 13 | 10 | 9 | 9 | 7 | 7 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 |
| 37—36 | 11 | 10 | 8 | 9 | 7 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 |
| 36—35 | 11 | 33 | 8 | 10 | 8 | 9 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 |
| 35—34 | 10 | 44 | 9 | 10 | 8 | 9 | 9 | 8 | 8 | 7 | 8 |
| 34—33 | 10 | 36 | 10 | 11 | 8 | 9 | 9 | 8 | 9 | 8 | 8 |
| 33—32 | 10 | 30 | 11 | 12 | 8 | 10 | 10 | 9 | 9 | 8 | 8 |
| 32—31 | 10 | 27 | 14 | 11 | 8 | 10 | 10 | 9 | 9 | 8 | 9 |
| 31—30 | 10 | 25 | 44 | 13 | 9 | 11 | 11 | 10 | 10 | 9 | 9 |
| 30—29 | 11 | 24 | 41 | 13 | 9 | 12 | 12 | 10 | 10 | 9 | 9 |
| 29—28 | 11 | 24 | 37 | 13 | 11 | 12 | 12 | 10 | 11 | 10 | 10 |
| 28—27 | 12 | 24 | 36 | 31 | 10 | 12 | 12 | 11 | 11 | 10 | 10 |
| 27—26 | 13 | 22 | 34 | 59 | 11 | 13 | 13 | 11 | 12 | 11 | 21 |
| 26—25 | 13 | 22 | 31 | 49 | 12 | 14 | 14 | 12 | 12 | 11 | 126 |
| 25—24 | 13 | 22 | 33 | 45 | 29 | 14 | 14 | 13 | 14 | 12 | 69 |
| 24—23 | 12 | 22 | 32 | 43 | 42 | 16 | 14 | 14 | 14 | 12 | 22 |
| 23—22 | 13 | 21 | 32 | 43 | 42 | 15 | 16 | 14 | 15 | 14 | 18 |
| 22—21 | 15 | 21 | 32 | 42 | 40 | 36 | 17 | 15 | 16 | 147 | 15 |
| 21—20 | 16 | 22 | 30 | 41 | 38 | 56 | 18 | 15 | 16 | 74 | 15 |
| 20—19 | 17 | 23 | 31 | 40 | 37 | 55 | 19 | 17 | 17 | 59 | 16 |
| 19—18 | 18 | 23 | 30 | 40 | 36 | 51 | 19 | 19 | 106 | 48 | 17 |
| 18—17 | 19 | 24 | 32 | 41 | 36 | 49 | 77 | 20 | 87 | 43 | 18 |
| 17—16 | 21 | 24 | 32 | 42 | 36 | 48 | 58 | 20 | 79 | 40 | 19 |
| 16—15 | 22 | 26 | 193 | 317 | 372 | 529 | 700 | 632 | 307 | 157 | 20 |
| 15—14 | 23 | 101 | 47 | 50 | 22 | 30 | 32 | 25 | 24 | 24 | 20 |
| 14—13 | 24 | 29 | 30 | 33 | 24 | 29 | 28 | 24 | 24 | 24 | 21 |
| 13—12 | 26 | 27 | 29 | 30 | 24 | 30 | 30 | 25 | 24 | 24 | — |
| | 42,20 | 35,3 | 30,95 | 27,2 | 24,4 | 21,2 | 17,90 | 15,68 bis 15,83 | 18,0 bis 18,30 | 21.35 bis 21,73 | 25,70 |
| | | 10,75 bis 14,97 | 15,0 bis 15,27 | 15,25 bis 15,44 | 15,45 bis 15,54 | 15,47 bis 15,59 | 15,40 bis 15,61 | 15,60 | 15,55 bis 15,58 | 15,55 | |

## Tabelle V.

### Blei-Zinnlegirungen.

| 'em-<br>aturen | 0 %<br>Sn | 10,11<br>Sn | 20,02<br>Sn | 30,02<br>Sn | 39,98<br>Sn | 50,00<br>Sn | 60,00<br>Sn | 71,02<br>Sn | 80,12<br>Sn | 89,97<br>Sn | 100 %<br>Sn |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5—44 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 |
| 4—43 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 |
| 3—42 | 70 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 |
| 2—41 | 6 | 7 | 7 | 7 | 5 | 6 | 7 | 8 | 7 | 7 | 5 |
| 1—40 | 5 | 7 | 7 | 7 | 5 | 6 | 7 | 8 | 7 | 10 | 5 |
| 0—39 | 5 | 7 | 8 | 7 | 5 | 6 | 7 | 8 | 7 | 11 | 6 |
| 0—38 | 6 | 10 | 8 | 8 | 5 | 7 | 7 | 8 | 7 | 10 | 7 |
| 3—37 | 6 | 25 | 8 | 8 | 6 | 7 | 8 | 9 | 8 | 8 | 6 |
| 7—36 | 6 | 28 | 8 | 8 | 6 | 7 | 8 | 10 | 8 | 7 | 7 |
| 6—35 | 6 | 23 | 9 | 9 | 7 | 7 | 8 | 10 | 8 | 9 | 7 |
| 5—34 | 6 | 19 | 13 | 9 | 7 | 8 | 9 | 10 | 9 | 9 | 8 |
| 4—33 | 7 | 16 | 22 | 9 | 7 | 9 | 9 | 10 | 9 | 9 | 8 |
| 3—32 | 8 | 14 | 26 | 10 | 7 | 9 | 10 | 11 | 9 | 9 | 8 |
| 2—31 | 7 | 12 | 26 | 12 | 8 | 9 | 10 | 11 | 10 | 10 | 9 |
| 1—30 | 8 | 12 | 23 | 22 | 8 | 9 | 11 | 11 | 10 | 10 | 9 |
| 0—29 | 8 | 12 | 20 | 26 | 8 | 10 | 11 | 12 | 11 | 10 | 9 |
| 0—28 | 8 | 12 | 18 | 26 | 10 | 10 | 12 | 13 | 11 | 11 | 10 |
| 9—27 | 9 | 11 | 18 | 24 | 14 | 10 | 12 | 13 | 11 | 12 | 10 |
| 8—26 | 9 | 12 | 16 | 22 | 16 | 12 | 13 | 15 | 12 | 13 | 21 |
| 7—25 | 9 | 12 | 16 | 22 | 16 | 12 | 14 | 15 | 13 | 13 | 226 |
| 6—24 | 10 | 12 | 16 | 21 | 18 | 13 | 14 | 16 | 13 | 18 | 39 |
| 5—23 | 10 | 13 | 17 | 21 | 18 | 13 | 15 | 18 | 17 | 90 | 22 |
| 4—22 | 10 | 14 | 17 | 22 | 18 | 16 | 16 | 18 | 16 | 78 | 18 |
| 3—21 | 12 | 15 | 17 | 21 | 18 | 28 | 16 | 20 | 18 | 61 | 15 |
| 2—20 | 12 | 15 | 18 | 21 | 19 | 26 | 18 | 20 | 30 | 54 | 15 |
| 1—19 | 13 | 16 | 19 | 21 | 18 | 25 | 19 | 22 | 71 | 47 | 16 |
| 0—18 | 14 | 18 | 18 | 22 | 19 | 26 | 21 | 29 | 68 | 39 | 17 |
| 0—17 | 14 | 18 | 19 | 24 | 18 | 27 | 27 | 181 | 68 | 48 | 18 |
| 17—16 | 15 | 21 | 73 | 150 | 164 | 295 | 434 | 299 | 257 | 92 | 19 |
| 16—15 | 16 | 27 | 38 | 44 | 25 | 35 | 29 | 31 | 22 | 27 | 20 |
| 15—14 | 17 | 21 | 22 | 22 | 22 | 24 | 28 | 28 | 22 | 23 | 20 |
| 14—13 | 18 | 22 | 21 | 23 | 22 | 24 | 30 | 27 | 22 | 24 | 21 |
| | 42,82 | 37,8 | 33,4 | 30,6 | 27,3 | 21,7 | | 17,80<br>bis<br>17,84 | 20,05 | 23,3 | 25,7 |
| | | | 16,5 | 16,51<br>bis<br>16,60 | 16,7 | 16,60<br>bis<br>16,71 | 16,60<br>bis<br>16,75 | 16,90 | 16,82 | 16,7 | |

Tabelle VI.

Blei-Cadmiumlegirungen.

| Temperaturen | 0 % Cd | 9,988 Cd | 20,93 Cd | 31,20 Cd | 40,00 Cd | 49,99 Cd | 60,09 Cd | 70,65 Cd | 80,34 Cd | 90,05 Cd | 100 Cd |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44—43 | 7 | 5 | 7 | 7 | 5 | 7 | 8 | 8 | 8 | 6 | 7 |
| 43—42 | 70 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 7 | 144 |
| 42—41 | 6 | 5 | 8 | 7 | 5 | 7 | 9 | 8 | 9 | 7 | 26 |
| 41—40 | 5 | 5 | 7 | 8 | 6 | 7 | 9 | 8 | 8 | 7 | 11 |
| 40—39 | 5 | 5 | 7 | 8 | 6 | 8 | 10 | 9 | 9 | 7 | 9 |
| 39—38 | 6 | 6 | 8 | 8 | 6 | 8 | 11 | 9 | 9 | 27 | 9 |
| 38—37 | 6 | 6 | 8 | 8 | 6 | 9 | 10 | 10 | 10 | 62 | 9 |
| 37—36 | 6 | 6 | 8 | 9 | 7 | 9 | 12 | 11 | 10 | 43 | 9 |
| 36—35 | 6 | 6 | 8 | 9 | 7 | 9 | 13 | 12 | 105 | 38 | 10 |
| 35—34 | 6 | 6 | 9 | 10 | 8 | 9 | 16 | 121 | 74 | 37 | 11 |
| 34—33 | 7 | 7 | 9 | 10 | 7 | 75 | 168 | 94 | 55 | 28 | 11 |
| 33—32 | 8 | 12 | 10 | 12 | 53 | 70 | 74 | 45 | 27 | 16 | 11 |
| 32—31 | 7 | 29 | 10 | 35 | 30 | 39 | 41 | 27 | 19 | 13 | 12 |
| 31—30 | 8 | 19 | 10 | 54 | 22 | 29 | 32 | 22 | 16 | 12 | 12 |
| 30—29 | 8 | 19 | 18 | 37 | 19 | 24 | 27 | 20 | 16 | 12 | 13 |
| 29—28 | 9 | 22 | 141 | 128 | 110 | 131 | 124 | 87 | 57 | 31 | 14 |
| 28—27 | 9 | 78 | 82 | 91 | 28 | 26 | 26 | 19 | 17 | 13 | 14 |
| 27—26 | 9 | 16 | 29 | 29 | 12 | 15 | 16 | 15 | 14 | 12 | 16 |
| 26—25 | 10 | 11 | 17 | 17 | 12 | 13 | 15 | 14 | 14 | 13 | 17 |
| 25—24 | 10 | 10 | 16 | 16 | 10 | 12 | 16 | 15 | 15 | 13 | 17 |
| | 42,82 | 32,00 | 29,2 | 31,0 | 32,13 bis 32,20 | 33,04 bis 33,12 | 33,80 bis 33,84 | 34,50 | 35,86 | 38,05 | 42,2 |
| | | 27,00 | 28,25 | 28,28 | 28,38 | 28,40 | 28,45 | 28,47 | 28,43 | 28,23 | |

Zwischen Metalllegirungen und den Gemengen organischer Substanzen zeigt sich hier eine wesentliche Uebereinstimmung, die noch dadurch vermehrt wird, dass auch bei den Legirungen öfters eine deutliche Unterkühlung eintritt, wie dies die in den beiden letzten Horizontalreihen der Tabellen angegebenen doppelten Zahlen erkennen lassen. Das Thermometer war jedesmal bis zu der kleineren Zahl gesunken, um dann rasch bis zu der grösseren emporzusteigen und hier seinen constanten Stand einzunehmen. Als Schmelzpunkt gilt stets die grössere der beiden Zahlen. Anfänglich glaubte ich das geringe Emporsteigen des Quecksilberfadens bei dem unteren

Schmelzpunkt durch eine Contraction der festwerdenden Legirung und ein dadurch hervorgerufenes Zusammenpressen des Quecksilbergefässes erklären zu müssen. Besondere Versuche zeigten jedoch, dass das Ansteigen des Fadens bereits dann erfolgte, als die Legirung eine breiige Consistenz angenommen hatte und noch eine vollständige Bewegung des Thermometers zuliess, sodass an ein Zusammenpressen des Gefässes noch gar nicht gedacht werden konnte.

Vergleicht man die Grösse der einzelnen Erkaltungszeiten in den Tabellen miteinander, so sieht man leicht, dass hier sicher nicht zwei ausgeprägte Schmelzpunkte im Sinne Rudberg's vorliegen, sonst müssten die Erkaltungszeiten zwischen den beiden Schmelzpunkten mit denen weit ausserhalb derselben dieselbe Grössenordnung besitzen, wenn sie ebenso wie diese ihrer Grösse nach nur durch die specifische Wärme bestimmt sind. Die Tabelle zeigt jedoch, dass die Erkaltungszeiten zwischen den beiden Fixpunkten bedeutend grösser sind, als die ausserhalb liegenden, was nur dadurch erklärt werden kann, dass der Erstarrungsprocess und mithin das Freiwerden von latenter Wärme sich über das ganze von den beiden Fixpunkten eingeschlossene Intervall erstreckt.

Die hier angegebenen Erscheinungen werden am besten durch die von W. Ostwald angegebene Theorie des Erstarrungsvorganges erklärt. Nach diesem Forscher sind die Metalllegirungen als Lösungen aufzufassen, und zwar können wir zunächst ein Metall *A* als Lösungsmittel betrachten und zu diesem nach und nach von dem Metall *B* hinzusetzen. Dadurch wird fortgesetzt der Gefrierpunkt, wie ich jetzt den Schmelzpunkt nennen möchte, erniedrigt und zwar für geringe Concentrationen nach Maassgabe des Coppet-Raoult'schen Gesetzes. Da man aber andererseits auch von dem Metall *B* ausgehen und dies als Lösungsmittel betrachten kann, dessen Gefrierpunkt durch fortgesetzten Zusatz von *A* continuirlich erniedrigt wird, so muss jedenfalls eine Legirung existiren, in welcher ein vollständiges Gleichgewicht herrscht, d. h. bei welcher jeder Stoff mit gleichem Rechte als Lösungsmittel wie als gelöste Substanz angesehen werden kann. Daher müssen hier beide Stoffe gleichzeitig auskrystallisiren und zwar in einem der Zusammensetzung des flüssigen Gemisches ent-

sprechenden Verhältnis, da sonst das Gleichgewicht sofort gestört werden würde.

Bei der Abkühlung einer Legirung gestaltet sich nach obigem der Vorgang folgendermaassen. Die ursprüngliche Zusammensetzung der Legirung wird die Grösse der Gefrierpunktserniedrigung, d. h. den Punkt bestimmen, bei dem das Auskrystallisiren des im Ueberschuss vorhandenen Metalles stattfinden kann. Zunächst wird jedoch in den meisten Fällen eine Unterkühlung eintreten, nach deren Aufhebung sofort eine grössere Menge des überschüssigen Metalles erstarrt. Dadurch wird die zurückbleibende Masse concentrirter, der zugehörige Gefrierpunkt liegt tiefer, sodass ein weiteres Auskrystallisiren erst eintreten kann, wenn die Temperatur etwas gesunken ist. Dieser Vorgang ist schliesslich als ganz stetig anzusehen. Bei jedem Sinken des Thermometers um ein Temperaturelement kann ein Massenelement auskrystallisiren. Mit anderen Worten, die latente Wärme wird beim Erstarren von Legirungen nicht bei einer bestimmten Temperatur, sondern in einem grösseren Temperaturintervall frei. Die Erkaltungszeiten müssen daher in diesem Intervall gegen die früheren gleichmässig vergrössert erscheinen; nur beim Beginn des ganzen Vorganges, wo eine vorausgegangene Unterkühlung das Erstarren einer grösseren Menge überschüssigen Metalles möglich machte, erscheint die Erkaltungszeit so stark vergrössert, dass dieser Punkt von Rudberg und vielen anderen als ein ausgeprägter Schmelzpunkt angesehen worden ist, während man in der That hier nur von einem Schmelzintervall sprechen kann. Wir bekommen nämlich für den Erstarrungsprocess auch nach unten hin eine Grenze, denn schliesslich wird, da zunächst immer nur die eine Componente erstarrt, das flüssige Gemisch diejenige Concentration besitzen, durch welche der oben charakterisirte Gleichgewichtszustand gegeben ist. Hier erstarren beide Componenten gleichzeitig und zwar in den Maassverhältnissen, dass die Concentration des flüssig bleibenden Anteiles sich nicht ändert. Eine weitere Erniedrigung des Gefrierpunktes kann daher nicht eintreten, wir haben hier einen wirklichen constanten Schmelzpunkt.

Sind zwei Metalle von vornherein in jenem, dem vollständigen Gleichgewicht entsprechenden Verhältnis zusammen-

gesetzt, so wird auch von vornherein der Erstarrungsprocess bei jenem tiefsten Punkte beginnen, es liegt die eutektische Legirung vor.

Die Zahlen meiner Tabellen entsprechen dieser Theorie in jedem Punkte. Die Grösse der zwischen den beiden sogenannten Schmelzpunkten liegenden Erkaltungszeiten kann nicht durch blosse Abkühlung, d. h. durch die frei werdende specifische Wärme des Metallgemisches erklärt werden. Es muss hier notwendigerweise in dem ganzen Intervall latente Wärme frei werden. Oefters sind allerdings die Erkaltungszeiten nach unten hin nicht weit genug angeführt, um die wieder eintretende bedeutende Verminderung derselben deutlich zu kennzeichnen. Doch genügt wohl auch der Vergleich mit den oberhalb des Erstarrungsintervalles liegenden Zeiten.

Je mehr die ursprüngliche Zusammensetzung einer Legirung der der eutektischen nahe kommt, um so grösser wird der Betrag des in ihr enthaltenen eutektischen Gemenges sein. Deshalb müssen die zum unteren Fixpunkt gehörigen Erkaltungszeiten um so grösser sein, je mehr wir uns der eutektischen Legirung nähern. Auch diese Folgerung aus der Theorie wird durch die Zahlen der Tabellen zur Genüge bestätigt.

Es ist hier zu berücksichtigen, dass diese Versuche mit Metalllegirungen, welche sich über ein hochgelegenes und weit ausgedehntes Temperaturintervall erstrecken, nicht mit der Genauigkeit angestellt werden können, wie man es sonst bei Gefrierpunktsbestimmungen gewohnt ist. Insbesondere kann man die Abkühlungsgeschwindigkeit einer geschmolzenen Metallmasse wegen ihres hohen Schmelzpunktes nicht ohne ganz besonders umfangreiche Vorkehrungen in dem Maasse verringern, wie es vom Standpunkte moderner Kryoskopie wünschenswert erscheinen muss, sodass in Rücksicht hierauf die vorliegenden Versuche nur als orientirend bezeichnet werden können.

Infolge der nicht regulirbaren Abkühlungsgeschwindigkeit ist es auch unmöglich, die Unterkühlungen stets auf dasselbe bestimmte Maass zu beschränken, um die ihnen entsprechenden Concentrationsänderungen bei der Angabe der Schmelzpunkte rechnerisch zu berücksichtigen. Eine Folge dieser Fehler-

quellen ist auch die gesetzmässige Veränderlichkeit des unteren Fixpunktes. Es ist auffallend, dass der untere Fixpunkt für die eutektische Legirung den höchsten Wert erreicht, für die anderen Legirungen derselben Componenten aber um so tiefer liegt, je mehr Ueberschuss an dem einen oder anderen Metall vorhanden ist. Diese Erscheinung erklärt sich, wenn man auf die von Nernst[1]) gegebene Theorie der Einstellung des Gleichgewichtes beim Gefrieren zurückgeht. Hiernach erhält man bei einer Gefrierpunktsbestimmung nur einen scheinbaren Gefrierpunkt $t'$, nämlich die Temperatur der gefrierenden Flüssigkeit in dem Moment, wo die Wärmemenge, welche durch Ausstrahlung verloren geht, gleich ist der Wärmemenge, welche infolge des Gefrierens frei wird. Ist $t_0$ die Curventemperatur, d. h. diejenige Temperatur, welcher die Lösung zustreben würde, wenn keine Wärme durch Gefrieren frei würde, so ist die Abkühlungsgeschwindigkeit gegeben durch die Gleichung von Newton $dt = K(t_0 - t)\,dz$. Die Erwärmungsgeschwindigkeit ist proportional der Entfernung der augenblicklichen Temperatur $t$ vom wahren Gefrierpunkt $T_0$, also $dt = K(T_0 - t)\,dz$. Es ist für das Folgende wichtig, dass die Constante $K$ um so kleiner sein muss, je kleiner die gemeinsame Oberfläche der beiden reagirenden Phasen Eis und Lösung ist. Superponirt man die obigen Formeln, so kommt man zu der resultirenden Temperaturänderung

$$dt = K(T_0 - t) + \varkappa(t_0 - t)\,dz.$$

Wird die Temperaturänderung gleich Null, so ist die augenblickliche Temperatur $t$ gleich dem scheinbaren Gefrierpunkt $t'$

$$t' = T_0 - \frac{\varkappa}{K}(t' - t_0).$$

Das Correctionsglied dieser Nernst'schen Gefrierpunktsformel wird gleich Null, wenn die Convergenztemperatur $t_0$ gleich $T_0$ gemacht wird. Dies war bei meinen Versuchen offenbar nicht der Fall, vielmehr liegt die Convergenztemperatur viel tiefer, sodass das Correctionsglied den wahren Gefrierpunkt wesentlich zu beeinflussen vermag. Nach dem über $K$

1) W. Nernst u. R. Abbeg, Zeitschr. f. phys. Chemie **15.** p. 681. 1894; vgl. auch F. M. Raoult, l. c. **27.** p. 617. 1898.

vorher Gesagten muss diese Constante bei den einzelnen Legirungen um so kleiner sein, je geringer die Menge des ursprünglich vorhandenen eutektischen Complexes ist, d. h. je mehr Ueberschuss an einem Metall vorhanden ist. Der beobachtete scheinbare Gefrierpunkt des eutektischen Complexes $t'$ rückt also, da hier die Correction offenbar stets negativ ist, um so tiefer, je kleiner $K$ ist, je mehr die Zusammensetzung

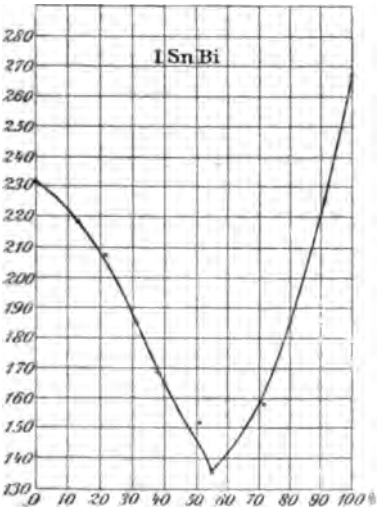



Fig. 1.

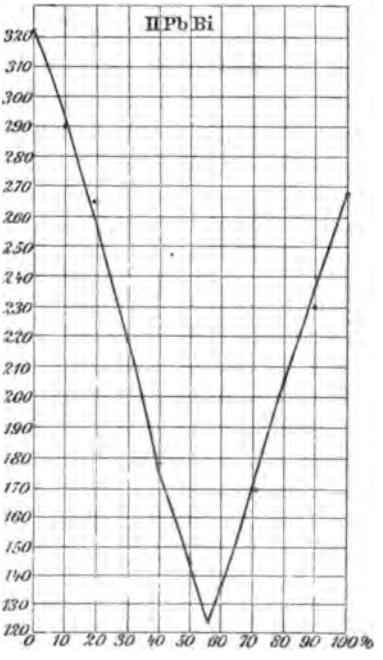



Fig. 2.

der Legirung von der der eutektischen abweicht, wie es in Uebereinstimmung mit dieser Theorie meine Versuche ergeben haben.[1])

Um die Zusammensetzung der eutektischen Legirungen zu finden, habe ich die vollständigen Gefrierpunktscurven der sechs Legirungsgruppen aufgestellt (vgl. Figg. 1—6), indem ich in ein Coordinatennetz als Abscissen den Procentgehalt, als Ordinaten die durch den Beginn der Erstarrung gegebenen Tempera-

1) Diese Erklärung der fraglichen Erscheinung verdanke ich Hrn. Dr. H. Hausrath, Assistenten am math.-phys. Institut zu Königsberg.

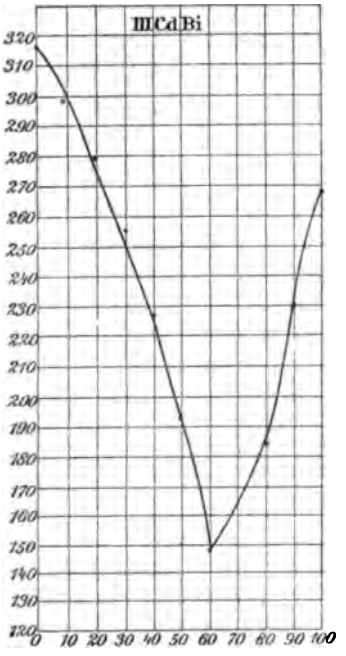



Fig. 3.

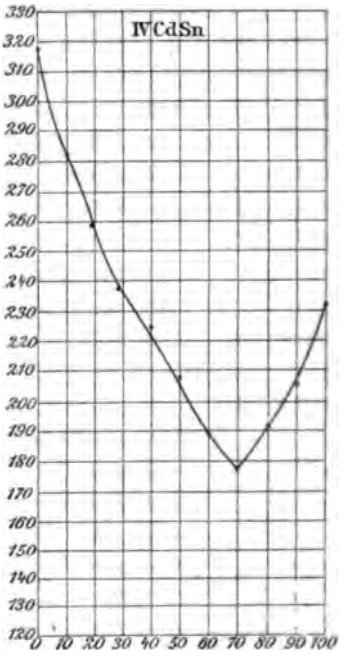



Fig. 4.

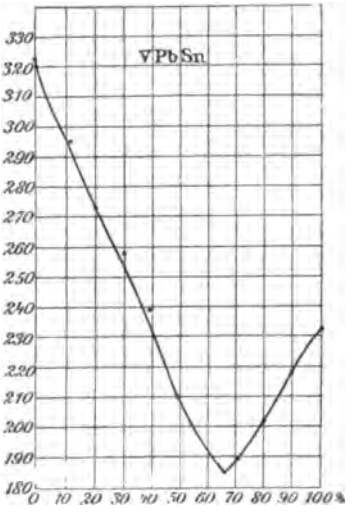



Fig. 5.

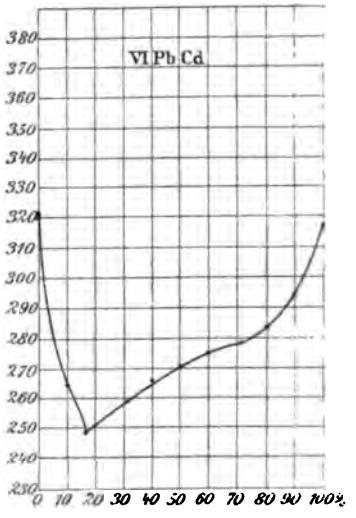



Fig. 6.

turen eintrug. Ich erhalte so zwei von den Erstarrungspunkten der reinen Metalle abwärts führende Curven, deren Schnittpunkt durch seine Abscisse den Procentgehalt, durch seine Ordinate die Schmelztemperatur der eutektischen Legirung angiebt. Natürlich liegt in dem Versuch einer Reihe von Punkten eine Curve einzuzeichnen, eine gewisse Willkür, sodass der auf diese Weise erhaltene Procentgehalt der eutektischen Legirung nur angenähert richtig ist. Zur Entscheidung der Frage nach der etwaigen stöchiometrischen Gesetzmässigkeit in der Zusammensetzung mussten die Gewichtsprocente in Molecularprocente umgerechnet werden, wodurch sich dann leicht feststellen liess, durch welche chemischen Symbole die angenähert gefundene Zusammensetzung sich innerhalb der durch die Beobachtungsfehler gegebenen Grenzen darstellen liess. Es zeigte sich, dass diese chemischen Symbole sich nicht immer, wie von Rudberg u. a. gefunden worden ist, durch einfache Zahlenbeziehungen auszeichnen. Ich komme hier zu demselben Resultat wie Guthrie, obwohl die von mir gefundene Zusammensetzung der eutektischen Legirung mit den Angaben Guthrie's[1]) bei zwei Legirungen nur angenähert, bei einer dritten gar nicht übereinstimmt. In der folgenden Tabelle ist in der zweiten Columne die von mir gefundene gewichtsprocentische Zusammensetzung angegeben, während die dritte Columne die entsprechenden Werte von Guthrie für die drei von diesen ebenfalls untersuchten Legirungen enthält.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SnBi | 56 | Proc. | Bi | 46,60 | Proc. | Bi | nach Guthrie |
| PbBi | 57 | „ | Bi | 55,58 | „ | Bi | |
| CdBi | 60 | „ | Bi | 59,19 | „ | Bi | |
| CdSn | 70 | „ | Sn | | | | |
| PbSn | 66 | „ | Sn | | | | |
| PbCd | 16 | „ | Sn | | | | |

In Anbetracht der Verschiedenheit der Resultate habe ich die eutektischen Legirungen sowohl nach dem von mir, als auch nach dem von Guthrie gefundenen Verhältnis hergestellt und einem Schmelzprocess unterworfen. Die Beobachtung der Erkaltungszeiten liess für die von mir gefundene Zusammensetzung niemals einen doppelten Schmelzpunkt (oder genauer

1) F. Guthrie, Phil. Mag. (5) 17. p. 462. 1884.

ein Schmelzintervall) erkennen. Die nach Angaben Guthrie's hergestellte Blei-Wismut erstarrte ebenfalls wie ein reines Metall. Bei der Cadmium-Wismutlegirung machte sich dicht oberhalb des eutektischen Schmelzpunktes ein zweiter Stillstand des Thermometers bemerkbar. Die Zinn-Wismutlegirung schliesslich, welche in ihrer Zusammensetzung von meinen Angaben ausserordentlich abweicht, zeigte ein ausgedehntes Schmelzintervall, woraus in Uebereinstimmung mit dem von mir gefundenen Resultat zu folgern ist, dass der Procentgehalt dieser Legirung von dem wahren gesuchten Werte weit abweicht.

Während ich auf rein synthetischem Wege durch die Festlegung der ganzen Gefrierpunktscurve zur Zusammensetzung der eutektischen Legirung gelange, benutzt Guthrie den entgegengesetzten Weg, indem er von einer beliebigen Legirung das bei einem Erkaltungsprocess am längsten flüssig bleibende Gemisch abgiesst und einer Analyse unterwirft. Diese Methode ist zwar, wenn man die von Ostwald gegebene Erstarrungstheorie voraussetzt, theoretisch richtig, trotzdem weicht der auf diesem Wege von Guthrie gefundene Wert so wesentlich von dem von mir auf synthetischem Wege erhaltenen ab, dass sich die Differenz wohl kaum durch die Verschiedenheit der benutzten Ausgangsmaterialien erklären lässt.[1])

Die auf Grund meiner Beobachtungsdaten angestellten Berechnungen ergaben auch die Unrichtigkeit des folgenden von Rudberg[2]) aufgestellten Gesetzes: „In einer Legirung, deren Abkühlung regulär geschieht, enthält jedes der Metalle vom Schmelzpunkt der Legirung bis zum eigenen Schmelzpunkt gleich viel Wärme."

Die besondere Stellung, welche die eutektische Legirung unter allen aus denselben beiden Componenten zusammengesetzten Legirungen hinsichtlich ihres Schmelzprocesses einnimmt, lässt auch auf sonstige besondere Eigenschaften derselben schliessen. So hat Charpy[3]) in einer Abhandlung über die Constitution der eutektischen Legirungen (welche nach

1) Ich bemerke hierbei, dass die von mir benutzten Materialien in möglichster Reinheit von E. Merck in Darmstadt bezogen worden waren.

2) F. Rudberg, Pogg. Ann. **71.** p. 460. 1847.

3) G. Charpy, Compt. rend. **124.** p. 957. 1897.

der Methode von Guthrie hergestellt wurden), Aetzversuche an polirten Metallflächen mitgeteilt, nach denen sich die einen einheitlichen Schmelzpunkt aufweisenden Legirungen durch eine äusserst feine Structur, d. h. durch eine besonders feine Verteilung der beiden Componenten auszeichnen. Im Einklang hiermit stehen die Resultate, welche ich bei der Untersuchung der Bruchflächen fand. Es zeichnete sich die eutektische Legirung gegenüber den anderen durch ein feineres Korn aus, woraus man natürlich den Schluss auf die grössere mechanische Festigkeit ziehen kann.

Die Erforschung gewisser Beziehungen zwischen der Zusammensetzung und der mechanischen Festigkeit und jenen anderen äusseren Eigenschaften, welche so manche Legirung dem Menschen unentbehrlich gemacht haben, ist nicht nur von wissenschaftlichem Standpunkte aus interessant, sondern scheint mir auch von hoher praktischer Bedeutung zu sein. Solche Beziehungen können in Zukunft je nach dem Grade ihrer Sicherheit und Allgemeinheit einen bestimmten Weg oder auch nur einen Fingerzeig für die Auffindung einer neuen Legirung bilden, welche bestimmten vorher gewünschten Bedingungen zu entsprechen hat. Bis jetzt ist man allerdings noch immer bei der Herstellung derartiger neuer Legirungen im grossen und ganzen auf den wenig wissenschaftlichen Weg des blossen Ausprobirens angewiesen. Wie wenig verlockend ein solcher Weg erscheint, sieht man an der ungeheuren jahrelangen Mühe und Arbeit, welche zur Herstellung des Magnaliums, einer technisch-brauchbaren Aluminiumlegirung, nötig gewesen ist.

Obige Arbeit unternahm ich auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. C. Pape. Es sei mir erlaubt, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Pape, für seine Unterstützung herzlichen Dank zu sagen.

(Eingegangen 27. September 1901.)

## 6. *Ueber den permanenten Magnetismus einiger Stahlspecialitäten (Manganstahl, Chromstahl, Nickelstahl, Wolframstahl etc.);* *von Anton Abt.*

(Vorgetragen am 22. Februar 1901 in der naturw. Fachsitzung des Siebenbürger Museum-Vereins.)

Die Montan-Oberverwaltung der priv. Oest.-Ung. Eisenbahngesellschaft zu Resitza im Krassó-Szörényer Comitat hat mir zu meinen magnetischen Untersuchungen auf mein Ansuchen in splendider Weise eine Sammlung von 44 Stahlstäben aus verschiedenen Stahlsorten in ihren gross angelegten Stahlfabriken zu Resitza anfertigen lassen. Für diese im Interesse der Wissenschaft bereits zu wiederholten Malen bekundete Munificenz meinen Dank auch hier auszudrücken, erachte ich für eine angenehme Pflicht.

Sämtliche Stahlstäbe haben die Form von vierseitigen Prismen mit quadratischem Querschnitt, dessen Seitenlänge 1,4 cm, dessen Fläche $1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96\ \text{cm}^2$ beträgt. Von jeder Stahlsorte waren kürzere und längere Stäbe, die kürzeren sind 10 cm, die längeren 14,6 cm lang. Das Volumen der kürzeren Stäbe beträgt somit 19,6 $\text{cm}^3$, das der längeren Stäbe 28,616 $\text{cm}^3$ im Durchschnitt.

Diese wertvolle Stahlsammlung enthält sieben verschiedene Stahlsorten, und zwar: zehn verschiedene Kohlenstahle ($T_1$, $T_2$ etc.), von jeder Sorte ein kurzes und ein langes Prisma, im ganzen 20 Stäbe aus Kohlenstahl; zwei Manganstahle ($M$); sechs Stück hochprocentige Manganstahle ($MM_1$, $MM_2$ etc.), drei kurze und drei lange Stäbe; sechs Stück Chromstahle ($C_1$, $C_2$ etc.); sechs Stäbe aus Wolframstahl ($W_1$, $W_2$ etc.); zwei aus Nickelchromstahl ($C_8$) und zwei Stäbe aus Nickelstahl ($N$)[1]).

1) Ueber die chemische Zusammensetzung und hüttenmännische Darstellung dieser Stahlsorten werde ich erst in einer späteren auf den ganzen inducirten Magnetismus dieser Stahlsorten sich erstreckenden Abhandlung berichten können, wenn mir die dazu erforderlichen Daten aus der Hand des betreffenden Hütteningenieurs zur Verfügung stehen werden.

Aus dieser wertvollen Stahlsammlung habe ich zu einer vergleichenden Voruntersuchung von jeder Sorte zwei Stäbe, einen kürzeren und einen längeren ausgewählt und deren permanenten Magnetismus bestimmt.

Vor dieser Bestimmung wurden sämtliche Stäbe in warmem Wasser (über 20°) mit Vorsicht gehärtet, was namentlich bei den Exemplaren $T_{10}$, $T_{11}$, $T_{12}$, $C_2$, $C_3$, $C_8'$, $W_1$, $W_2$, $W_4$ wegen der grossen Härte dieser Stahle notwendig war. Trotz aller Vorsicht konnte ein teilweises Anreissen bei einigen Exemplaren nicht vermieden werden.

Zur Magnetisirung der Stahlstäbe wurde eine aus 3,5 mm dickem Kupferdraht angefertigte, aus 671 Windungen bestehende, 27,25 cm lange Spirale verwendet, deren Constante $2n\pi = 309{,}4224$ ist, wenn $n$ die Windungszahl für die Längeneinheit von 1 cm bedeutet. Nachdem der zu magnetisirende Stahlstab mit einer geeigneten Vorrichtung in die Mitte der Spirale eingeführt war, wurde der Stromkreis geschlossen und der Strom einer Accumulatorenbatterie aus 60 Zellen 5 bis 6 Sec. lang durch die Spirale geleitet. Dann wurde der Stab aus der Spirale entfernt und mittels eines aus Edelmann's Werkstätte bezogenen empfindlichen Spiegelmagnetometers auf seinen permanenten Magnetismus untersucht. Dabei wurde der zu untersuchende Stab in die ostwestliche Lage gebracht, sodass seine Mittellinie durch den Mittelpunkt der Magnetometernadel ging und normal zum magnetischen Meridian war. Die Entfernung seines Mittelpunktes von dem der Magnetometernadel betrug 100 cm, die Entfernung der Scala vom Spiegel 257,7 cm.

Die relativen permanenten magnetischen Momente sind hier den beobachteten in Scalenteilen ausgedrückten Ausschlägen der Magnetometernadel proportional.

Bei diesen Versuchen wurde die Intensität des jeweiligen magnetisirenden Stromes mittels eines Regulators von Siemens & Halske gemessen und konnte dieselbe von 1,3 Amp. bis zu 24 Amp. gesteigert werden. Bei jeder Stromintensität wurde der Ausschlag der Magnetometernadel beobachtet. Die erhaltenen Resultate sind in folgenden zwei Tabellen zusammengestellt, in welchen $P$ das Gewicht der Stäbe in

| Stahlarten | $J=1{,}3$ Amp. | | $J=2{,}5$ Amp. | | $J=5{,}0$ Amp. | | $J=8{,}0$ Am | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $M$ | $M/J$ | $M$ | $M/J$ | $M$ | $M/J$ | $M$ | $M$ |
| **a) Stahlstäbe, 14,6 cm lang.** | | | | | | | | |
| 1. Nickelchromstahl, $C_8$ . . . | 14,5 | 11,154 | 44,0 | 17,600 | 123,0 | 24,600 | 189,0 | 23 |
| 2. Chromstahl, $C_3$ . . . . . | 15,1 | 11,615 | 44,95 | 17,620 | 112,0 | 22,400 | 162,5 | 20 |
| 3. Nickelstahl, $N$ . . . . . | 16,0 | 12,307 | 45,0 | 18,000 | 108,5 | 21,700 | 127,0 | 15 |
| 4. Chromstahl, $C_1$ . . . . . | 17,1 | 13,153 | 43,0 | 17,200 | 94,9 | 18,980 | 130,0 | 16 |
| 5. Kohlenstahl, $T_{10}$ . . . . | 18,0 | 13,846 | 36,5 | 14,600 | 58,1 | 11,620 | 76,1 | 9, |
| 6. Wolframstahl, $W_8$ . . . . | 10,95 | 8,423 | 17,0 | 6,800 | 30,5 | 6,100 | 35,5 | 4, |
| 7. Kohlenstahl, $T_1$ . . . . . | 7,0 | 5,384 | 12,8 | 5,120 | 17,5 | 3,500 | 20,0 | 2, |
| Manganstahl, hochprocentig | | | | | | | | |
| 8. Mangan, $M\,M_2$ . . . . . | 2,5 | 1,923 | 6,6 | 2,640 | 9,35 | 1,870 | 10,25 | 1, |
| 9. Mangan, $M\,M_1$ . . . . . | 0 | — | 0 | — | — | — | — | - |
| **b) Stahlstäbe, 10 cm lang.** | | | | | | | | |
| 1. Nickelchromstahl, $C_8$ . . . | 5,00 | 3,846 | 15,15 | 6,060 | 38,4 | 7,680 | 65,0 | 8, |
| 2. Kohlenstahl, $T_{10}$ . . . . | 4,50 | 3,461 | 16,2 | 6,480 | 43,5 | 8,700 | 69,0 | 8, |
| 3. Chromstahl, $C_3$ . . . . . | 5,40 | 4,153 | 15,0 | 6,000 | 38,0 | 7,600 | 60,0 | 7, |
| 4. Nickelstahl, $N$ . . . . . | 4,85 | 3,7307 | 12,5 | 5,000 | 31,0 | 6,200 | 47,5 | 5, |
| 5. Chromstahl, $C_1$ . . . . . | 6,25 | 4,807 | 15,0 | 6,000 | 33,5 | 6,700 | 49,5 | 6, |
| 6. Manganstahl, $M_1$ . . . . | 4,25 | 4,038 | 14,0 | 5,600 | 36,1 | 7,220 | 54,5 | 6, |
| 7. Kohlenstahl, $T_1$ . . . . . | 5,00 | 3,846 | 12,5 | 5,000 | 14,4 | 2,880 | 17,0 | 2, |
| 8. Wolframstahl, $W_8$ . . . . | 3,25 | 2,500 | 6,1 | 2,440 | 9,9 | 1,980 | 12,5 | 1, |
| Manganstahl, hochprocentig | | | | | | | | |
| 9. Mangan, $M\,M_2$ . . . . . | 1,25 | 0,961 | 3,45 | 1,3600 | 4,6 | 0,920 | 5,1 | 0, |
| 10. Mangan, $M\,M_1$ . . . . . | 0 | — | 0 | — | — | — | — | |

Grammen, $V$ deren Volumen in cm³, $J$ die Stromintensität in Ampères, $M$ das in Scalenteilen ausgedrückte permanente magnetische Moment, $M/J$ das auf die Stromeinheit reducirte magnetische Moment, $M/V$ das auf 1 cm³ reducirte magnetische Moment, oder die Magnetisirungsintensität und schliesslich $M/P$ das auf 1 g reducirte magnetische Moment, oder den specifischen Magnetismus bedeutet.

Die unter a) angeführten Resultate beziehen sich auf die 14,6 cm langen, die unter b) angeführten auf die 10 cm langen Stahlstäbe. In beiden Tabellen sind die Stäbe nach den Maximalwerten ihrer permanenten magnetischen Momente geordnet.

| 10,0 Amp. | | $J=12{,}0$ Amp. | | $J=16{,}0$ Amp. | | $J=20{,}0$ Amp. | | $J=24{,}0$ Amp. | | | | $P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | $M/J$ | $M$ | $M/J$ | $M$ | $M/J$ | $M$ | $M/J$ | $M$ | $M/J$ | $M/V$ | $M/P$ | |
| ,0 | 21,900 | 234,5 | 19,541 | 243,5 | 15,218 | 247,0 | 12,350 | 248,1 | 10,337 | 8,67004 | 1,158 | 214,24 |
| ,5 | 18,150 | 193,0 | 16,083 | 198,5 | 12,406 | 204,5 | 10,225 | 204,5 | 8,5208 | 7,845 | 1,0091 | 202,64 |
| ,6 | 16,760 | 177,0 | 14,750 | 185,5 | 11,593 | 189,6 | 9,480 | 189,6 | 7,900 | 6,625 | 0,812 | 233,46 |
| ,1 | 14,210 | 151,5 | 12,625 | 152,5 | 9,531 | 156,5 | 7,825 | 156,5 | 6,5208 | 5,469 | 0,767 | 203,88 |
| ,5 | 8,450 | 86,3 | 7,191 | 89,6 | 5,600 | 91,0 | 4,550 | 91,0 | 3,791 | 3,18004 | 0,477 | 190,50 |
| ,7 | 4,570 | 50,5 | 4,166 | 51,0 | 3,187 | 53,6 | 2,680 | 53,6 | 2,208 | 1,878 | 0,2604 | 205,77 |
| ,6 | 2,460 | 26,5 | 2,208 | 26,5 | 1,656 | — | — | 28,0 | 1,166 | 0,978 | 0,136 | 205,52 |
| ,5 | 1,050 | 11,0 | 0,916 | 11,0 | 0,687 | — | — | 11,0 | 0,458 | 0,384 | 0,053 | 206,67 |
| – | — | — | — | — | — | — | — | 0 | — | — | — | — |
| ,5 | 7,950 | 91,1 | 7,591 | 99,6 | 6,225 | 104,0 | 5,200 | 105,5 | 4,391 | 5,382 | 0,743 | 141,86 |
| ,6 | 8,060 | 90,0 | 7,500 | 95,0 | 5,937 | 98,0 | 4,900 | 100,1 | 4,1708 | 5,107 | 0,656 | 152,37 |
| ,0 | 7,100 | 81,1 | 6,758 | 87,5 | 5,468 | 91,8 | 4,590 | 92,9 | 3,8708 | 4,739 | 0,642 | 142,98 |
| ,0 | 5,700 | 65,6 | 5,466 | 72,55 | 4,534 | 76,5 | 3,825 | 77,5 | 3,229 | 3,954 | 0,482 | 160,72 |
| ,5 | 5,750 | 64,5 | 5,375 | 67,5 | 4,218 | 70,5 | 3,525 | 73,0 | 3,041 | 3,724 | 0,477 | 152,89 |
| ,5 | 6,150 | 66,9 | 5,575 | 70,2 | 4,387 | 72,5 | 3,625 | 73,0 | 3,041 | 3,724 | 0,523 | 139,60 |
| ,95 | 1,895 | 20,5 | 1,708 | 21,9 | 1,368 | 23,0 | 1,150 | 23,5 | 0,979 | 1,198 | 0,163 | 143,52 |
| ,6 | 1,460 | 17,6 | 1,466 | 20,0 | 1,250 | 23,0 | 1,150 | 23,0 | 0,958 | 1,173 | 0,145 | 157,97 |
| ,0 | 0,600 | 6,0 | 0,500 | 6,0 | 0,375 | — | — | 6,0 | 0,250 | 0,306 | 0,042 | 140,41 |
| – | — | — | — | — | — | — | — | 0 | — | — | — | — |

Aus diesen Resultaten ist ersichtlich:

1. dass das Verhältnis $M/J$ bis zu einer gewissen Stromstärke zunimmt, über diese hinaus aber fortwährend abnimmt, dass also das magnetische Moment bei ansteigendem Strome sich einem Grenzwerte nähert, welcher bei den meisten dieser Stahlstäbe bei einer Stromstärke von 20 Amp. völlig oder sehr nahe erreicht war. Die Stäbe aus hochprocentigem Maganstahl erreichten schon bei 10 Amp. das Maximum ihres magnetischen Momentes.

2. Unter diesen Stahlsorten hatte der Nickelchromstahl das grösste, der hochprocentige Manganstahl das kleinste permanente magnetische Moment angenommen. Nach dem Nickel-

chromstahl folgte der Chromstahl $C_3$, dann der Nickelstahl und der Chromstahl $C_1$, jeder mit einem grossen magnetischen Moment. Dann folgte der Kohlenstahl $T_{10}$, der Wolframstahl $W_3$, der Kohlenstahl $T_1$ und zuletzt der hochprocentige Manganstahl $MM_2$. Das Verhältnis vom grössten und kleinsten magnetischen Moment des Nickelchromstahles und des hochprocentigen Manganstahles betrug bei den längeren Stäben 22,5, bei den kürzeren 17,6.

Ein Manganstahl von geringerem Mangangehalt unter den kürzeren Stäben erreichte ein ebenso grosses magnetisches Moment von 73, wie der Stab $C_1$ aus Chromstahl, während das grösste Moment des hochprocentigen Manganstahles nur 6 betrug.

Ein anderer mit $MM_1$ bezeichneter hochprocentiger Manganstahl wurde im ungehärteten Zustande der Magnetisirung unterworfen. Dieser hatte selbst bei den stärksten in Anwendung gebrachten magnetisirenden Kräften keinen merklichen permanenten Magnetismus angenommen.

3. Die Magnetisirungsintensität und der specifische Magnetismus der längeren Stäbe ist grösser als die der kürzeren Stäbe. Es nehmen also beide mit der Länge der Stäbe zu, wie dies auch bei anderen Stahlsorten und magnetischen Körpern beobachtet wurde, und wie ich dies auch bei Magnetit und Hämatit beobachtete.[1])

Bei dem 14,6 cm langen Stabe aus Nickelchromstahl betrug die Magnetisirungsintensität 8,67, bei dem 10 cm langen nur 5,38, das Verhältnis beider 1,61 und das Verhältnis ihrer specifischen Magnetismen 1,55.

Die Magnetisirung dieser Stahlstäbe und die Bestimmung der magnetischen Momente derselben wurde im Jahre 1900 in der zweiten Hälfte des Monates März ausgeführt. Bei den im Monat Juli 1901 vorgenommenen Messungen zeigten sämtliche Stahlstäbe eine bedeutende Abnahme ihres permanenten magnetischen Momentes, wie dies aus folgender Tabelle ersichtlich ist, in welcher $M$ wieder die in Scalenteilen ausgedrückten relativen magnetischen Momente bedeutet.

1) A. Abt, Naturw. Ber. d. Siebenbürg. Mus.-Ver. II. naturw. Abt. 15. p. 134. 1893; l. c. 20. p. 134. 1898; Wied. Ann. 68. p. 658. 1899.

| | Stablänge 14,6 cm | | Stablänge 10 cm | |
|---|---|---|---|---|
| | | *M* | | *M* |
| Nickelchromstahl, $C_8$ . . . | 200 | (248) | 73,5 | (105,1) |
| Chromstahl, $C_3$ . . . . . | 149,5 | (204,5) | 64,0 | (92,9) |
| Nickelstahl, *N* . . . . . | 119,9 | (189,6) | 46,7 | (77,5) |
| Kohlenstahl, $T_{10}$ . . . . . | 68,5 | (91,0) | 77,5 | (100,1) |
| Wolframstahl, $W_3$ . . . . | 1,0 | (53,6) | 6,5 | (23,0) |
| Hochproc. Manganstahl, $MM_2$ | 6,0 | (11,0) | 2,0 | (6,0) |

Die eingeklammerten Zahlen sind die bei der ersten Messung erhaltenen, bereits in der ersten Tabelle angeführten Grenzwerte der permanenten magnetischen Momente dieser Stahlstäbe.

Die Ursache dieser bedeutenden Abnahme an Magnetismus liegt wohl hauptsächlich darin, dass ich diese Stahlstäbe mit meiner reichhaltigen Sammlung von Stahlmagneten und von natürlichen und künstlich erzeugten Eisenerzmagneten 1900 zur Pariser Ausstellung schickte. Infolge der starken Erschütterungen während des Transportes und der ungleichen Berührung mit anderen Magneten hatten die Magnete eine sehr verschiedene und recht bedeutende Schwächung an magnetischer Kraft erlitten.

Um auch beim Entmagnetisiren das Verhalten dieser Stahlstäbe kennen zu lernen, habe ich die Stromrichtung umgekehrt und die Entmagnetisirung von 6 Stück der längeren Stahlstäbe in derselben Spirale und bei denselben Stromintensitäten vorgenommen und die relativen permanenten magnetischen Momente in gleicher Weise und mit demselben Magnetometer bestimmt, wie beim Magnetisiren der Stäbe. Auch war bei diesen Messungen die Entfernung der Mittelpunkte der Stahlstäbe vom Mittelpunkte der Magnetometernadel wieder 100 cm, nur die Entfernung der Ablesescala vom Spiegel war etwas kleiner, dieselbe betrug 251 cm.

Die erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in welcher *J* und *M* wieder dieselbe Bedeutung haben, wie früher. Das negative Zeichen von *M* bedeutet die Umkehrung der magnetischen Polarität.

Sowohl das Ansteigen des permanenten magnetischen Momentes mit der magnetisirenden Kraft, als auch die Abnahme desselben beim Entmagnetisiren ist am besten aus den

| Stahlstäbe von 14,6 cm Länge | $J$ = 0 | 1 | 1,3 | 2,5 | 5,0 | 6,0 | 8,0 | 10,0 | 12,0 | 16,0 | 20,0 | 24,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Nickelchromstahl, $C_8$ | 200 | 165,4 | 149,5 | 75,3 | − 52 | − 90,85 | − 145,9 | − 183,5 | − 211,55 | − 226,75 | − 234,4 | − 234,5 |
| 2. Chromstahl, $C_3$ . . | 149,5 | 128,5 | 118,0 | 49,5 | − 61,5 | − 115,2 | − 133,65 | − 161,0 | − 177,4 | − 190,9 | − 193,1 | − 195,5 |
| 3. Nickelstahl, $N$ . . | 119,9 | 111,6 | 67,1 | 41,0 | − 59,25 | − 87,6 | − 121,5 | − 145,9 | − 159,3 | − 169,3 | − 174,8 | − 174,8 |
| 4. Kohlenstahl, $T_{10}$ . | 65,5 | 42,6 | 32,4 | − 2,6 | − 43,6 | − 53,6 | − 65,1 | − 75,8 | − 82,3 | − 86,6 | − 87,2 | − 87,7 |
| 5. Wolframstahl, $W_3$ . | 1,0 | − 1,5 | − 2,55 | − 8,5 | − 25,6 | − 30 | − 36,6 | − 42,3 | − 46 | − 50,2 | − 51,2 | − 51,6 |
| Hochprocentiger | | | | | | | | | | | | |
| 6. Manganstahl, $MM_2$ | 6,0 | 4,8 | 3,2 | − 6,5 | − 12,6 | − 13,5 | − 14 | − 15 | − 15,05 | − 16,05 | − 16,4 | − 16,4 |

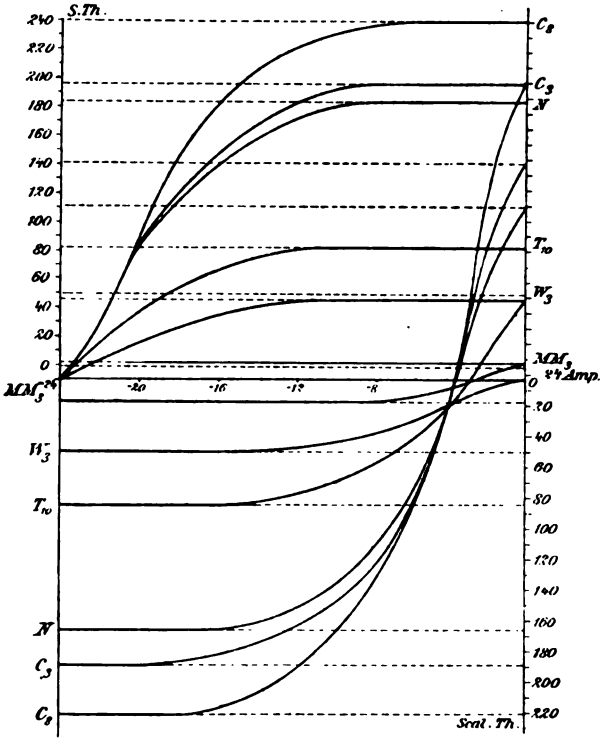
entsprechenden magnetischen Curven (vgl. die Figur) ersichtlich, bei deren Construction die Einheit (1 Amp.) der als Abscissen aufgetragenen Stromintensitäten durch vier Längeneinheiten (1 mm) und die Einheit der als Ordinaten aufgetragenen relativen magnetischen Momente (Scalenausschlag) durch 0,3 mm dargestellt ist. Die den einzelnen Stahlstäben entsprechenden magnetischen Curven sind mit den bereits angegebenen Fabriksmarken $C_8$, $C_3$, $N$ etc. bezeichnet.

Man ersieht: 1. dass die Curven beider Systeme der Magnetisirung und der Entmagnetisirung, einen ganz regelmässigen Verlauf nehmen und einen einzigen Wendepunkt haben. Bis zu diesem ist das Ansteigen des permanenten magnetischen Momentes ein stärkeres, als die Zunahme der magnetisirenden Kraft, während von diesem Punkte angefangen das Umgekehrte stattfindet und das Moment einem Maximalwerte sich nähert. Diesen erreichten die stärkeren Stahlmagnete $C_8$, $C_3$ und $N$ in der Nähe von 18 Amp., die schwächeren $T_{10}$, $W_3$ etwas früher und $MM_2$ schon bei einer Stromintensität von 10 Amp.

2. Den stärksten permanenten Magnetismus hatten $C_8$, $C_3$ und $N$ angenommen, den allerstärksten der Stab $C_8$ aus Nickelchromstahl, dessen Magnetismus auch den von $C_3$ und $N$ bedeutend überragt. Die

Curven dieser drei Stahlstäbe decken sich beinahe ganz bis etwas über ihre Wendepunkte hinaus.

3. Die zur Vernichtung der magnetischen Polaritäten nötigen entmagnetisirenden Kräfte waren bei sämtlichen Stahlstäben bedeutend kleiner, als die zur vollständigen Magnetisirung nötigen. So fand der Wechsel der Polarität des Nickel-




chromstahles $C_3$ bei $-3{,}75$ Amp., der vom Nickelstahl bei $-3{,}5$ Amp., der vom Kohlenstahl $T_{10}$ bei $-2{,}5$ Amp., und der vom Wolframstahl $W_3$ schon unter $-1$ Amp. statt. Bei fortgesetzter Magnetisirung im entgegengesetzten Sinne erreichten sämtliche Stahlstäbe nahezu die früheren Grenzwerte. So erreichte z. B. $C_8$ bei demselben Scalenabstand 257,7 cm, wie beim Magnetisiren, den Maximalwert von 242,2 Sct.; $C_3$ das Maximum von 197,7 Sct.

**Vergleichung der Remy'schen Wolframstahlmagnete mit diesen Stahlmagneten.**

Bei dem Vergleiche der permanenten magnetischen Momente des mit $W_3$ bezeichneten längeren Stabes aus Wolframstahl mit dem Momente eines aus Remy's Tiegelgussstahl-Fabrik bezogenen, gut gehärteten Wolframstahles von derselben Form und nahezu denselben Dimensionen ergab sich unter gleichen Verhältnissen als Maximalwert für $W_3$ ein Scalenausschlag von 54,6 Sct., für Remy's Stahl hingegen ein Scalenausschlag von 213,5 Sct. Das Gewicht von $W_3$ war 205,8 g, das vom Remy'schen Wolframstahl 212,1 g. Es ist also das auf 1 g reducirte permanente magnetische Moment des Remy'schen Wolframstahles 4 mal grösser, als das von $W_3$ aus der Resitzaer Stahlfabrik.

Ein anderer Stab aus Remy'schem Wolframstahl von denselben Dimensionen gab nach der Magnetisirung bis zum Grenzwerte einen Nadelausschlag von 321 Sct. Dieser überragte daher den Wolframstahl $W_3$ noch mehr, ja selbst den Nickelchromstahl $C_3$ an specifischem Magnetismus.

**Magnetisches Verhalten des Limonits.**

Aus einem grossen Limonitstück von sehr poröser Structur aus Rima-Murány in Oberungarn liess ich zwei vierseitige Stäbe von quadratischem Querschnitt mit 1,4 cm Seitenlänge schneiden, um dieselben auf ihr magnetisches Verhalten zu untersuchen. Der eine war 10 cm, der andere 14,6 cm lang.

Zu diesem Zwecke wurden die Stäbe in einer aus 3,5 mm dickem Kupferdraht angefertigten Spirale mit 671 Windungen und einer Länge von 27,25 cm der magnetisirenden Wirkung des elektrischen Stromes unterworfen und dann das permanente magnetische Moment derselben mittels eines empfindlichen Spiegelgalvanometers bestimmt.

Bei diesen Versuchen wurde die Stromstärke von 1 Amp. bis 24 Amp. gesteigert und bei jeder Stromintensität der Strom 5—6 Sec. lang geschlossen. Nach Oeffnung des Stromes wurden die Stäbe aus der Spirale entfernt, in ost-westliche Lage, 50 cm vom Magnetometer entfernt, gebracht und der Ausschlag der Magnetnadel mit Fernrohr und Scala beobachtet. Das

magnetische Moment ist dem in Scalenteilen ausgedrückten Nadelausschlag proportional.

Der kürzere Limonitstab hatte selbst bei Anwendung eines Stromes von 24 Amp., also in einem Magnetfelde von bedeutender Stärke keinen nachweisbaren permanenten Magnetismus angenommen. Der längere Stab gab bei 16 Amp. einen Ausschlag von nur 0,4 und bei 24 Amp. von nur 0,5 Sct. Es hatten also diese Limonitstäbe in einem solchen Magnetfelde, in welchem andere Eisenerze, wie Magnetit, Hämatit und Pyrrhotit ein ganz bedeutendes permanentes magnetisches Moment annehmen und ihren Maximalwert erreichen, kaum merklichen permanenten Magnetismus angenommen.

Dass jedoch der gesamte inducirte Magnetismus dieser Eisenerzstäbe selbst in nicht sehr starken magnetischen Feldern ein bedeutender ist, ergab sich daraus, dass der kürzere Limonitstab, nachdem er nach Faraday's Methode mittels Coconfäden zwischen den Polen eines Elektromagneten aufgehängt wurde, unter der Wirkung des Elektromagneten nach einigen Schwingungen sich in die axiale Richtung einstellte. Schon bei einer Stromstärke von 1 Amp. wurde durch den Elektromagnet in dem Limonitstab so viel Magnetismus inducirt, dass der Stab sogleich sich axial einstellte und um diese Lage herum schnelle Schwingungen vollbrachte mit einer Schwingungsdauer von 2,65 Sec.

Der Limonit, dessen chemische Zusammensetzung

$$H_6Fe_4O_9 = 2Fe_2O_3 + 3H_2O,$$

entsteht aus dem Hämatit durch Aufnahme von Wasser. Ich fand, dass je mehr dieser Umwandlungsprocess des Hämatits fortgeschritten war, um so geringer war auch der permanente Magnetismus, während reiner Hämatit ein ganz beträchtliches permanentes magnetisches Moment annimmt.[1])

1) A. Abt, Med.-naturw. Berichte (Értesitő) des Siebenbürg. Mus.-Ver. II. naturw. Abt. 20. p. 80. 1898; Wied. Ann. 68. p. 658. 1899.

(Eingegangen 11. October 1901.)

## 7. *Magnetische Drehung der Polarisationsebene innerhalb eines Absorptionsstreifens;* *von W. Voigt.*

Ueber den in der Ueberschrift genannten Gegenstand sind kürzlich zwei Experimentaluntersuchungen erschienen, deren Verfasser sich der Theorie gegenüber ausserordentlich ablehnend verhalten. Die erste bezügliche Abhandlung[1]) beginnt mit den Worten: „Da eine vollständige Erklärung der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes noch nicht gegeben ist, giebt es auch keine Formel für die Grösse des Drehungswinkels, welche mit der Erfahrung völlig im Einklang steht“ und die zweite[2]) bezeichnet die erhaltenen Resultate „als von grossem Interesse, weil dieselben sich im Widerspruch mit dem Resultate jeder Theorie befinden“.

Ich werde im Folgenden zeigen, dass die von mir entwickelten allgemeinen Formeln[3]) für die magneto-optischen Erscheinungen die von beiden Autoren beobachteten Thatsachen in sich enthalten.

1. Für isotrope Medien von mässiger Absorption und für Wellen, die sich parallel den Kraftlinien des Magnetfeldes fortpflanzen, stellt sich nach der bisher überall bewährten, *einfachsten* Theorie, welche Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Elektronen nicht in Rechnung setzt, das Quadrat des Brechungsindex in folgender Form dar[4]):

$$(1) \qquad n_{\pm}^2 = 1 + \sum \frac{\varepsilon_h \vartheta^2 (\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2} \pm c_h R \vartheta)}{(\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2} \pm c_h R \vartheta)^2 + \vartheta_h'^2 \vartheta^2}.$$

Hierin sind $\vartheta_h^o$, $\vartheta_h'$, $\varepsilon_h$, $c_h$ dem Medium und einem bestimmten Absorptionsstreifen individuelle Parameter, $\tau = 2\pi\vartheta$

1) A. Schmauss, Ann. d. Phys. **2.** p. 280. 1900.
2) O. M. Corbino, Rend. Linc. **10.** p. 137. 1901.
3) W. Voigt, Wied. Ann. **67.** p. 345. 1899.
4) W. Voigt, l. c. p. 349. Formel 16.

ist die Schwingungsperiode, $R$ die Feldstärke; das obere Vorzeichen bezieht sich auf die positiv, das untere auf die negativ rotirende Welle.

Wir betrachten nun eine linear polarisirte Welle mit der Amplitude $a$, die auf eine Schicht des betrachteten activen Mediums von der Dicke $l$ auffällt. $\omega_+$ und $\omega_-$ seien die Geschwindigkeiten der + und − rotirenden Welle in der Schicht, $\sigma_+$ und $\sigma_-$ ihre Schwächungen beim Durchtritt infolge der Absorption. Dann ist die austretende Welle zerlegbar in zwei normal zu einander linear polarisirte; die Schwingung der einen von der Amplitude $a(\sigma_+ + \sigma_-)$ ist um den Winkel

$$\chi = \frac{\pi l}{\tau}\left(\frac{1}{\omega_-} - \frac{1}{\omega_+}\right), \tag{2}$$

die der anderen mit der Amplitude $a(\sigma_+ - \sigma_-)$ aber um den Winkel $\chi + \frac{1}{2}\pi$ gegen die Richtung der einfallenden Schwingung gedreht; ihre Phasendifferenz ist $\frac{1}{2}\pi$, sie setzen sich also zu elliptisch polarisirtem Lichte mit den Hauptaxen $a(\sigma_+ + \sigma_-)$ und $a(\sigma_+ - \sigma_-)$ zusammen.

In einem Polariskop aufgefangen geben beide complementäre Erscheinungen; eine merkliche Wirkung wird also nur zu beobachten sein, wenn $|\sigma_+ + \sigma_-|$ erheblich grösser ist, als $|\sigma_+ - \sigma_-|$, d. h., wenn die Schwächung der beiden Wellen nicht allzu verschieden ist.

Ist, wie in Wirklichkeit immer, $\omega_+$ sehr nahe gleich $\omega_-$, so kann man Formel (2) auch schreiben

$$\chi = \frac{l}{4\vartheta v n}(n_-^2 - n_+^2), \tag{3}$$

unter $v$ die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, unter $n$ einen mittleren Wert des Brechungsindex verstanden.

Setzt man in diesen Ausdruck die Werte $n_-^2$ und $n_+^2$ aus (1) ein, so erhält man:

$$4)\quad \chi = \frac{l\vartheta^2}{2vn}\sum \varepsilon_h c_h R \frac{(\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2})^2 - c_h^2 R^2 \vartheta^2 - \vartheta_h'^2 \vartheta^2}{\left((\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2})^2 + c_h^2 R^2 \vartheta^2 + \vartheta_h'^2 \vartheta^2\right)^2 - 4(\vartheta^2 - \vartheta_h^{o2})^2 c_h^2 R^2 \vartheta^2}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass das Medium deutlich getrennte Absorptionsstreifen besitzt, und das Bereich *eines*

von ihnen, dessen Parameter $\vartheta_o$, $\vartheta_,$, $\varepsilon$, $c$ sein mögen, betrachten. Dann lässt sich die letzte Formel schreiben

$$(5)\quad \left\{ \chi = \frac{l\vartheta^2 R}{2vn}\left[ \frac{\varepsilon c\left((\vartheta^2-\vartheta_o^2)^2 - c^2R^2\vartheta^2 - \vartheta_,^2\vartheta^2\right)}{\left((\vartheta^2-\vartheta_o^2)^2 + c^2R^2\vartheta^2 + \vartheta_,^2\vartheta^2\right)^2 - 4(\vartheta^2-\vartheta_o^2)^2 c^2R^2\vartheta^2} + \sum \frac{\varepsilon_k c_k}{(\vartheta^2-\vartheta_k^{o2})^2}\right], \right.$$

wo nun die Summe über die *anderen* Absorptionsstreifen zu erstrecken ist. Die Drehung $\chi$ stellt sich hiernach dar als die Superposition der Drehungen, die von dem ausgewählten Streifen ($o$) und den übrigen ($k$) herrührt. Wir unterwerfen der näheren Betrachtung nur den *ersteren* Teil $\chi_o$, der innerhalb des Streifens ($o$) erheblich variirt, während der letztere Teil dort im allgemeinen nur kleine Aenderungen erleidet.

2. Führen wir eine neue Variable $\Delta$ durch die Beziehung

$$(6)\qquad \vartheta^2 - \vartheta_o^2 = \Delta\vartheta\vartheta_,$$

ein, so wird der Ausdruck für $\chi_o$ einfacher

$$(7)\qquad \chi_o = \frac{lRec}{2vn}\cdot\frac{\Delta^2\vartheta_,^2 - c^2R^2 - \vartheta_,^2}{(\Delta^2\vartheta_,^2 + c^2R^2 + \vartheta_,^2)^2 - 4\Delta^2c^2R^2\vartheta_,^2}.$$

$\vartheta_o$ ist durch die Substitution vollständig herausgefallen; man beseitigt (abgesehen von dem constanten Factor) auch $\vartheta_,$, wenn man $cR/\vartheta_, = P$ setzt, also schreibt

$$(8)\qquad n\chi_o = kP\frac{\Delta^2 - P^2 - 1}{(\Delta^2 + P^2 + 1)^2 - 4\Delta^2P^2},$$

wobei $l\varepsilon/2v\vartheta_, = k$ gesetzt ist.

Unterwirft man schliesslich noch $n\chi_o$ statt $\chi_o$ selbst der Betrachtung, so hat man ein relativ einfaches Problem vor sich. Solange es sich nur um *qualitative* Resultate handelt, kann die Veränderlichkeit von $n$ innerhalb eines Absorptionsstreifens bei den Medien, auf die unsere Formeln hier angewendet werden sollen, ignorirt werden.

Aus Formel (8) ergeben sich nun folgende Resultate.

Für $\Delta^2 = P^2 + 1$ ist $n\chi_o = 0$; für $\Delta = 0$ und für $\Delta^2 = P^2 + 1 \pm 2\sqrt{P^2+1}$ erreicht $n\chi_o$ Maxima oder Minima, deren Werte bez. sind

$$(9)\qquad n\chi_o = -kP/(P^2+1)$$

und

$$(10)\qquad n\chi_o = -\frac{\pm kP}{4(\sqrt{P^2+1})\pm 1}.$$

Ist $\sqrt{P^2+1} < 2$, d. h. $P^2 < 3$, so giebt nur das obere Zeichen in dem Ausdruck für $\Delta^2$ reelle Werte von $\Delta$; hier ist also

$$(n\chi_o)_1 = -kP/(P^2+1) \text{ der Minimalwert,}$$

$$(n\chi_o)_2 = +kP/(4\sqrt{P^2+1}+1) \text{ der Maximalwert.}$$

Ist dagegen $\sqrt{P^2+1} > 2$, d. h. $P^2 > 3$, so gelten in dem Werte von $\Delta^2$ beide Vorzeichen, und es wird

$$(n\chi_o)_1 = -kP/(P^2+1) \text{ ein Maximalwert,}$$

$$(n\chi_o)_3 = -kP/4(\sqrt{P^2+1}-1) \text{ ein Minimalwert,}$$

$$(n\chi_o)_2 = +kP/4(\sqrt{P^2+1}+1) \text{ ein Maximalwert.}$$

Keiner dieser Werte ist der Feldstärke proportional; $(n\chi_o)_1$ nimmt (absolut genommen) mit wachsender Feldstärke zu, solange $P < 1$ ist, dann (und zwar schliesslich bis zu Null) wieder ab.[1]) $(n\chi_o)_2$ nimmt dauernd, aber mit stark abnehmender Geschwindigkeit zu, $(n\chi_o)_3$ innerhalb des Gültigkeitsbereiches ab.

Berücksichtigt man noch, dass $n\chi_o$ mit unendlich wachsendem $\Delta$ zu Null abnimmt, so kann man sich von dem Verlauf dieser Function bei Zugrundelegung des Argumentes $\Delta$ leicht eine deutliche Vorstellung machen. Der Uebergang zu $\vartheta$ geschieht dann durch die Beziehung

$$\Delta = \frac{1}{\vartheta_r}\left(\vartheta - \frac{\vartheta_o^2}{\vartheta}\right).$$

Da

$$\frac{d\Delta}{d\vartheta} = \frac{1}{\vartheta_r}\left(1 + \frac{\vartheta_o^2}{\vartheta^2}\right) \tag{11}$$

nirgends verschwindet, treten beim Uebergang zur Variabeln $\vartheta$ keine neuen Maxima und Minima auf; die Curve für $n\chi_o$ wird nur parallel der Abscissenaxe ungleichförmig gereckt, bez. zusammengedrängt.

Besonders einfache Beziehungen ergeben sich in dem wichtigen Fall, dass die Ausdehnung des betrachteten Be-

---

1) Welche Folgerungen dieser Wert gestattet, ist l. c. p. 354 auseinandergesetzt. Dort ist übrigens, da es sich bei dem abzuleitenden Satz nur um den absoluten Wert von $\chi_o$ handelt, das negative Vorzeichen fortgelassen.

reiches, d. h. also die Breite des Absorptionsstreifens klein gegen die Constante $\vartheta_0$ ist. Setzt man dann

$$\vartheta - \vartheta_0 = \delta \tag{12}$$

und vernachlässigt $\delta$ neben $\vartheta_0$, so erhält man

$$\vartheta^2 - \vartheta_0^2 = 2\,\delta\,\vartheta_0, \text{ d. h. } 2\,\delta = \Delta\,\vartheta_0; \tag{13}$$

hier ist also $\Delta$ einfach mit $\delta$ proportional, und die Curve für $n\chi_0$ kann bei geeignet gewählten Einheiten sogleich auf das Argument $\delta$ bez. $\vartheta$ angewandt werden.

Wegen unten zu ziehender Folgerungen habe ich einige Curven für $n\chi_0$ construirt, welche den Verlauf der Function mit wechselndem $\Delta$ und $P$ erkennen lassen (vgl. Fig. 1). Die Einheiten von $\Delta$ sind die Elemente des gezeichneten Netzes ($= \frac{3}{4}$ cm); $k$ ist gleich Eins gewählt, und als Einheit für $n\chi_0$ ist die Länge von zwei Netzelementen genommen. Die vertical eingezeichneten punktirten Linien geben die ungefähre Lage der *Maxima* der Absorption, die nach dem Zeemaneffect mit wachsender Feldstärke auseinanderrücken. Die Breite der Absorptionsstreifen kann dabei je nach Umständen ausserordentlich verschieden sein; bei schmalen Streifen wird ihre Zerlegung durch das Magnetfeld in zwei getrennte (Zeeman'sches Duplet) erreichbar sein, bei breiten wird sich auch nicht einmal eine Andeutung davon zeigen.

Nach rechts und links fortgesetzt nähern sich die Curven asymptotisch der $\Delta$-Axe.

3. Hr. Schmauss hat nach der etwas verfeinerten Broch'schen Methode sehr verdünnte Lösungen von Fuchsin, Cyanin, Eosin und Naphtalinrot der Beobachtung unterworfen; die Absorption war dabei so schwach, dass eine Messung der Drehung selbst innerhalb der Absorptionsstreifen möglich war. Er stellt seine Resultate durch Curven dar, bei denen als Abscissen die Ablenkungswinkel der untersuchten Farbe in dem benutzten Prisma, als Ordinaten die gemessenen Drehungswinkel dienen. Ist schon durch die unbequeme Abscisse eine quantitative Verwertung seiner Resultate erschwert, so noch mehr durch den Umstand, dass ausserordentlich wichtige Teile der Curven nur nach Vermutung ohne Benutzung einer Beobachtung gezogen sind. Ferner ist ungünstig, dass alle die

beobachteten Farbstoffe zwei breite und einander sehr nahe Absorptionsstreifen besitzen, deren Wirkungen in dem Zwischenbereiche nicht zu trennen sind. Dagegen ist die Wirkung des Lösungsmittels bequem zu eliminiren, da der Autor dessen

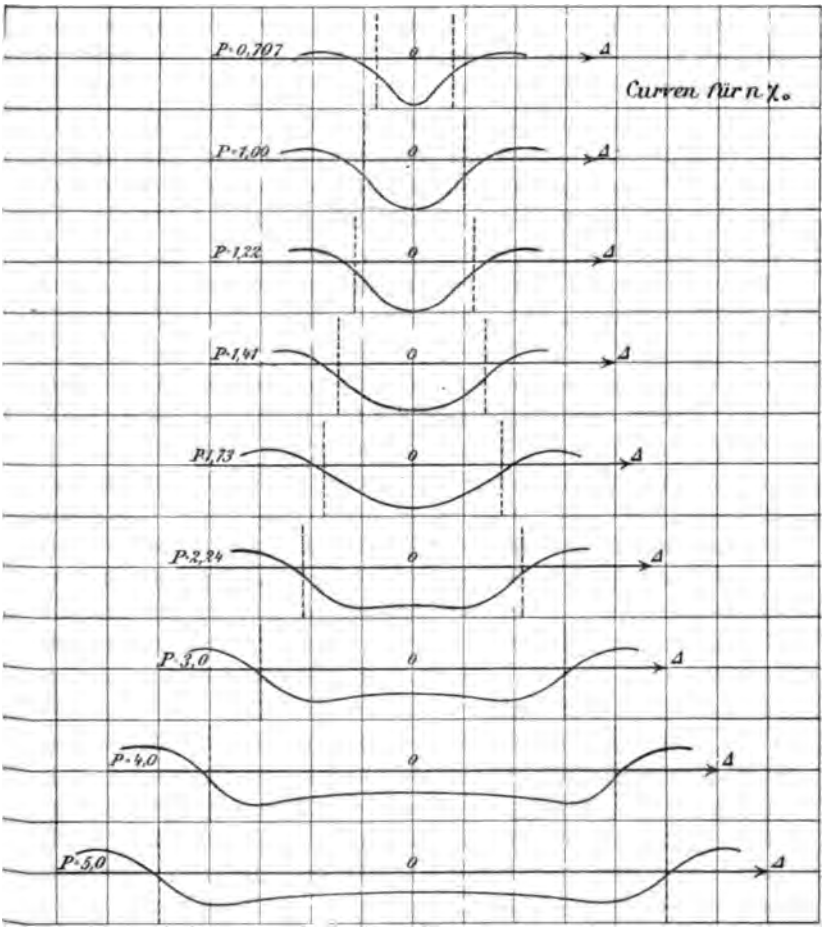



Fig. 1.

Drehung gleichfalls graphisch dargestellt hat. Nach dem p. 786 Gesagten hat man nur die Ordinaten der letzteren Curve von denen der Curve für eine der Lösungen abzuziehen, um diese Elimination auszuführen. Verfährt man so und bedenkt, dass

die Curven auf p. 789 $n\chi_0$ darstellen und $\Delta$ als Abscissen voraussetzen, die Schmauss'schen aber $\chi_0$ und zwar mit einer ganz anderen Abscisse wiedergeben, so wird man zugeben müssen, dass der Verlauf der beiden Curvenarten im Bereiche eines Absorptionsstreifens durchaus übereinstimmt. Dass die Elongationen nach unten bei Schmauss etwas klein erscheinen, hat kein Gewicht, da gerade sie *sämtlich* nur nach Vermutung ausgezogen sind.

Auffallend erscheint bei den Schmauss'schen Resultaten der erhebliche Abstand der beiden, demselben Absorptionsstreifen entsprechenden *Nullstellen* für $\chi_0$; man möchte daraus zunächst auf eine ganz ausserordentliche Grösse des Zeemaneffectes schliessen, die der geringen Drehung zu widersprechen scheint. Indessen würde ein solcher Schluss irrig sein. Die Nullstellen von $\chi_0$ sind nach p. 786 gegeben durch $\Delta^2 = P^2 + 1$, die Stellen stärkster Absorption *angenähert* durch $\Delta = P$.[1] Die Nullstellen besitzen also auch bei beliebig kleiner Feldwirkung einen endlichen, durch die Parameter des Absorptionsstreifens bestimmten Abstand, während der Abstand der Absorptionsmaxima mit verschwindender Feldstärke selbst verschwindet.

Es mag darauf hingewiesen werden, dass in Zusammenhang hiermit die ersten Curven der Fig. 1 auf p. 789 für die Nullstellen erheblich grössere Abstände zeigen, als für die Absorptionsmaxima. Dabei handelt es sich aber hier noch um ziemlich *grosse* $P$; bei abnehmender Feldwirkung wird der Unterschied immer stärker.

4. Die von Hrn. Corbino angewendete Methode stimmt im Princip genau mit derjenigen überein, die mich seiner Zeit zum Nachweis der Doppelbrechung des Natriumdampfes in der Richtung normal zu den Kraftlinien des Feldes führte.[2] Hr. Corbino erzeugt mit Hülfe eines Quarzkeilsystems mit horizontalen Keilkanten im Spectrum horizontale Interferenzstreifen und beobachtet deren Deformation in dem Bereich der Absorption bei Einwirkung eines Magnetfeldes auf den von der Welle durchsetzten (sehr dichten) Natriumdampf.

---

1) W. Voigt, l. c. p. 351.
2) W. Voigt, l. c. p. 359.

Er findet dann zu beiden Seiten jeder der durch das Magnetfeld verbreiterten $D$-Linien eine mit abnehmender Entfernung von dieser schnell wachsende Ausbiegung der Streifen nach *derselben* Seite — sagen wir nach *oben* —, was nur eine neue Darstellungsart des alten Macaluso-Corbino'schen Resultates ist.[1]) *Innerhalb* des Absorptionsstreifens bemerkt er aber — und dies ist das Neue — *zunächst den Rändern überhaupt keine Interferenzstreifen, nahe der Mitte dagegen einen horizontal verlaufenden Abschnitt eines solchen, der durch die Feldwirkung anscheinend nur wenig und zwar gleichfalls nach oben verschoben ist.* Die gesamte Erscheinung stellte sich also so dar, wie die schematische Fig. 2 verdeutlicht.

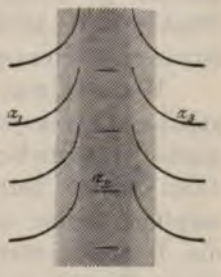


Fig. 2.

Es ist nun aber leicht zu erkennen, dass genau ebenso die bei der benutzten Anordnung von der Theorie geforderte Erscheinung verläuft. Dabei ist daran zu erinnern, dass es sich hier um sehr schmale Streifen handelt, $\Delta$ also mit $\delta$ (vgl. Formel (13) proportional ist und die Curven in der Fig. 1 p. 789 direct den Verlauf der Interferenzstreifen bei dem Corbino'schen Experiment, natürlich parallel der $\Delta$-Axe ungemein auseinander gerückt, darstellen. Nahe den Rändern des Absorptionsstreifens wird je die eine Welle stark, die andere sehr wenig absorbirt; hier können Interferenzstreifen überhaupt nicht zu stande kommen — die äusseren und die inneren Streifen entbehren somit also auch nach der Theorie der sichtbaren Verbindung.

Wie wird nun ein von der Theorie nicht geleiteter Beobachter verfahren, um für die inneren Streifen den Sinn der Verschiebung und den Zusammenhang mit den äusseren Streifen festzustellen? Er wird die Feldstärke variiren, und wenn dann die Dislocation innen und aussen im gleichen Sinne stattfindet, wird er die *ganzen* Verschiebungen als gleichsinnig beurteilen. Wenn ausserdem die inneren Streifen etwa ebenso langsam wandern, wie Teile der benachbarten äusseren, wird er sie als deren Fortsetzung in den Absorptionsstreifen hinein

1) D. Macaluso u. O. M. Corbino, Compt. rend. **127**. p. 548. 1898.

ansehen. So ist offenbar Hr. Corbino zu seiner Deutung der Thatsachen gekommen.

Aber die Theorie ergiebt, dass eine solche Schlussreihe nicht berechtigt ist. Wir haben oben dargethan, dass die im Innern der Absorptionsstreifen stattfindende *negative* Drehung bei wachsender Feldstärke *abnimmt. Die Bewegung nach oben ist also mit einer Ablenkung nach unten vereinbar.* Hieraus ergiebt sich weiter, dass in der obigen Fig. 2 nicht die unmittelbar benachbarten Streifenfragmente zusammengehören, sondern zu einem Paar äusserer ein *tiefer* liegendes inneres Stück. Z. B. können die Stücke $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ demselben Interferenzstreifen entsprechen.

Beachtet man dies, so erkennt man, dass das p. 789 mitgeteilte Curvensystem die Corbino'sche Beobachtung ganz genau wiedergiebt; man hat sich nur um die punktirten verticalen Linien herum in angemessener Ausdehnung die Absorptionsstreifen in *solcher* Intensität zu denken, dass dort die Interferenzstreifen nicht zu stande kommen. Ist z. B. dieses Bereich in dem Maassstabe der Fig. 1 für jeden der beiden Streifen 2 cm breit, so wird die erste Andeutung der inneren Streifen bei $P = 1{,}22$ erscheinen; bei wachsender Feldstärke rücken die inneren Streifen sehr langsam nach oben, indem sie gleichzeitig an seitlicher Ausdehnung gewinnen. Dass sie dabei merklich *geradlinig* bleiben, zeigen die den höheren Feldstärken entsprechenden Figuren in ausgezeichneter Weise.

Mir scheint: *statt zu widerlegen, bestätigen die Corbino'schen Beobachtungen die Theorie in einer neuen Richtung.* —

Abschliessend möge noch die folgende Bemerkung gemacht werden. Wie über das Gesetz der Drehung, so findet sich über dasjenige der Dispersion hier und da noch immer die Behauptung, dasselbe sei bisher noch nicht gefunden. Hier dürfte ein Missverständnis vorliegen. Alle Anzeichen sprechen dafür, dass beide Gesetze bekannt sind. Aber es liegt die praktische Schwierigkeit vor, dass die betreffenden Formeln Parameter enthalten, die den einzelnen Absorptionsstreifen individuell sind, und deren Bestimmung unsicher bleibt, solange man nicht das Bereich aller Absorptionsstreifen selbst der Beobachtung unterziehen kann. Es erscheint nach der Erfahrung

unzweifelhaft, dass für ein Medium, dessen sämtlichen Absorptionsstreifen man beikommen kann, die Gesetze der Dispersion und der Drehung mit jeder beliebigen Genauigkeit ausgesprochen werden können. Natürlich ist es aber eine unerfüllbare Anforderung, Erscheinungen, die factisch von einer sehr grossen Zahl von Parametern abhängen, auch nur in einem mässigen Bereich durch eine zwei- oder dreiconstantige Interpolationsformel *streng* darstellen zu wollen.

Göttingen, Anfang October 1901.

(Eingegangen 8. October 1901.)

## 8. *Elektrometrische Untersuchungen über unipolare Induction;* *von O. Grotrian.*

Die Vorstellungen über die Vorgänge bei der unipolaren Induction gehen bekanntlich weit auseinander, und ein strenger, jeden Einwand ausschliessender Beweis für die Richtigkeit der einen oder der anderen Anschauung ist bis jetzt nicht geliefert trotz der vielen über den Gegenstand erschienenen zum Teil höchst wertvollen Arbeiten.

Die Frage nach dem Sitze der elektromotorischen Kraft berührt den Inductionsvorgang und die Grundvorstellung über das Wesen des Magnetismus aufs innigste. Sie kann, wie zuerst Beer[1]) hervorgehoben hat, entschieden werden, wenn es gelingt, das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von elektrischen Spannungen auf dem rotirenden Magneten nachzuweisen. Vorausgesetzt ist dabei, dass eine äussere Leitung nicht vorhanden ist. Daran zu schliessen sind Versuche, welche sich auf etwa vorhandene Spannungen in äusseren Leitern beziehen, welche mit dem Magneten in gar keiner Verbindung stehen.

Neben ihrer rein physikalischen Bedeutung ist die Frage nach Plücker's Ausführungen[2]) von hohem Interesse in Bezug auf die Inductionsvorgänge, welche vielleicht infolge der Erdrotation eintreten. Dass endlich die genaue Kenntnis der Vorgänge bei der unipolaren Induction auch für die Elektrotechnik von Bedeutung ist, beweisen die Versuche, Unipolarmaschinen, also Maschinen ohne Collector, für den Grossbetrieb zu construiren. Ein nennenswerter technischer Erfolg ist allerdings in dieser Richtung wegen der Kleinheit der erzielten elektromotorischen Kräfte bisher nicht zu verzeichnen gewesen.

1) A. Beer, Pogg. Ann. **94.** p. 191—192. 1855.
2) J. Plücker, Pogg. Ann. **87.** p. 357—358. 1852.

### Die Versuchsanordnung.

Seit etwa $1\,^1/_2$ Jahren habe ich mich mit der Frage beschäftigt, ob sich im offenen Kreise einer in Betrieb gesetzten Unipolarmaschine freie durch Induction entstandene Elektricität nachweisen lasse. Die experimentelle Beantwortung dieser Frage mag bereits mancher versucht haben; jedoch ist mir bis jetzt ein positives, die Frage bejahendes Resultat nicht bekannt geworden.[1])

Die zu den Versuchen benutzte Maschine ist eine solche gewöhnlicher Art. Der rotirende Teil wird durch einen massiven Stahlcylinder $NS$ gebildet (vgl. Fig. 1), dessen durch Messingteile verlängerte Enden in den Spitzen der Schrauben $ZZ_1$ laufen. Derselbe war im abgedrehten und gehärteten Zustande in der hiesigen Maschinenfabrik von Fritz Scheibler mit Smirgelscheiben genau cylindrisch abgeschliffen, sodass jede durch das Härten entstandene Excentricität beseitigt und ein ruhiger Lauf erreicht war. An die Mitte und an die verlängerten Enden kann die äussere Leitung unter Vermittelung von messingenen Schleifringen $M$, $R_n$, $R_s$ und Schleiffedern aus Phosphorbronze angelegt werden. Die Halter der Schleiffedern sowie die Messingstücke, welche die Spitzschrauben $ZZ_1$ tragen, sind gegen das hölzerne Fundament durch 2 cm dicke Hartgummiunterlagen isolirt. Der Antrieb erfolgte durch einen elektrischen Motor mittels einer um die messingene Schnurscheibe $K$ gelegten Lederschnur $L$.

Bei den Versuchen war die Mitte $M$ an das eine Quadrantenpaar $Q_1$ eines Elektrometers angelegt, während ein äusserer Schleifring oder auch beide mit dem anderen Quadrantenpaare $Q_2$ in Verbindung standen. Letzteres war meistens der Fall, wobei $R_n$ und $R_s$ durch einen kurzen Draht verbunden waren, an den sich die nach $Q_2$ führende Leitung anschloss.

Das eine Quadrantenpaar $Q_1$ war zur Erde abgeleitet. Die Entfernung zwischen dem Elektrometer und der Maschine betrug ungefähr 200 cm. Die von der Maschine zum Elektro-

---

1) E. Hoppe (Wied. Ann. 29. p. 551—552. 1886) kommt bezüglich der Frage zu einem durchaus negativen Resultate.

meter geführten Drähte ruhten dort, wo eine Unterstützung erforderlich war, auf Paraffinklötzen. An den übrigen Stellen gingen sie frei durch die Luft. Ihre Enden waren nicht direct

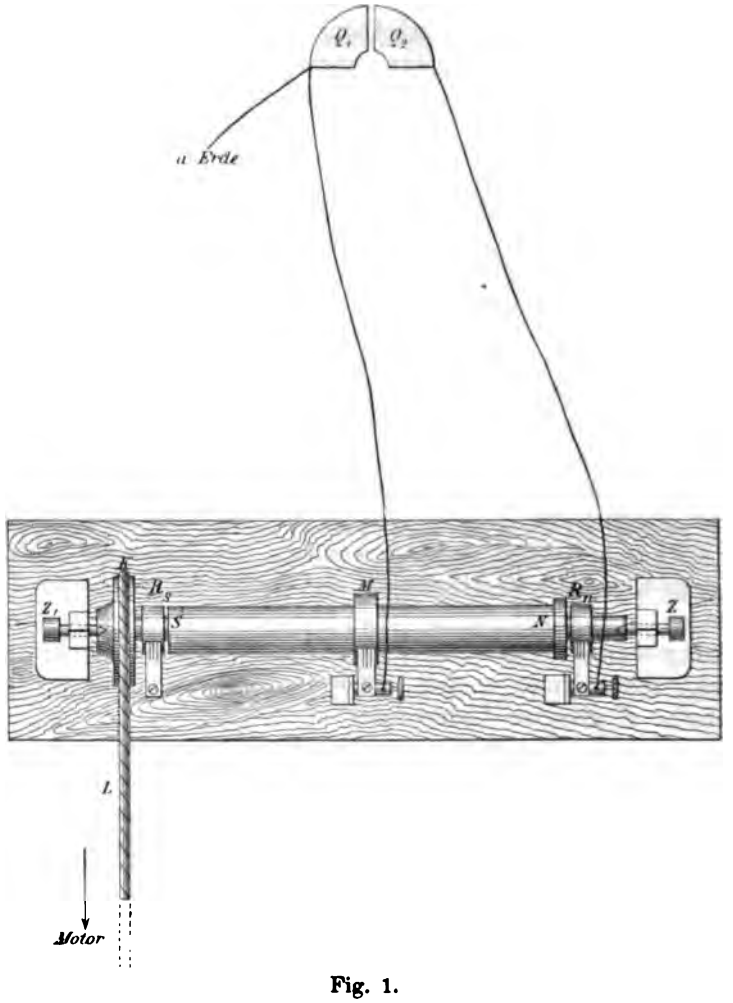



Fig. 1.

an das Elektrometer angelegt, sondern konnten durch eine Schaltvorrichtung mit den Enden feiner an das Elektrometer angeklemmter Drähte verbunden werden, welch letztere an einzelnen Stellen von Schellacksäulchen getragen wurden.

Die etwaigen Umschaltungen wurden mittels einer Vorrichtung bewirkt, welche im wesentlichen aus einem Paraffinklotz besteht, in den mit Quecksilber gefüllte Fingerhüte eingesenkt sind. In letztere tauchten die Drahtenden ein. Die Verbindung derselben wurde durch Platinbügel bewirkt, die durch Schellackgriffe isolirt waren.[1])

Bei der zu erwartenden Kleinheit etwa auftretender Potentialdifferenzen im offenen Kreise war man darauf bedacht, diese sowie die Empfindlichkeit des Elektrometers mit allen zur Verfügung stehenden Hülfsmitteln zu steigern. Demnach wurde der Motor mit einer genügend grossen Schnurscheibe versehen. Der Durchmesser derselben ist ca. gleich 29 cm, während derjenige der Schnurscheibe auf der Magnetaxe rund 9 cm beträgt. Der vom Strome der städtischen Centrale angetriebene Motor kann mit 3000 Touren pro Minute laufen. Indessen war die Anwendung dieser hohen Umlaufsgeschwindigkeit unthunlich, da sonst Gefahr entstand, dass der Magnet aus den Spitzenlagern herausgeschleudert wurde. Bei den meisten Versuchen machte der Motor 500—600 Umläufe (pro Min.). Dem entspricht eine Umlaufszahl des Magneten gleich etwa 1700—2000.

Bei den Versuchen wurde zunächst ein Thomson-Mascart'sches Quadrantelektrometer benutzt, dessen Empfindlichkeit man durch eine Hülfsladung von hohem Potential möglichst gross zu machen suchte. Die Hülfsladung wurde zunächst durch eine Wasserbatterie von 200 Elementen erzeugt. Man suchte dieselbe gelegentlich zu steigern durch Zuschaltung einer Zamboni'schen Säule, sowie auch durch Verwendung von Leydener Flaschen. Das Mittel, möglichst hohe Empfindlichkeit durch Näherung der Suspensionsfäden zu erzielen, blieb ebenfalls nicht unversucht.

Die unter diesen Verhältnissen angestellten Beobachtungen ergaben Messresultate, welche ihrer Kleinheit wegen als nichts Sicheres beweisend anzusehen waren. Dabei entging es mir aber nicht, dass der Sinn der minimalen Elektrometerausschläge in vielen Fällen auch bei wechselnder Rotationsrich-

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 9. Aufl. p. 511.

tung der richtige war derart, dass bei einer Rotation im Sinne der Ampère'schen Ströme oder entgegengesetzt eine elektromotorische Kraft entsteht, welche auf den Magneten bezogen in der Richtung von den Polen nach der Mitte hin wirkt und umgekehrt.

Obwohl diese Thatsache einen wichtigen Fingerzeig für weitere Untersuchungen enthält, machte ich mich bereits mit dem Gedanken vertraut, die Versuche ruhen zu lassen, da trotz aller versuchten Mittel nichts Zuverlässiges zu erkennen war. Diese Sachlage erfuhr aber eine wesentliche Aenderung infolge einer zunächst in den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erschienenen Mitteilung von Dolezalek[1]), in welcher dieser ein von ihm construirtes höchst empfindliches Quadrantelektrometer beschreibt. Die Flüssigkeitsreibung fällt in demselben gänzlich fort. Man hat dieses dadurch erreicht, dass die Nadel an einem äusserst feinen Quarzfaden aufgehängt ist, der zugleich zur Zuführung der Hülfsladung dient. Zu dem Zweck wird derselbe an der Oberfläche leitend gemacht durch Eintauchen in die Lösung einer stark hygroskopischen Substanz (Chlorcalcium u. a.). Die geringe Spur auf dem Faden zurückbleibender Substanz bewirkt, dass die Oberfläche des ersteren niemals ganz trocken wird und daher schwach leitend bleibt. Die Nadel ist aus Silberpapier, trotzdem aber genügend stabil, hergestellt und infolge dessen ausserordentlich leicht. Dieselbe besitzt infolge ihrer Form den Vorteil einer grossen Luftreibung, sodass jede weitere Dämpfungsvorrichtung entbehrlich erscheint. Ueber die Grösse der Empfindlichkeit geben die weiter unten mitgeteilten Tabellen sowie Dolezalek's eigene Angaben näheren Aufschluss.

Die Kenntnisnahme von der Construction dieses Instrumentes veranlasste mich zur baldigen Anschaffung desselben. Hr. Mechaniker Bartels in Göttingen hat dasselbe in bester Ausführung an das hiesige elektrotechnische Institut geliefert.

Die Beobachtungen mit diesem Instrumente haben es mir möglich gemacht, das Vorhandensein freier Elektricität im

---

1) F. Dolezalek, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. p. 18. 1901.

offenen Unipolarkreise nachzuweisen und die entsprechenden Potentiale zu messen.

Die Verbindung der Apparate miteinander war im wesentlichen die in Fig. 1 dargestellte, wobei die Hülfsladung der Nadel durch mehrere Wasserbatterien von im ganzen 250 Elementen, deren eines Ende zur Erde abgeleitet war, bewirkt wurde. Die an die Maschine angeschlossene Leitung war in der früher beschriebenen Weise mit den Quadrantenpaaren $Q_1$ und $Q_2$ verbunden, von denen $Q_1$ an Erde lag. Die Metallhülle des Instrumentes war gleichfalls zur Erde abgeleitet.

### Die Messungen.

Die maassgebenden Versuche und Messungen wurden derartig angestellt, dass die Scalenablesungen während der Rotation des Magneten auch bei commutirten Enden der Leitung, ausserdem aber namentlich bei geänderter Drehrichtung vorgenommen wurden. Die Tourenzahlen für beide Umlaufsrichtungen, die meistens etwas verschieden ausfielen, wurden mittels eines Tachometers aus der Fabrik von Buss, Sombart & Co. in Magdeburg bestimmt. Die Messung erfolgte am Motor, da der in Spitzen laufende Magnet die Anlegung des Tachometers nicht zuliess.

Der Gang der Beobachtungen wird am besten durch Mitteilung einer vollständigen Beobachtungsreihe verdeutlicht, wie dieses durch die folgende Tab. I geschieht.

Tabelle I.

| | Magnet | | | | | Mittel | | $Q_1\,Q_2\,a\,.\,E$ | | $v$ (Motor) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ruh. | ↘ | ruh. | ↘ | ruh. | ruh. | ↘ | Mittel | beob. | |
| $R_n\,R_s\,a.\,Q_2$ | 3,8 | 14,2 | 3,3 | 14,2 | 3,5 | 3,5 | 14,2 | 3,9 | 4,2 | |
| $M.\,a.\,Q_2$ | 3,3 | −7,0 | 3,9 | −6,2 | 4,2 | 3,8 | −6,6 | 4,1 | 3,7 | 540 |
| | | ↙ | | ↙ | | | ↙ | | 4,6 | |
| $M.\,a.\,Q_2$ | 5,2 | 15,8 | 6,2 | 16,4 | 6,7 | 6,0 | 16,1 | 5,5 | | |
| $R_n\,R_s\,a.\,Q_2$ | 6,8 | −2,8 | 7,6 | −2,2 | 7,8 | 7,4 | −2,5 | 6,9 | 6,4<br>7,5 | 557 |
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |

$R_n R_s a. Q_2$ in der ersten Columne bedeutet, dass die jenseits des Nord- und Südpoles angebrachten Bürsten (Schleiffedern) miteinander und mit dem Quadrantenpaare $Q_2$ in Verbindung stehen, während die Mittelbürste am Quadrantenpaare $Q_1$ und damit an Erde liegt.

$M. a. Q_2$ besagt, dass die Mittelbürste mit $Q_2$ verbunden ist, während $R_n R_s$ an $Q_1$ und an Erde liegen.

Neben jeder Schaltung sind in derselben Horizontalreihe zunächst fünf Zahlen angeführt. Dieselben geben die beobachtete Nadelstellung in Scalenteilen bei ruhendem und rotirendem Magnete. Der Rotationspfeil giebt den Sinn der Drehung an, wenn man ausserhalb des Magnetes stehend in der Richtung der Drehaxe gegen den Nordpol sieht. Das Zeichen $\curvearrowleft$ bedeutet somit eine Rotation im Sinne der Ampère'schen Ströme.

Die positiven und negativen Werte der Ablesungen sind durch die Einrichtung der zum Steinheil'schen Fernrohre gehörenden Scala entstanden. In der Mitte derselben befindet sich der Nullpunkt, an den sich im Fernrohre gesehen nach rechts eine schwarze, als positiv angenommene, nach links eine rote, als negativ betrachtete Scala anschliesst. Es mag hier bemerkt werden, dass ein Scalenausschlag im positiven Sinne ein im Vergleich mit der Erde positives Potential des Quadrantenpaares $Q_2$ anzeigt.

In der siebenten und achten Columne sind die Mittelwerte je einer Beobachtungsreihe für den ruhenden und rotirenden Magneten angegeben. Die Tab. I zeigt in Uebereinstimmung mit den sonstigen Beobachtungen aufs deutlichste, dass eine Umkehrung der Drehrichtung auch eine solche der Potentialdifferenz zur Folge hat. Bei der Schaltung $R_n R_s a. Q_2$ sind bei Rotation $\curvearrowright$ die Ausschläge positiv, dagegen negativ bei Rotation $\curvearrowleft$. Demnach tritt im ersten Falle eine elektromotorische Kraft auf, welche, auf den Magneten bezogen, im Sinne von der Mitte nach den Enden hin wirkt. Das Umgekehrte gilt für die Rotation $\curvearrowleft$. Das gleiche Ergebnis ist aus den Zahlen für die Schaltung $M. a. Q_2$ zu ersehen. Wie man erkennt, stimmt die für die elektromotorische Kraft gefundene Richtung vollständig überein mit derjenigen, zu welcher die Strombeobachtungen geführt haben.

Die zehnte Columne giebt die Scalenablesungen an für den Fall, dass beide Quadrantenpaare an Erde liegen ($Q_1$ $Q_2$ *a. E.*), die neunte Reihe enthält die den vorhergehenden Horizontalreihen entsprechenden Mittelwerte. In der elften Columne sind endlich die am Motor beobachteten Tourenzahlen (pro Min.) angeführt.

Der Reductionsfactor des Elektrometers auf Volt ist in oftmaliger Wiederholung bestimmt. Fast immer erfolgte die Ermittelung an demselben Tage, an welchem die Inductionsversuche vorgenommen wurden. Die Messung geschah in der Weise, dass der Elektrometerausschlag beobachtet wurde, wenn eines der Quadrantenpaare mit dem Ende eines Brückendrahtes, das andere mit einem an passender Stelle befindlichen Schleifcontacte verbunden war, während ein von einem Accumulator gelieferter Strom durch den Draht floss. Die Spannung an den Enden des Brückendrahtes wurde durch ein Millivoltmeter von Siemens & Halske bestimmt. Die Messung wurde bei mehrmaliger Commutirung der zu den Quadrantenpaaren führenden Drähte vorgenommen.

Die Zahlen, welche der Aichung für die in Tab. I mitgeteilte Beobachtungsreihe entsprechen, sind folgende.

Tabelle II.

| $Q_1$ $Q_2$ *a. E.* | Spannung in Millivolt | $Q_2$ *a.* + | $Q_2$ *a.* − |
|---|---|---|---|
| 20,0 | | | |
| | 19,0 | | |
| 21,8 | | 94,4 | |
| | 19,0 | | |
| 22,4 | | | − 49,8 |
| | 19,0 | | |
| 23,0 | | 95,9 | |
| | 19,0 | | |
| 23,0 | | | − 49,8 |

$Q_2$ *a.* + bedeutet, dass das Quadrantenpaar $Q_2$ mit einer Stelle des Messdrahtes in Verbindung ist, von welcher der Strom nach der anderen mit $Q_1$ verbundenen abgeleiteten

Stelle hinfliesst. Bei der Schaltung $Q_2\ a.$ — fliesst der Strom von der abgeleiteten Stelle nach der mit $Q_2$ verbundenen Stelle mit negativem Potential.

Bildet man in geeigneter Weise die Mittelwerte aus den vorstehenden Zahlen, so berechnet sich daraus der Scalenausschlag zu 72,8, und berücksichtigt man, dass die Ableitestellen auf dem Messdrahte um 0,6 seiner ganzen Länge voneinander entfernt waren, so erhält man die einem Scalenteil entsprechende Potentialdifferenz gleich

$$\frac{19{,}0\,.\,0{,}6}{72{,}8} = 0{,}156 \text{ Millivolt.}$$

Bei der Berechnung der elektromotorischen Kraft der Induction aus den Elektrometerbeobachtungen ist zu berücksichtigen, dass neben der Induction noch andere Ursachen für das Auftreten elektromotorischer Kräfte vorhanden sein können. Es ist möglich, dass im vorliegenden Falle Thermovorgänge sowie auch die Reibung elektromotorisch wirksam sind. Letzteres kann stattfinden in den Berührungsstellen der Bürsten sowie auch in der Aufliegefläche der Lederschnur. Jedoch liegt es in der Natur dieser elektromotorischen Kräfte, dass sie ihren Sinn bei Aenderung der Rotationsrichtung nicht umkehren. Dagegen muss die elektromotorische Kraft der unipolaren Induction sich mit der Drehrichtung umkehren.

Unter Bezugnahme auf eine Beobachtungsreihe, wie sie in Tab. I mitgeteilt ist, bezeichne $E_t$ die thermoelektromotorische Kraft während der Versuche. Ferner sei für die Umlaufszahl $v$ und die Drehung $\curvearrowright$ die elektromotorische Kraft

$$\text{der Induction} = E,$$
$$\text{der Reibung} = E_r.$$

Für die Tourenzahl $v_1$ und die Drehung $\curvearrowleft$ sei die elektromotorische Kraft

$$\text{der Induction} = E_1 = E\frac{v_1}{v},$$
$$\text{der Reibung} = E_r'.$$

Es ist dann

$$E + E_r + E_t = A \curvearrowright (v),$$
$$-E\frac{v_1}{v} + E_r' + E_t = B \curvearrowleft (v_1),$$
$$E_t = C.$$

Bildet man nun für die Schaltung $R_n R_s a. Q_2$ die Differenz zwischen den Scalenablesungen „Magnet ruhend" und „beide Quadrantenpaare an Erde", so stellt diese nach Multiplication mit dem Reductionsfactor den Wert von $C = E_t$ dar. Bei der Berechnung des Mittelwertes für $C$ ist zu beachten, dass dabei das Vorzeichen, welches der commutirten Schaltung entspricht, umzukehren ist. $A$ und $B$ werden unter Berücksichtigung des Reductionsfactores in entsprechender Weise aus der Differenz zwischen „Magnet rotirend" und „beide Quadrantenpaare an Erde" erhalten. Dabei bedeutet ein positives Vorzeichen von $A$, $B$ und $C$ eine elektromotorische Kraft, welche auf den Magneten bezogen von der Mitte desselben nach den Polenden hin gerichtet ist. Das Umgekehrte gilt bei einem Minuszeichen.

Aus den oben stehenden Gleichungen folgt ohne weiteres

$$E\left(1 + \frac{v_1}{v}\right) + E_r - E_r' = A - B,$$

$$E_r \frac{v_1}{v} + E_r' + E_t\left(1 + \frac{v_1}{v}\right) = A\frac{v_1}{v} + B.$$

Die Beobachtungen zeigen nun durchweg, dass die gemessenen Spannungen $A$ und $B$ annähernd gleich gross bei entgegengesetztem Vorzeichen sind. Daraus folgt, dass $E_r$ und $E_r'$ gegen $E$ von untergeordneter Grösse sind. Das gilt auch für $E_t$, wie die direct ermittelten Werte für $C$ zeigen.

Unter diesen Umständen erscheint es erlaubt, die elektromotorische Kraft infolge der Reibung bei beiden Drehrichtungen als gleich gross anzunehmen. Setzt man demnach

$$E_r' = E_r,$$

so ergiebt sich aus den oben stehenden Gleichungen

$$E = \frac{A - B}{1 + \frac{v_1}{v}},$$

$$E_r = \frac{A\frac{v_1}{v} + B}{1 + \frac{v_1}{v}} - C.$$

Die Beobachtungsreihe in Tab. I ergiebt die $A$, $B$ und $C$ entsprechenden Ausschläge 10,50, −10,02 und −0,03; folglich ist

$$A = 10{,}50 \cdot 0{,}156 = 1{,}64 \text{ Millivolt},$$
$$B = -10{,}02 \cdot 0{,}156 = -1{,}57 \quad ,,$$
$$C = -0{,}03 \cdot 0{,}156 = -0{,}00 \quad ,,$$

Hieraus berechnet sich

$$E = +1{,}58 \text{ Millivolt},$$
$$E_r = +0{,}07 \quad ,,$$
$$E_t = -0{,}00 \quad ,,$$

Um aus der tachometrisch beobachteten Umlaufszahl des Motores diejenige des Magneten ermitteln zu können, muss das Uebersetzungsverhältnis bekannt sein. Die Bestimmung desselben erfolgte dadurch, dass der Motor langsam achtmal herumgedreht und die entsprechende Zahl der Umdrehungen des Magneten beobachtet wurde. Der Bruchteil der letzten Umdrehung des Magneten wurde durch geeignete Winkelmessung ermittelt. Vier in dieser Weise vorgenommene, wenig abweichende Vergleichungen ergaben, dass auf eine Umdrehung des Motores 3,266 Umdrehungen des Magneten kommen.

Eine Vergleichung des Tachometers mit einem gewöhnlichen Tourenzähler zeigte, dass die Angaben des ersteren um etwa 4 Proc. zu klein sind und dass der procentische Fehler zwischen 350 und 650 Umläufen, tachometrisch gemessen, als constant angesehen werden kann. Die Angaben des Tachometers sind dieser Vergleichung zufolge mit 1,042 zu multipliciren, um die wahre Umlaufszahl des Motores zu erhalten. Demnach ergiebt sich die Umlaufszahl des Magneten durch Multiplication der am Tachometer abgelesenen Zahl mit $3{,}266 \cdot 1{,}042 = 3{,}403$. Die Umlaufszahlen des Magneten für die Beobachtungsreihe in Tab. I sind hiernach 1837 und 1895.

In der beschriebenen Weise ist nun eine Anzahl von Beobachtungsreihen ermittelt, wobei die Art des Anlegens der Drähte an den Magneten modificirt, namentlich auch in einigen Fällen die Umlaufszahl in weiteren Grenzen geändert wurde. In der folgenden Tab. III ist eine Zusammenstellung einer Anzahl von Beobachtungsresultaten gegeben, die als definitiv die zahlreichen Beobachtungen abschliessen. Die erste Columne

enthält das Datum der Beobachtung, die zweite die Art des Anschlusses der Drähte an den Magneten, die dritte und vierte die Umlaufszahlen des Magneten für beide Rotationsrichtungen. Es bedeuten ferner $n_a$, $n_b$, $n_c$ in der fünften bis siebenten Columne die $A$, $B$ und $C$ entsprechenden Scalenausschläge, während unter $c$ der Reductionsfactor des Elektrometers auf Millivolt enthalten ist. Endlich ist in der neunten Columne unter $E_v$ die für die Umlaufszahl $v$ berechnete Potentialdifferenz angegeben, während die letzte die Potentialdifferenz für die bestimmte Tourenzahl 1800, also für 30 Umläufe in der Secunde, enthält. Dieselbe berechnet sich gleich

$$E_{1800} = E_v \cdot \frac{1800}{v}.$$

Die aus den mitgeteilten Zahlen ermittelten Werte von $E_r$ und $E_t$ sind stets sehr klein gegen $E_v$. Da dieselben kein besonderes Interesse darbieten, ist die Mitteilung derselben unterlassen.

Tabelle III.

| 1901 | | $v$ ↘ | $v_1$ ↙ | $n_a$ | $n_b$ | $n_c$ | $c$ | $E_v$ in Millivolt | $E_{1800}$ in Millivolt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21. VIII. | 2 Bürstenpaare *a. M.* und $R_n$ | 1684 | 1769 | 9,00 | −10,02 | −0,45 | 0,154 | 1,43 | 1,53 |
| 24. VIII. | 3 Bürstenpaare *a. M.*, $R_n$ u. $R_s$ | 1769 | 1786 | 9,65 | − 9,00 | −0,07 | 0,156 | 1,45 | 1,48 |
| 24. VIII. | 3 Bürsten *a. M.*, $R_n$ und $R_s$ | 1837 | 1895 | 10,50 | −10,02 | −0,03 | 0,156 | 1,58 | 1,55 |
| 26. VIII. | Ebenso | 2321 | 2321 | 13,15 | −12,32 | −0,04 | 0,154 | 1,96 | 1,52 |
| 26. VIII. | Ebenso | 1412 | 1419 | 7,80 | − 6,92 | 0,19 | 0,154 | 1,13 | 1,44 |
| 26. VIII. | Ebenso | 1650 | 1701 | 9,42 | − 9,02 | −0,08 | 0,154 | 1,40 | 1,52 |
| 30. VIII. | 2 Bürsten *a. M.* und $R_n$ | 1684 | 1759 | 8,52 | − 8,90 | −0,11 | 0,160 | 1,37 | 1,46 |
| 26. IX. | 3 Bürsten *a. M.*, $R_n$ und $R_s$ | 1895 | 2008 | 7,97 | − 9,47 | −0,02 | 0,180 | 1,53 | 1,45 |

Die meisten der Beobachtungen sind (zweite Columne) unter Anwendung von drei Bürsten erhalten, die auf dem mittleren Messingring und den Schleifringen ausserhalb der Magnetpole aufliegen, wobei die Aussenbürsten miteinander

verbunden sind. Der von diesen zum Elektrometer führende Draht war bei mehreren Versuchen in der Mitte des Verbindungsdrahtes zwischen $R_n$ und $R_s$ angeklemmt. Gelegentlich sind auch Bürstenpaare auf die Schleifringe aufgelegt, sodass die Bürsten eines Paares in Bezug auf die Rotation entgegengesetzt standen. Die Anordnung entsprang der Absicht, die durch Bürstenreibung entstehenden elektromotorischen Kräfte für beide Drehrichtungen möglichst gleich zu machen. Die Benutzung von Doppelbürsten bietet indessen gegenüber derjenigen einfacher Bürsten bei den elektrometrischen Versuchen keine besonderen Vorteile und wurde daher wieder verlassen. Die Leitung ist endlich bei einigen Beobachtungen an nur zwei Stellen, $M$ und $R_n$, angelegt worden.

Die bei den Versuchen zur Anwendung gelangten Umlaufszahlen liegen etwa zwischen 1400 und 2300. Nach den Inductionsgesetzen ist die elektromotorische Kraft der Umlaufszahl proportional, und die Beobachtungen bei verschiedenen Geschwindigkeiten müssen demnach auf gleiche Werte der Potentialdifferenz führen, wenn man diese für eine bestimmte Umlaufszahl, z. B. 1800, berechnet.

Ein Blick auf die letzte Columne zeigt in der That, dass die aus den verschiedenen Beobachtungen berechneten Werte von $E_{1800}$ so nahe miteinander übereinstimmen, als man bei der Natur der Beobachtungen etwa erwarten kann. Die grösste Abweichung vom Mittelwerte beträgt 0,06 Millivolt, und diese würde sich allein durch einen Fehler von 0,4 Sct. erklären lassen. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass ausserdem die tachometrisch gemessene Tourenzahl unter Umständen mit einem Fehler von einigen Procenten behaftet sein kann.

Der Mittelwert für $E_{1800}$ berechnet sich zu 1,49 Millivolt.

Gegen die Bedeutung der erhaltenen Zahlen könnte denkbarer Weise ein Zweifel dahin gehend erhoben werden, dass es fraglich erscheinen kann, ob durch dieselben in der That Potentialdifferenzen in der *offenen* Leitung dargestellt werden. Denn dass solche im geschlossenen Kreise vorhanden sein müssen, ist wohl selbstverständlich.

Um jenen Zweifel zu beseitigen oder wenigstens auf ein Mindestmaass herabzudrücken, wurde in die Leitung zwischen dem Quadrantenpaare $Q_2$ und der Unipolarmaschine ein Gal-

vanometer nach Deprez-d'Arsonval mit wohl isolirter Zuleitung eingeschaltet, dessen Einstellung man mit Spiegel und Scala beobachtete. Die Empfindlichkeit war eine derartige, dass einem Scalenteile 0,017 Millionstel Ampère entsprachen.

Es wurde nun die Einstellung des Galvanometers bei ruhendem Magneten, und wenn derselbe mit etwa 1700 Umläufen rotirte, beobachtet. Dabei war es jedoch nicht möglich, eine Verschiedenheit der Einstellungen, die ein Strom bei rotirendem Magneten hätte hervorrufen müssen, zu constatiren.

Die zum Antreiben des Magneten dienende Lederschnur hätte denkbarer Weise eine besondere Ableitung zur Erde darbieten können. Das würde die Versuche bei zur Erde abgeleiteten äusseren Schleifringen nicht weiter beeinflussen können, wohl aber diejenigen, bei denen der mittlere Schleifring mit der Erde und die äusseren mit $Q_2$ verbunden sind.

Dass die Lederschnur überhaupt einen störenden Einfluss ausgeübt habe, wird an sich schon unwahrscheinlich gemacht durch den Umstand, dass bei Verbindung des mittleren Schleifringes mit der Erde einerseits und andererseits bei Anschluss der äusseren Schleifringe an die Erde die Elektrometerausschläge nahezu gleich gross bei entgegengesetztem Sinne ausfallen. Ein weiterer Beweis, dass kein störender Einfluss durch die Schnur hervorgerufen ist, wurde durch folgenden Controlversuch erbracht.

Die Quadrantenpaare $Q_1$ $Q_2$ (vgl. Fig. 2) standen durch die Leitungen $a_1$ $a_2$ mit zwei Stellen eines stromdurchflossenen Messdrahtes in Verbindung, zwischen denen eine Potentialdifferenz von 11,4 Millivolt vorhanden war. Ausserdem war das an Erde liegende Quadrantenpaar $Q_1$ unter Vermittelung der Mittelbürste bei $M$ mit dem ruhenden Magneten in leitender Verbindung. Der bei dieser Schaltung erhaltene Elektrometerausschlag wurde nun verglichen mit demjenigen, welcher sich ergab, wenn $Q_2$ ausserdem durch die punktirt gezeichnete Leitung unter Vermittelung eines zweiten $M$ gegenüberstehenden Hartgummiklotzes $K$ mit Klemmschraube in Verbindung mit der Lederschnur war. Letztere wurde durch eine auf die Schnur aufgepresste Klemmschraube $P$ vermittelt. Die Beobachtung wurde auch nach Commutirung der Enden von $a_1$ und $a_2$ gegen $Q_1$ und $Q_2$ wiederholt. Man fand im Mittel aus drei und zwei Ablesungen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $Q_2$ nur an (−) | | $Q_2$ an (−) und Lederschnur |
| Ausschlag | − 63,55 | | − 63,60 |
| | $Q_2$ nur an (+) | | $Q_2$ an (+) und Lederschnur |
| Ausschlag | 64,13 | | 64,20 |

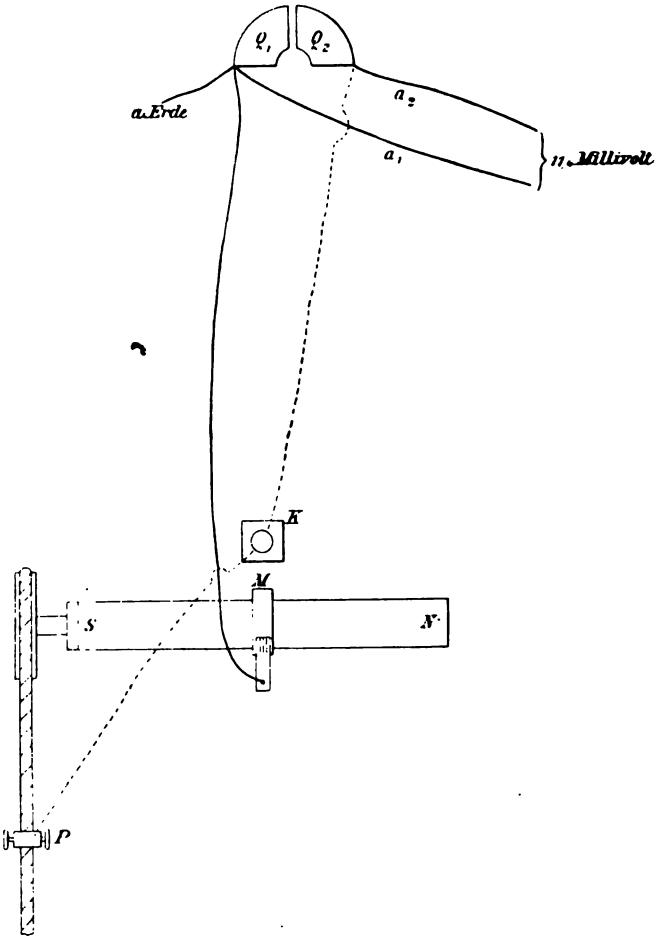



Fig. 2.

Die Vergleichung der Zahlen in jeder Horizontalreihe miteinander zeigt, dass die Ausschläge gleich sind, abgesehen von den Hundertsteln Scalenteilen, die auch beim Mittelnehmen nicht mehr sicher sind. Wahrscheinlich wären diese nichts

besagenden Unterschiede noch kleiner ausgefallen, wenn nicht während der Versuche Nullpunktsverschiebungen stattgefunden hätten, die sich für jede Versuchsreihe auf etwa 1 Sct. belaufen.

Gegen die Isolation durch die Lederschnur und zugleich auch durch den Hartgummiklotz $K$ kann hiernach kein Einwand erhoben werden.

Die Beantwortung der Frage, ob die elektrometrisch gefundene Potentialdifferenz in der offenen Leitung übereinstimmt mit der ganzen elektromotorischen Kraft bei geschlossenem Kreise, ist an sich von Interesse und bietet zugleich eventuell Gelegenheit zu einer Controle der elektrometrisch gefundenen Werte.

Es sind deshalb dementsprechende galvanometrische Versuche angestellt. Das vorhin genannte Galvanometer nach Deprez-d'Arsonval wurde durch eine Leitung mit der Mitte und dem Schleifringe $R_n$ des Magneten verbunden. Die Leitung enthielt ausserdem einen Widerstandskasten von Siemens & Halske. Der Widerstand der benutzten Galvanometerwindungen ist von der Fabrik von Hartmann & Braun zu etwa 5 Ohm angegeben. Eine genauere Bestimmung schien nicht erforderlich, da bei den Versuchen mittels des Rheostaten mehrere Hundert Ohm in die Leitung eingeschaltet wurden. Auch der Widerstand der Zuleitungen konnte unter diesen Umständen vernachlässigt werden.

Die Versuche wurden zunächst bei Benutzung von je einer Bürste an den Schleifringen $R_n$ und $M$ ausgeführt, lieferten dabei aber Ergebnisse, welche mit denjenigen der elektrometrischen Messungen nicht in Beziehung zu bringen waren. Die Vermutung, dass die Abweichungen durch Uebergangswiderstände an den Aufliegestellen der Bürsten hervorgerufen seien, führte zur Anwendung von Doppelbürsten (vgl. auch p. 806), wobei die Bürsten eines jeden Paares in Bezug auf die Rotation entgegengesetzt, also dachartig gegeneinander standen. Die anfangs beobachteten Abweichungen wurden bei dieser Anordnung zum Verschwinden gebracht. In der nachstehenden Tab. IV sind die Ergebnisse der betreffenden Messungen zusammengestellt. Unter $w$ ist der Gesamtwiderstand der Leitung angegeben. Die Zahlen unter $v$ und $v_1$ stellen

die Umlaufszahlen für Rechts- und Linksdrehung dar, die Werte unter $n$ und $n_1$ geben die entsprechenden Scalenausschläge an. Unter $v_0$ und $n_0$ sind die Mittelwerte der beiden Umdrehungszahlen und Scalenausschläge angeführt. Es bezeichnen endlich die Zahlen unter $E_{v_0}$ und $E_{1800}$ die elektromotorische Kraft in Millivolt bei $v_0$ und 1800 Umläufen. Zur Berechnung der $E_{v_0}$ aus Stromstärke und Widerstand sei bemerkt, dass einem Scalenteil eine Stromstärke von 0,000016 94 Milliamp. entspricht.

Tabelle IV.

| $w$ (Ohm) | ↘ $v$ | $n$ | ↙ $v_1$ | $n_1$ | $v_0$ | $n_0$ | $E_{v_0}$ (Millivolt) | $E_{1800}$ (Millivolt) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 305 | 1633 | 276,9 | 1684 | −252,3 | 1659 | 264,6 | 1,37 | 1,49 |
| 605 | 1633 | 136,6 | 1633 | −123,6 | 1633 | 130,1 | 1,33 | 1,47 |
| 605 | 1157 | 95,9 | 1310 | − 98,0 | 1233 | 96,9 | 0,99 | 1,45 |

Die Werte von $E_{1800}$ weichen voneinander nicht mehr ab, als es die Fehler, welche bei der Messung der Umlaufszahlen vorkommen können, erwarten lassen. Der Mittelwert ist gleich 1,47, und es muss hervorgehoben werden, dass derselbe mit dem Mittelwerte der elektrometrischen Messungen 1,49 in fast genauer Uebereinstimmung ist. Bei Berücksichtigung aller bei den Versuchen mitwirkenden Fehlerquellen wird man zu der Schlussfolgerung berechtigt sein, dass die nach beiden Methoden gefundenen Werte von $E_{1800}$ einander gleich sind.

Es ist somit die Potentialdifferenz, welche in der offenen Leitung einer Unipolarmaschine gewöhnlicher Art auftritt, gleich der ganzen elektromotorischen Kraft, welche im geschlossenen Kreise vorhanden ist.

Die verschiedenen für die unipolare Induction aufgestellten Theorien liefern für die elektromotorische Kraft übereinstimmend

$$E = 4\pi\mu v_s,$$

wenn $\mu$ den freien Magnetismus des rotirenden Magneten und $v_s$ die Umlaufszahl in der Secunde bezeichnet. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Stromabnahme in der Mitte des

Magneten und ausserhalb desselben jenseits eines Poles erfolgt.[1])

Um für die im Vorstehenden mitgeteilten Versuche den Wert von $4\pi\mu v_s$ zu ermitteln, muss $\mu$ bestimmt werden. Letzteres geschah zunächst[2]) aus dem magnetischen Momente. Die Bestimmung erfolgte in der Weise, dass der Unipolarmagnet zu dem Magnete eines Spiegelgalvanometers nahezu in die erste Hauptlage gebracht wurde. In der verlängerten Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Magnete lag ausserdem axial eine Spule, deren gesamte Windungsfläche auf Grund früherer Versuche[3]) bekannt war. Der durch die Spule geleitete Strom wurde mittels des vorhin bereits genannten Millivolt- und Ampèremessers bestimmt. Letzterer lag dabei im Nebenschlusse zu einem Widerstande für stärkere Ströme, sodass 10 Sct. ein Strom von 2 Amp. entspricht. Als Mittel von zwei nacheinander ausgeführten Messungen fand sich:

| | |
|---|---|
| der Scalenausschlag durch den Magneten allein . | $n = 224{,}0$ |
| derjenige durch die Spule allein . . . . . | $n_1 = 96{,}3$ |
| bei einem Strome $J = 13{,}56$ Amp. $= 1{,}356$ | $\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ Einh. |
| der Abstand des Magneten von Mitte zu Mitte gemessen . . . . . | $r = 140{,}0$ cm |
| derjenige für die Spule . . . . . | $r_1 = 231{,}8$ cm |
| für die Windungsfläche war früher (l. c.) ermittelt | $F = 11943\ \mathrm{cm}^2$. |

Hieraus berechnet sich das magnetische Moment des Magneten

$$M = F.J.\frac{r^3.n}{r_1^3.n_1} = 8302\ \mathrm{cm}^{5/2}\,\mathrm{g}^{-1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}\ \text{Einh.}$$

Setzt man den Polabstand gleich $^5/_6$ der Länge $L$ des Magneten und berücksichtigt, dass letztere 29,9 cm beträgt, so wird die Polstärke

$$\mu = \frac{M}{^5/_6\,L} = 333\ \mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}\ \text{Einh.}$$

---

1) Ueber die Ableitung und die experimentelle Bestätigung der Beziehung $E = 4\pi\mu r_s$ vgl. W. Weber's Werke **2.** p. 159—161 u. p. 164 bis 170. 1839; J. Plücker, Pogg. Ann. **87.** p. 383. 1852; E. Hagenbach, Ann. d. Phys. **4.** p. 237—242. 1901.

2) Vgl. auch E. Hagenbach, l. c.

3) O. Grotrian, Wied. Ann. **50.** p. 708—709. 1893.

Hieraus berechnet sich für $v = 1800$ (Min.)

$$E_{1800} = \frac{4\pi\mu v}{10^8 \cdot 60} = 1{,}26 \text{ Millivolt.}$$

Die Zahl kommt den elektrometrisch und galvanometrisch gefundenen 1,49 und 1,47 einigermaassen nahe, bleibt aber um mehr dahinter zurück, als man auf Grund der Beobachtungsfehler annehmen sollte.

Zunächst vermutete ich, dass die Voraussetzung, der Polabstand betrage $^5/_6 L$ im vorliegenden Falle nicht genügend genau sei. Es wurde deshalb nochmals $\mu$ auf anderem Wege, nämlich durch Induction, bestimmt. Ein dem Wesen nach gleiches Verfahren ist bereits von W. Weber (l. c.) angewandt worden.

Legt man eine Drahtschleife um die Aequatorialzone eines Magneten, zieht dann letzteren aus der Schleife heraus und bringt ihn in sehr grosse Entfernung, dann ist das Integral der inducirten elektromotorischen Kraft gleich $4\pi\mu$ gleich der Zahl der geschnittenen Inductionslinien. Letzterer Wert kann relativ durch ein ballistisches Galvanometer gemessen werden. Um denselben in absolutem Maasse zu erhalten, kann man einen die Schleife durchsetzenden gemessenen Inductionsfluss zum Verschwinden oder Entstehen bringen und so das ballistische Galvanometer aichen. Nach diesem Princip waren die Versuche zur Ermittelung von $4\pi\mu$ angeordnet.

Die Inductionsschleife war als Teil eines längeren isolirten Kupferdrahtes in einer Windung um ein Glasrohr gelegt, wobei die Drähte, welche die Fortsetzung der Schleife bildeten, fest zusammengedreht wurden, sodass die Schleife einen inneren Durchmesser erhielt, der möglichst nahe gleich dem äusseren des Glasrohres war. Das Zusammendrehen der Drähte wurde auf eine grössere Länge fortgesetzt, sodass die Inductionswirkungen auf die ausserhalb der Schleife liegenden Leiterteile in Fortfall kamen. Die Schleife wurde, da sich ein kleiner Spielraum zwischen ihr und dem Glasrohre nicht beseitigen liess, durch einen über das Glasrohr geschobenen ausgedrehten Holzcylinder und einen von der anderen Seite gegen die Schleife gepressten Gummiring in einer zum Glas-

rohre senkrechten Lage gehalten. Die von der Schleife ausgehende Leitung wurde an das früher erwähnte Deprez-d'Arsonval-Galvanometer angeschlossen. Um dieses für ballistische Zwecke brauchbar zu machen, wurde die bewegliche Spule durch Gewichte beschwert. Es geschah dieses durch zwei Messingkugeln, welche in ein mit der Spule verbundenes Gehänge eingelegt wurden.

In das Glasrohr mit Schleife passte der Magnet mit wenig Spielraum hinein. Derselbe wurde soweit eingeschoben, dass seine Mitte in die Ebene der Schleife fiel. Hierauf wurde der ballistische Ausschlag beobachtet, wenn der Magnet schnell aus dem Glasrohre herausgezogen wurde, wobei abwechselnd Nord- und Südende durch die Schleife hindurch bewegt wurde. Die Entfernung, bis zu welcher der Magnet von seiner Anfangslage aus bewegt wurde, betrug ungefähr 150 cm. Ein Bewegen, auch Umlegen des Magneten in seiner Endlage übte keine merklichen Wirkungen auf das Galvanometer mehr aus.

Es ergab sich als Mittel aus je sechs Beobachtungen der Scalenausschlag

beim Herausziehen des *N*-Poles gleich 43,22
„ „ „ *S*-Poles „ 44,30
also im Mittel gleich 43,76 = $n_2$.

Der äussere Durchmesser der Schleife wurde durch ein gutes eisernes Schiebmaass mit Nonius zu 5,31 cm bestimmt. Zieht man davon den Durchmesser des Drahtes einschliesslich Isolation gleich 0,22 cm ab, so erhält man den mittleren Schleifendurchmesser gleich 5,09 cm und damit die Windungsfläche $F = 20{,}34$ cm². An letzterer ist noch eine Correction vorgenommen, weil neben der Stelle, wo die Schleifenenden in die äussere Leitung übergehen, ein Teil der Schleife etwas vom Glasrohre absteht. Die kleine Fläche $f$ (vgl. Fig. 3) in der Grösse von 0,05 cm² ist deshalb zu $F$ zu addiren, sodass die Windungsfläche mit 20,39 cm² in Rechnung zu setzen ist.

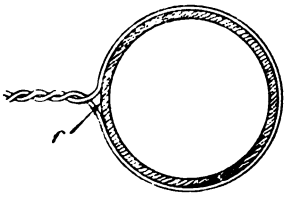


Fig. 3.

Das Glasrohr mit Schleife wurde ausserdem in axialer Stellung in das Innere einer langen und weiten Spule gebracht, sodass die Schleife in die Mitte der Spule zu liegen kam. Dabei blieb die zum Galvanometer geführte Leitung unverändert. Die Spule war bereits bei einer früheren Gelegenheit benutzt[1]) und damals genau ausgemessen. Die Windungszahl beträgt 894. Der Rechnung zufolge erzeugt ein in den Windungen fliessender Strom von 1 Amp. in der Spulenmitte ein Feld von 13,71 $cm^{-1/2} g^{1/2} sec^{-1}$ Einheiten.

Durch die Windungen der Spule wurde nun der Strom einer Accumulatorenbatterie geleitet, dessen Messung durch das in Abzweigung liegende Milliampèremeter erfolgte. Der Strom wurde geschlossen und geöffnet und der dabei auftretende ballistische Ausschlag beobachtet.

Bei einer Stromstärke von 14,76 Amp. erhielt man als Mittel aus je 5 Beobachtungen:

| | |
|---|---|
| beim Schliessen | 42,62 |
| beim Oeffnen | 41,76 |
| also im Mittel $n_1$ = | 42,19 Sct. |

Die Intensität des Spulenfeldes ist dabei

$$T = 13{,}71 \times 14{,}76 = 202{,}4 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1} \text{ Einh.}$$

Bezeichnet nun $c$ den Reductionsfactor des Galvanometers für ballistische Ausschläge, dann gilt

$F . T = c . n_1$ für die Induction durch die grosse Spule
$4 \pi \mu = c . n_2$ „ „ „ „ den Magneten.

Somit ist

$$c = \frac{F . T}{n_1},$$

$$4 \pi \mu = F T \frac{n_2}{n_1},$$

$$\mu = \frac{F . T}{4 \pi} \cdot \frac{n_2}{n_1}.$$

1) O. Grotrian, Wied. Ann. 57. p. 756—757. 1896.

Setzt man die gefundenen Zahlen ein, so erhält man

$$4\pi\mu = 4281,$$

$$\mu = 341 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1} \text{ Einh.}$$

und

$$E_{1800} = \frac{4\pi . \mu . 1800}{10^8 . 60} = 1{,}28 \text{ Millivolt.}$$

Der auf diesem Wege bestimmte freie Magnetismus $\mu = 341$ stimmt mit dem aus dem magnetischen Momente ermittelten $\mu = 333$ nahe überein, sodass zu einer Beanstandung dieses Wertes keine Veranlassung vorzuliegen scheint. Das Gleiche gilt für die aus $\mu$ berechneten Werte der elektromotorischen Kraft. Dieser wurde aus dem magnetischen Momente gleich $E_{1800} = 1{,}26$ gefunden, während die Inductionsversuche $E_{1800} = 1{,}28$ ergeben haben. Das Mittel aus beiden Werten $E_{1800} = 1{,}27$ weicht von den elektrometrisch und galvanometrisch gefundenen Werten $E_{1800} = 1{,}49$ und $E_{1800} = 1{,}47$ um einen Betrag ab, der durch blosse Beobachtungsfehler schwer zu erklären ist. Die naheliegende Annahme, dass das magnetische Moment während der Dauer der Rotationsversuche und nach denselben allmählich kleiner geworden sei und folglich auch $\mu$ beim Abschlusse der Rotationsversuche kleiner als während derselben hätte sein können, kommt nicht in Betracht. Denn der Gang der Zahlen für $E_{1800}$ in Tab. III zeigt keinerlei ausgesprochene Abnahme derselben im Laufe der Zeit, und ausserdem ist die letzte Zahl $E_{1800} = 1{,}45$, die vom Mittelwerte wenig abweicht, *nach* den Versuchen zur Bestimmung von $\mu$ erhalten.

Als streng richtig ist der Ausdruck $4\pi\mu v_s$ für die elektromotorische Kraft nach den Ausführungen und Versuchen von W. Weber und den Rechnungen von Hagenbach nicht zu betrachten für einen reellen Magneten, wie er bei den beschriebenen Versuchen benutzt wurde. Jedoch wäre danach ein Wert von $4\pi\mu v_s$ zu erwarten gewesen, der sich nicht kleiner, sondern grösser als die direct gemessene elektromotorische Kräft hätte herausstellen müssen. Es mag hier nicht unbemerkt bleiben, dass auch Hagenbach (l. c.) aus seinen Versuchen in einem Falle eine Abweichung in dem nämlichen Sinne findet. Derselbe berechnet aus $\mu$ die elektromotorische Kraft seiner Maschine bei der Winkelgeschwindig-

keit Eins zu 296 $cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-1}$, während er durch die Rotationsversuche 320 erhält.

Einstweilen muss ich die Frage, weshalb $E_{1800}$ aus $\mu$ berechnet um etwa 14 Proc. kleiner ausgefallen ist als der Wert, zu dem die Rotationsversuche geführt haben, als eine offene betrachten.

---

Die Hauptergebnisse der im Vorstehenden mitgeteilten Versuche und Beobachtungen sind folgende.

1. Im offenen Kreise einer gewöhnlichen rotirenden Unipolarmaschine ist an den Enden der damit verbundenen Leitung infolge der Induction freie Elektricität vorhanden.

2. Die dieser freien Elektricität entsprechende Potentialdifferenz ist gleich der gesamten elektromotorischen Kraft, welche bei geschlossenem Kreise auftritt.

3. Für die aus dem freien Magnetismus berechnete elektromotorische Kraft haben die Versuche einen Wert ergeben, der kleiner ist als derjenige, welchen die Rotationsversuche liefern. Die Frage nach der Erklärung der gefundenen Abweichung muss einstweilen als eine offene betrachtet werden.

Auf Grund der hier mitgeteilten Versuche näher auf theoretische Betrachtungen einzugehen wäre verfrüht. Allerdings ist das Vorhandensein freier Elektricität im offenen Unipolarkreise nachgewiesen, aber die Frage nach dem Sitze der elektromotorischen Kraft und die eng damit zusammenhängende, ob die Molecularmagnete auf magnetische Flüssigkeiten oder auf Molecularströme zurückzuführen sind, ist damit noch nicht beantwortet. Denn neben dem Magneten sind äussere Leiterteile vorhanden, welche durch die zum Elektrometer führenden Drähte gebildet werden. Wenn einerseits der Sitz der elektromotorischen Kraft in den rotirenden Teilen allein gesucht werden kann, so kann er dagegen auch in den äusseren Leiterteilen, vielleicht auch in beiden liegen.

Trennt man die äussere Leitung von dem Magneten, indem man die Bürsten abhebt, so ist es denkbar, einen etwaigen inducirenden Einfluss auf die äussere Leitung nachzuweisen oder auch dessen Nichtexistenz zu zeigen. Damit würde man allerdings endgültig den Sitz der elektromotorischen Kraft fest-

stellen können. Die von mir nach diesem Princip angestellten Versuche sind indessen bis jetzt resultatlos geblieben. Denn nach abgetrennter Leitung setzt sich wahrscheinlich infolge äusserer Influenzwirkungen die Nadel derartig in Bewegung, dass entweder die Scala aus dem Gesichtsfelde des Fernrohres verschwindet oder dass dem Ende der Scala entsprechend ein unruhiges und unregelmässiges Hin- und Herschwingen der Nadel eintritt, welches eine sichere Ablesung unmöglich macht.

Aachen, October 1901.

(Eingegangen 18. October 1901.)

## 9. *Ueber irreversible Strahlungsvorgänge;* *von Max Planck.*

(Nachtrag.)

(Aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 9. Mai 1901 für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

In den Untersuchungen irreversibler Strahlungsvorgänge, über die ich im vorigen Jahre in diesen Annalen[1]) zusammenfassend berichtet habe, konnte ich zeigen, dass eine Theorie, welche die Erscheinungen der Licht- und Wärmestrahlung als rein elektromagnetische Vorgänge auffasst, auch für die beiden Hauptsätze der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf strahlende Wärme eine Erklärung und einen Beweis auf rein elektromagnetischer Grundlage zu führen gestattet, wofern man nur eine Voraussetzung einführt, die ich als die Hypothese der natürlichen Strahlung bezeichnet habe, und die im wesentlichen darauf hinauskommt, dass ein jeder auch noch so homogen erscheinender Licht- und Wärmestrahl als ein aus sehr vielen einfach harmonischen Elementarschwingungen von nahezu gleicher Periode unregelmässig zusammengesetzter Vorgang anzusehen ist.

Der wichtigste und zugleich schwierigste Punkt dieser Untersuchung lag in dem Nachweis, dass eine durch den jeweiligen physikalischen Zustand des betrachteten Systems vollkommen bestimmte Grösse existirt, welche die Eigenschaft besitzt, bei allen in dem System sich abspielenden Vorgängen sich immer nur in einem bestimmten Sinne zu ändern, also, je nach der Definition ihres Vorzeichens, entweder immer zu wachsen oder immer abzunehmen. Sobald eine derartige Function des Zustandes sich angeben lässt, ist zugleich auch der Nachweis geliefert, dass die physikalischen Vorgänge in dem System einseitig, irreversibel, verlaufen, und dass sie beständig einem gewissen Endzustand, dem stationären Zustand,

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 69. 1900.

zustreben, welcher erreicht ist, wenn jene Function ihr absolutes Maximum bez. Minimum annimmt. Daher erschliesst die vollständige Kenntnis des Ausdruckes dieser Function zugleich auch die genaue Kenntnis des stationären Strahlungszustandes in seiner Abhängigkeit von den Energien und den Schwingungszahlen aller in dem System vorhandenen Strahlen, insbesondere auch die Verteilung der Energie auf die einzelnen Gebiete des stationären, sogenannten Normalspectrums.

Eine derartige sich beständig in demselben Sinne ändernde Grösse von sehr einfacher mathematischer Form machte ich zuerst für concentrische Kugelwellen, in deren Centrum sich ein linearer Resonator befindet[1]), später auch für beliebige Strahlen in einem hinreichend ausgedehnten evacuirten Raum mit eingelagerten linearen Resonatoren[2]) direct namhaft, und damit war der Nachweis der Irreversibilität der betrachteten Strahlungsvorgänge erbracht. Wegen ihrer Analogie mit der aus der Thermodynamik bekannten Function nannte ich diese Grösse die elektromagnetische Entropie des Systems; bei allen betrachteten Strahlungsvorgängen nimmt ihr Wert beständig zu. Das Maximum dieser Entropie ergab für den stationären Zustand diejenige spectrale Energieverteilung, welche einige Jahre vorher W. Wien, von anderen Hypothesen ausgehend, als normale Energieverteilung hingestellt hatte, und welche damals durch die neuesten und genauesten Spectralmessungen, namentlich von F. Paschen, als der Wirklichkeit nahe entsprechend erkannt worden war. Dadurch wurde ich zu der Ansicht geführt, der ich auch in meiner letztgenannten Mitteilung Ausdruck gab, dass jener von mir ursprünglich nur durch Definition eingeführte Ausdruck der elektromagnetischen Entropie, als der einzige seiner Art, den ich damals anzugeben wusste, auch der allgemeine sei, woraus dann notwendig hervorgehen würde, dass das Wien'sche Energieverteilungsgesetz für alle Temperaturen und Wellenlängen Gültigkeit besitzt. Inzwischen hat sich aber diese Ansicht als irrig erwiesen, da neuere Erfahrungen, und zwar namentlich die Messungen von O. Lummer

---

1) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 1122. 1897; p. 449. 1898.

2) l. c. p. 440. 1899.

und E. Pringsheim[1]), sowie die von H. Rubens und F. Kurlbaum[2]) für längere Wellen bez. höhere Temperaturen zweifellose Abweichungen vom Wien'schen Gesetz ergeben haben.

Hierdurch wurde die Theorie wiederum vor die Aufgabe gestellt, einen neuen Ausdruck für die Entropie zu finden, von umfassenderer Bedeutung, welcher einerseits, ebenso wie der früher von mir aufgestellte, bei den betrachteten Strahlungsvorgängen sich beständig vergrössert, andererseits aber für den stationären Strahlungszustand eine Energieverteilung liefert, die allen durch die Messungen festgestellten Verhältnissen entspricht. Natürlich muss dieser Ausdruck der Entropie für kurze Wellenlängen oder tiefe Temperaturen in den früheren dem Wien'schen Gesetz entsprechenden einfachen Ausdruck übergehen.

Es mag vielleicht auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, dass nicht nur ein einziger, sondern dass mehrere verschiedenartige Functionen des Zustandes existiren können, welche alle die Eigenschaft besitzen, bei den betrachteten Strahlungsvorgängen beständig an Grösse zuzunehmen. Doch erklärt sich dieser Umstand wohl aus der wiederholt von mir hervorgehobenen Thatsache, dass die hier betrachteten Strahlungsvorgänge noch lange nicht die allgemeinsten sind, welche in der Natur stattfinden können. Würde man im stande sein, die allgemeinsten in der Natur möglichen Strahlungsprocesse einer entsprechend genauen Analyse zu unterwerfen, so würde man wahrscheinlich finden, dass es nur eine einzige Function giebt, welche die Eigenschaft der Entropie besitzt, unter allen Umständen an Grösse zuzunehmen. Doch scheint bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse dieser Weg zur Bestimmung des Ausdruckes der Entropie noch nicht gangbar zu sein.

Wenn es aber nur auf den Nachweis der Irreversibilität der betrachteten Vorgänge ankommt, dann genügt es offenbar, wenn auch nur eine einzige Function des Zustandes namhaft gemacht wird, welche die Eigenschaft besitzt, mit der Zeit beständig zu wachsen. Ich habe diesen Punkt schon in einer früheren

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 2. p. 163. 1900.

2) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 4. p. 649. 1901.

Mitteilung[1]) in gleichem Sinne besprochen und kann mich daher hier mit einem Hinweis auf jene Bemerkungen begnügen.

Für die oben bezeichnete Aufgabe hat sich mir nun in der That eine Lösung ergeben, da ein Ausdruck für die Entropie abgeleitet werden kann[2]), welcher, auf den Zustand der stationären Strahlung (des „Wärmegleichgewichtes") angewendet, mit den bisher durch directe Messungen festgestellten Thatsachen[3]) verträglich zu sein scheint. Es bleibt daher für die Theorie der irreversiblen Strahlung noch der Nachweis zu erbringen übrig, dass der nämliche Ausdruck der Entropie auch bei allen in der bisher entwickelten Theorie betrachteten nichtstationären Strahlungsvorgängen thatsächlich immer an Grösse zunimmt, und dies soll in der folgenden Mitteilung geschehen.

---

Im Interesse grösserer Kürze und Bequemlichkeit beziehe ich mich dabei unmittelbar auf die Definitionen, Bezeichnungen und Sätze meines am Eingang citirten gleichbetitelten Aufsatzes und führe auch die Numerirung der Paragraphen und der Gleichungen einfach in fortlaufender Reihe weiter.

### § 27. Umfassendere Definition der elektromagnetischen Entropie.

Wir definiren jetzt, ebenso wie in § 17, eine neue durch den physikalischen Zustand des Systems bestimmte Grösse $S_t$, die wir die *totale elektromagnetische Entropie* des Systems nennen:

$$S_t = \sum S + \int s \, d\tau.$$

Die Summation $\sum$ ist wieder über alle Resonatoren, die Integration über alle Raumelemente $d\tau$ des durchstrahlten Feldes

---

1) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 452 f. 1898.

2) M. Planck, Ann. d. Phys. **4.** p. 553. 1901.

3) H. Rubens u. F. Kurlbaum, l. c.; F. Paschen, Ann. d. Phys. **4.** p. 277. 1901; O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. **3.** p. 39. 1901. Bei einigen Messungen ist allerdings noch eine kleine Discrepanz zwischen Beobachtung und Theorie übrig geblieben (vgl. O. Lummer u. E. Pringsheim, Ann. d. Phys. **6.** p. 192. 1901), deren Aufklärung der Zukunft vorbehalten bleiben muss.

zu erstrecken. Daher nennen wir $S$ die Entropie eines einzelnen Resonators und $s$ die Entropiedichte in einem Punkte des Feldes.

Die Entropie $S$ eines Resonators mit der Schwingungszahl $\nu$ und der Energie $U$ definiren wir folgendermaassen:

$$(58) \qquad S = k\left\{\left(1 + \frac{U}{h\nu}\right)\log\left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu}\log\frac{U}{h\nu}\right\},$$

wobei $h$ und $k$ zwei universelle positive Constanten bezeichnen. Für kleine Werte des Argumentes $U/\nu$, d. h. für kurze Wellenlängen oder kleine Energien, fällt diese Function mit dem früher, in Gleichung (41) eingeführten Ausdruck von $S$ zusammen. Denn hierfür ergiebt sich, mit Weglassung der kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$S = -\frac{kU}{h\nu}\log\frac{U}{eh\nu},$$

während die frühere Definition nach Gleichung (41) lautete:

$$S = -\frac{U}{a\nu}\log\frac{U}{eb\nu}.$$

Man sieht daraus zunächst, dass der Gültigkeitsbereich der aus der früheren Definition abgeleiteten Sätze sich hier auf dasjenige Gebiet der Wellenlängen und Energien beschränkt, für welches $U/\nu$ klein ist gegen $h$. Ferner lassen sich offenbar die Zahlenwerte der Constanten $h$ und $k$ durch Vergleich mit den früher von mir aus den Messungen von F. Kurlbaum und von F. Paschen berechneten Werte von $a$ und $b$ leicht bestimmen. Denn durch Vergleichung der beiden letzten Ausdrücke von $S$ ergiebt sich:

$$h = b \quad \text{und} \quad k = \frac{b}{a}.$$

Nun hatte ich im § 25 gefunden:

$$a = 0{,}4818 \,.\, 10^{-10} \text{ sec} \times \text{grad},$$
$$b = 6{,}885 \,.\, 10^{-27} \text{ erg} \times \text{sec}.$$

Folglich:

$$h = 6{,}885 \,.\, 10^{-27} \text{ erg} \times \text{sec},$$
$$k = 1{,}429 \,.\, 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}}.$$

Die inzwischen aus den Messungen von F. Kurlbaum und von O. Lummer und E. Pringsheim von mir berechneten Werte[1]) sind dagegen:

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 563. 1901.

$$(59)\qquad \begin{cases} h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \times \text{sec}, \\ k = 1{,}346 \cdot 10^{-16}\ \frac{\text{erg}}{\text{grad}}. \end{cases}$$

Die Divergenz der Zahlen entspricht den Abweichungen in den Messungen der verschiedenen Beobachter und giebt ein ungefähres Bild der zur Zeit noch bestehenden Unsicherheit.

Die räumliche Entropiedichte $s$ in einem Punkte $\mathfrak{O}$ des durchstrahlten Feldes bestimmen wir ebenso wie die räumliche Energiedichte $u$ aus der Betrachtung aller Strahlen, die diesen Punkt durchkreuzen. Wir schreiben nämlich jedem Strahlenbündel ausser einer bestimmten Energie auch eine bestimmte Entropie zu, die sich mit dem Bündel zusammen fortpflanzt. Denken wir uns, ganz ebenso wie im § 11, vom Punkte $\mathfrak{O}$ aus in irgend einer Richtung $(\vartheta, \varphi)$ eine kleine geradlinige Strecke $r$ gezogen und sowohl im Anfangspunkt als auch im Endpunkt der Strecke je ein Flächenelement, $d\sigma$ und $d\sigma'$, senkrecht zu $r$ gelegt, so sei der Gesamtbetrag der Entropie, welche in der Zeit $dt$ durch die Fläche $d\sigma$ der Fläche $d\sigma'$ zugestrahlt wird, gleich dem Ausdruck:

$$(60)\qquad dt \cdot \frac{d\sigma\, d\sigma'}{r^2} \cdot L,$$

wobei $L$, die Intensität der Entropiestrahlung in der Richtung $(\vartheta, \varphi)$, auf sogleich näher anzugebende Weise von der Beschaffenheit der Strahlung abhängt.

Wir setzen $L$, ebenso wie $K$ im § 11, gleich einer Summe, deren Glieder durch die einzelnen monochromatischen in derselben Richtung fortschreitenden Strahlen bedingt werden, und definiren die Intensität der Entropiestrahlung eines monochromatischen, vollständig[1]) polarisirten Strahles von der Intensität $\mathfrak{K}$ durch den Ausdruck[2]):

$$(61)\qquad \mathfrak{L} = \frac{k\nu^2}{c^2}\left\{\left(1 + \frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\right)\log\left(1 + \frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\right) - \frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\log\frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\right\}.$$

1) Ob der Strahl geradlinig oder elliptisch polarisirt ist, macht für seine Entropie keinen Unterschied, da man jeden vollständig elliptisch polarisirten Strahl ohne weiteres, z. B. durch totale Reflexion, in einen geradlinig polarisirten verwandeln kann.

2) Dieser Ausdruck ergiebt sich, wenn man die Gleichung (58) mit den allgemein gültigen Gleichungen (10) und (6) meiner Abhandlung über Entropie und Temperatur strahlender Wärme, Ann. d. Phys. 1. p. 719. 1900, combinirt.

In dem allgemeinen Fall, dass der monochromatische Strahl nicht geradlinig polarisirt ist, sondern die Hauptintensitäten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ besitzt[1]), beträgt die Intensität seiner Entropiestrahlung:

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}',$$

wobei $\mathfrak{L}'$ den Wert bedeutet, den der Ausdruck (61) für $\mathfrak{R}'$ statt $\mathfrak{R}$ annimmt. Daher ist die Gesamtintensität der Entropiestrahlung in der Richtung $(\vartheta, \varphi)$:

$$L = \int_0^\infty d\nu\,(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}')$$

und die räumliche Entropiedichte, analog der Gleichung (27):

$$s = \frac{1}{c}\int L \,.\, d\Omega.$$

Sind speciell alle durch $\mathfrak{O}$ gehenden Strahlen unpolarisirt und ihre Intensität unabhängig von der Richtung, so wird $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$, und:

$$L = 2\int_0^\infty d\nu \,.\, \mathfrak{L}. \tag{62}$$

Daher:

$$s = \frac{4\pi L}{c} = \frac{8\pi}{c}\cdot\int_0^\infty d\nu \,.\, \mathfrak{L}. \tag{63}$$

### § 28. Vermehrung der Entropie.

Wir wollen nun, auf Grund vorstehender Definition, die Aenderung berechnen, welche die totale Entropie $S_t$ unseres Systems im Zeitelement $dt$ erleidet. Wir halten uns dabei genau an die analoge im § 16 für die Energie des Systems durchgeführte Rechnung.

Wenn gar kein Resonator vorhanden ist, so behält ein jedes der im Felde vorhandenen unendlich vielen Strahlenbündel beim geradlinigen Fortschreiten zugleich mit seiner Intensität seine Entropie unverändert bei, auch bei der Reflexion an einer als eben und absolut spiegelnd vorausgesetzten Grenzfläche des Feldes. Durch die Strahlungsvorgänge im

1) Vgl. oben § 11.

freien Felde kann also keine Entropieänderung des Systems hervorgerufen werden.[1]) Dagegen bewirkt jeder Resonator im allgemeinen eine Entropieänderung der ihn treffenden Strahlenbündel. Berechnen wir die ganze Entropieänderung, welche der oben betrachtete Resonator in der Zeit $dt$ in dem ihn umgebenden Felde hervorruft. Dabei brauchen wir nur diejenigen monochromatischen Strahlen zu berücksichtigen, welche der Schwingungszahl $\nu$ des Resonators entsprechen, da die übrigen durch ihn gar nicht alterirt werden.

In der Richtung $(\vartheta, \varphi)$ wird der Resonator von einem irgendwie polarisirten Strahlenbündel getroffen, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, und dessen Entropiestrahlung daher die Intensität $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ besitzt. Dieses Strahlenbündel lässt, der Bedeutung des Ausdruckes (36) gemäss, in der Zeit $dt$ die Entropie:

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') . dt . \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} . d\Omega$$

auf den Resonator fallen, und dadurch wird auf der Seite der ankommenden Strahlen der nämliche Entropiebetrag dem Felde entzogen. Auf der anderen Seite geht vom Resonator in derselben Richtung $(\vartheta, \varphi)$ ein in bestimmter Weise polarisirtes Strahlenbündel aus, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$, und dessen Entropiestrahlung daher die entsprechende Intensität $\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}'''$ besitzt. Dadurch wird dem umgebenden Felde in der Zeit $dt$ die Entropie:

$$(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''') dt . \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} . d\Omega$$

zugeführt. Im ganzen beträgt also die in der Zeit $dt$ eingetretene Entropieänderung des den Resonator umgebenden Feldes, durch Subtraction des vorletzten Ausdruckes vom letzten und Integration über $d\Omega$:

$$(64) \qquad dt . \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} . \int d\Omega (\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}').$$

1) Vgl. hierzu W. Wien, Ann. d. Phys. **3**. p. 534. 1900; l. c. **4**. p. 422. 1901; ferner J. D. van der Waals jr., Jubelband für H. A. Lorentz, p. 587. 1900, welche teilweise abweichende Meinungen geäussert haben.

Nimmt man dazu die in derselben Zeit erfolgte Entropieänderung des Resonators:

$$\frac{dS}{dt} \cdot dt = \frac{dS}{dU} \cdot \frac{dU}{dt} \cdot dt,$$

so ergiebt sich durch Addition zu (64) und Summation über alle Resonatoren die gesuchte Aenderung der totalen Entropie des Systems:

$$\frac{dS_t}{dt} \cdot dt = dt \cdot \sum \left[ \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega \,(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}') + \frac{dS}{dU} \cdot \frac{dU}{dt} \right].$$

Wir wollen nun weiter den Nachweis führen, dass der Ausdruck hinter dem $\sum$-Zeichen stets positiv ist, inbegriffen den Grenzfall Null. Zu diesem Zwecke setzen wir für $dU/dt$ den in (40) gegebenen Wert und erhalten dadurch:

$$\frac{dS_t}{dt} = \sum \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega \left( \mathfrak{L}'' - \mathfrak{K}'' \frac{dS}{dU} + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{K}''' \frac{dS}{dU} - \mathfrak{L} + \mathfrak{K} \frac{dS}{dU} - \mathfrak{L}' + \mathfrak{K}' \frac{dS}{dU} \right).$$

Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, dass der eingeklammerte Ausdruck für alle beliebigen Werte der positiven Grössen $U$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\vartheta$, $\omega$ positiv ist, während nach Gleichung (38):

$$\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K} \cos^2\omega + \mathfrak{K}' \sin^2\omega \tag{65}$$

und nach Gleichung (39):

$$\mathfrak{K}''' = (\mathfrak{K} \sin^2\omega + \mathfrak{K}' \cos^2\omega) \cos^2\vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2\vartheta.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\mathfrak{K} \sin^2\omega + \mathfrak{K}' \cos^2\omega = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}' - \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}_0''', \tag{66}$$

so ist hiernach:

$$\mathfrak{K}''' = \mathfrak{K}_0''' \cos^2\vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2\vartheta \tag{67}$$

Wir wollen zunächst das Glied:

$$\mathfrak{L}''' - \mathfrak{K}''' \frac{dS}{dU} = f(\mathfrak{K}''')$$

ins Auge fassen, indem wir darin $U$ und folglich auch $dS/dU$ als constant, dagegen $\mathfrak{K}'''$ und folglich auch $\mathfrak{L}'''$ als variabel

betrachten. Mit Berücksichtigung von (61) und (58) ergiebt sich dann:

$$\frac{df}{d\mathfrak{R}'''} = \frac{d\mathfrak{L}'''}{d\mathfrak{R}'''} - \frac{dS}{dU}$$

$$= \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu^3}{c^3\mathfrak{R}'''}+1\right) - \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu}{U}+1\right),$$

$$\frac{d^2f}{d\mathfrak{R}'''^2} = -\frac{k}{h\nu\mathfrak{R}'''}\cdot\frac{1}{1+\frac{c^3\mathfrak{R}'''}{h\nu^3}} < 0.$$

Daraus folgt, dass die Function $f(\mathfrak{R}''')$ ein einziges Maximum besitzt, und zwar für $\mathfrak{R}''' = (\nu^3/c^3)\,U$.

Da nun nach (67) $\mathfrak{R}'''$ zwischen $\mathfrak{R}_0'''$ und $\nu^3\,U/c^3$ liegt, so ist jedenfalls:

$$f(\mathfrak{R}''') > f(\mathfrak{R}_0'''),$$

d. h.

$$\mathfrak{L}''' - \mathfrak{R}'''\frac{dS}{dU} > \mathfrak{L}_0''' - \mathfrak{R}_0'''\frac{dS}{dU},$$

und um den Beweis durchzuführen, genügt es, den Ausdruck:

$$\mathfrak{L}'' - \mathfrak{R}''\frac{dS}{dU} + \mathfrak{L}_0''' - \mathfrak{R}_0'''\frac{dS}{dU} - \mathfrak{L} + \mathfrak{R}\frac{dS}{dU} - \mathfrak{L}' + \mathfrak{R}'\frac{dS}{dU}$$

oder, was nach (66) dasselbe ist, den Ausdruck:

$$(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}_0''') - (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}')$$

als positiv zu erweisen. Hierzu wollen wir setzen:

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' + \mathfrak{R}_0''' = \mathfrak{S}.$$

$\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}_0'''$ liegen nach (65) und (66) zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$.

Betrachten wir jetzt die Grösse:

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = F(\mathfrak{R})$$

als Function von $\mathfrak{R}$ allein, indem wir $\mathfrak{S}$ constant nehmen und daher $\mathfrak{R}'$ als von $\mathfrak{R}$ abhängig ansehen, so handelt es sich nur noch um das Vorzeichen des Ausdruckes:

$$F(\mathfrak{R}'') - F(\mathfrak{R}).$$

Nun ergiebt sich nach (61) durch Differentiation:

$$\frac{dF}{d\mathfrak{R}} = \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu^3}{c^3\mathfrak{R}}+1\right) - \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu^3}{c^3\mathfrak{R}'}+1\right)$$

$$\frac{d^2F}{d\mathfrak{R}^2} = -\frac{k}{h\nu\mathfrak{R}}\cdot\frac{1}{1+\frac{c^3\mathfrak{R}}{h\nu^3}} - \frac{k}{h\nu\mathfrak{R}'}\cdot\frac{1}{1+\frac{c^3\mathfrak{R}'}{h\nu^3}} < 0.$$

Daraus folgt, dass die Function $F(\mathfrak{R})$ ein einziges Maximum besitzt, und zwar für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' = (\mathfrak{S}/2)$, und dass sie zu beiden Seiten dieses Maximums symmetrisch abfällt. Je näher also das Argument $\mathfrak{R}$ dem Werte $\mathfrak{S}/2$ kommt, einerlei von welcher Seite her, desto grösser wird der Wert von $F$.

Nun liegt $\mathfrak{R}''$ dem Werte $\mathfrak{S}/2$, welcher das arithmetische Mittel sowohl von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, als auch von $\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}_0'''$ bildet, jedenfalls näher als $\mathfrak{R}$, weil $\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}_0'''$ zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ liegen. Folglich ist $F(\mathfrak{R}'') > F(\mathfrak{R})$, und damit ist der Beweis für die Vermehrung der Entropie geliefert.

Jeder der betrachteten Strahlungsvorgänge verläuft also einseitig in dem Sinne wachsender Entropie, bis mit dem Maximum der Entropie auch der stationäre Strahlungszustand erreicht wird, welcher durch die Beziehungen charakterisirt ist:[1])

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}_0''' = \mathfrak{R}''' = \frac{\nu^3 U}{c^3}.$$

Betrachten wir die in dem Beweisgang benutzten Voraussetzungen, so erhellt leicht, dass genau der nämliche Beweis auch in dem allgemeineren Falle geführt werden könnte, dass statt der Definition (58) eine andere Definition der Entropie $S$ zu Grunde gelegt würde, falls nur stets:

$$\frac{d^2 S}{d U^2} > 0$$

und falls für $\mathfrak{L}$ als Function von $\mathfrak{R}$ der nach der zu (61) gemachten Anmerkung zu berechnende Ausdruck genommen wird. Diesen Satz habe ich schon bei einer früheren Gelegenheit[2]) ausgesprochen, ohne jedoch damals einen Beweis dafür mitzuteilen.

### § 29. Thermodynamische Folgerungen.

Durch Identificirung der elektromagnetischen mit der thermischen Entropie ergiebt sich eine Reihe von thermodynamischen Beziehungen, deren wichtigste im Folgenden berechnet werden sollen.

---

1) Eine directe, durch die Beschränkung auf den stationären Strahlungszustand bedeutend vereinfachte Ableitung dieser Beziehungen habe ich kürzlich in der Physikalischen Zeitschrift, 2. p. 530. 1901, entwickelt.

2) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 730. 1900.

Zunächst erhält man aus (58) für die Temperatur $\vartheta$ eines monochromatisch schwingenden linearen Resonators mit der Energie $U$:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{dS}{dU} = \frac{k}{h\nu} \log\left(\frac{h\nu}{U} + 1\right)$$

oder:

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}$$

und ebenso aus (61) für die Temperatur $\vartheta$ eines monochromatischen geradlinig polarisirten Strahles mit der Intensität $\mathfrak{K}$:

(68) $$\frac{1}{\vartheta} = \frac{d\mathfrak{L}}{d\mathfrak{K}} = \frac{k}{h\nu} \log\left(\frac{h\nu^3}{c^2\mathfrak{K}} + 1\right)$$

oder:

$$\mathfrak{K} = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}.$$

Im stationären Strahlungszustand besitzen alle Strahlen und alle Resonatoren die nämliche Temperatur. Daher ergiebt der letzte Ausdruck die Verteilung der Energie auf alle verschiedenen Schwingungszahlen $\nu$ im Normalspectrum. Die Gesamtintensität $K$ der Strahlung in irgend einer Richtung ist dann nach (25):

$$K = 2\int_0^\infty \mathfrak{K}\, d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3\, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}$$

und durch Entwickelung des Integrandus in eine Potenzreihe und gliedweise Integration derselben:

$$K = \frac{2h}{c^2} \cdot 6\left(\frac{k\vartheta}{h}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right)$$
$$= \frac{12\,\varepsilon k^4 \vartheta^4}{c^2 h^3},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = 1{,}0823 = \varepsilon.$$

Die räumliche Energiedichte der Gesamtstrahlung ist nach (28):

$$u = \frac{4\pi K}{c} = \frac{48\pi\varepsilon k^4 \vartheta^4}{c^3 h^3}.$$

Dagegen die räumliche Energiedichte der monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl $\nu$:

$$u = \frac{8\pi\mathfrak{K}}{c} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}.$$

In analoger Weise lässt sich auch die Entropie $S$ des Resonators und die Entropie $\mathfrak{S}$ der fortschreitenden Strahlung, sowie die räumliche Entropiedichte $\mathfrak{s}$ der monochromatischen Strahlung und die räumliche Entropiedichte $s$ der Gesamtstrahlung durch die Temperatur $\vartheta$ ausdrücken.

### § 30. Temperatur homocentrischer Strahlen.

Zum Schlusse berechne ich noch, den Gültigkeitsbereich einer früher[1]) von mir aufgestellten Formel erweiternd, die Temperatur einer monochromatischen unpolarisirten Strahlung, die von einer kleinen Fläche (Spalt) in senkrechter Richtung emittirt worden und durch ein beliebiges System centrirter brechender Kugelflächen nahe der Axe hindurchgegangen ist. Eine solche Strahlung besteht aus homocentrischen Bündeln und entwirft daher hinter der letzten brechenden Fläche ein reelles oder virtuelles Bild der ersten emittirenden Fläche, wiederum senkrecht zur Axe.

Bezeichnet man ebenso wie früher die gesamte Intensität der monochromatischen Strahlung mit $J_\nu$, die Grösse der Bildfläche mit $F$, den räumlichen Oeffnungswinkel des in einem Punkte des Bildes zusammentreffenden Strahlenkegels mit $\omega$, so ist nach Gleichung (18) der citirten Abhandlung:

$$J_\nu = 2\mathfrak{K}F\omega,$$

folglich durch Berechnung von $\mathfrak{K}$ hieraus und Substitution in (68):

$$\vartheta = \frac{h\nu}{k} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{2h\nu^3 F\omega}{c^2 J_\nu} + 1\right)}.$$

Wenn das Medium, in welchem die Strahlung verläuft, nicht das Vacuum ist, sondern den Brechungsexponenten $n$ besitzt, so ist in dem letzten Ausdruck $c/n$ statt $c$ zu setzen,

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 734. 1900.

und man erhält, mit Einsetzung von $c = 3 . 10^{10}$, sowie der Werte von $h$ und $k$ aus (59):

$$\vartheta = \frac{0{,}487 . 10^{-10} . \nu}{\log\left(\frac{1{,}46 . 10^{-47} . \nu^3 n^2 F \omega}{J_\nu} + 1\right)} \text{ Grad Cels.}$$

Hierbei ist der natürliche Logarithmus zu nehmen, und $J_\nu$ ist in erg, $\nu$ in reciproken Secunden, $F$ in Quadratcentimetern auszudrücken.

Diese Formel giebt die absolute Temperatur eines monochromatischen Strahles für jede Intensität und jede Wellenlänge. Doch wird man bei sichtbaren Strahlen den Summanden 1 im Nenner fast immer weglassen können; dann reducirt sich die Formel auf die früher angegebene.

(Eingegangen 16. October 1901.)

## 10. *Ueber die elektrischen Eigenschaften der Legirungen von Kupfer und Kobalt; von G. Reichardt.*

Angesichts der Bedeutung, welche einige Legirungen von Mangan und Nickel mit Kupfer gewonnen haben[1]), lag es nahe, auch die Legirungen von Kupfer und dem dem Nickel in chemischer Beziehung nahe stehenden Kobalt zu untersuchen. In letzter Linie wurde vorliegende Arbeit veranlasst durch einige ältere Untersuchungen über die Thermoelektricität der Metalle, nach denen das Kobalt in der thermoelektrischen Reihe der Metalle eine ganz besondere Stellung einnimmt und eine erheblich höhere Spannung gegen Blei besitzen soll, als Nickel.[2]) Da die Legirungen dieses Metalles mit Kupfer sämtlich negativer sind als das reine Nickel, wurde für Kupfer-Kobalt-Legirungen ähnliches Verhalten vermutet und somit die Auffindung von Legirungen mit sehr hoher Thermokraft für wahrscheinlich gehalten.

### Mechanische Bearbeitung des Rohmateriales.

Die Legirungen von der weiter unten angegebenen Zusammensetzung wurden von der Firma Basse & Selve zu Altena i. W. bezogen. Da die Firma erklärte, dass es ihr

1) K. Feussner, Neue Materialien für elektrische Messwiderstände, Verhandlungen des int. El.-Congresses zu Frankfurt a. M., September 1891. Legirungen von etwa 50 Proc. Ni und 50 Proc. Cu (Constantan) haben einen specifischen Widerstand von 52 Mikrohm cm/cm², einen Temperaturcoefficient von nahezu Null und eine Thermokraft gegen Kupfer von $37 . 10^{-6}$ Volt bei Zimmertemperatur. Eine Legirung von 84 Proc. Cu, 12 Proc. Mn und 4 Proc. Ni (Manganin) hat den spec. Widerstand 43, den Temperaturcoefficient Null und eine Thermokraft gegen Kupfer von $1 . 10^{-6}$ Volt für 1° C.

2) Knott u. McGregor, Proc. Roy. Soc. 9. p. 421. 1876; Becquerel, Ann. de chim. et de phys. 8. p. 415. 1864; vgl. auch G. Wiedemann, Elektricität 2. p. 289. 1894.

nicht möglich gewesen sei, Drähte aus diesen Materialien herzustellen, wurde die weitere Bearbeitung derselben in der Reichsanstalt vorgenommen. Die Proben waren in runden, gegossenen Stangen von 2 cm Durchmesser und 17 cm Länge geliefert worden, welche auf Schnittflächen gleichmässig und mit Ausnahme der Legirung Nr. 10 (47 Proc. Co) frei von Blasen und Rissen erschienen. Ihre Farbe durchlief alle Töne zwischen dem Rot des Kupfers und dem Stahlgrau des Kobalts. Die Schwierigkeit ihrer mechanischen Behandluug nahm mit steigendem Kobaltgehalt zu. Aus den Legirungen Nr. 1—7 [1]) (1—15 Proc. Co) liessen sich leicht mit einer Kreissäge dünne Streifen herausschneiden, welche ohne erhebliche Mühe zu Drähten bis 0,25 mm ausgezogen werden konnten. Von Nr. 8 und 9 (25 und 35 Proc. Co) waren nur durch besondere Kunstgriffe kürzere Drahtstücke von etwa $^1/_2$ mm Durchmesser zu erhalten. Die Legirungen mit mehr als 40 Proc. Co waren so hart, dass sie von der Kreissäge kaum noch angegriffen wurden. Sie zeigten sich in der Hitze wie bei gewöhnlicher Temperatur spröde und waren mit dem Zieheisen nicht mehr zu behandeln. Die Untersuchungen waren daher zunächst auf Legirungen bis zu 40 Proc. Co beschränkt worden.

Später gelang es indes, auch die übrigen Legirungen zu bearbeiten. Sie wurden nämlich auf einer Hobelmaschine mit einem schmalen, sehr harten Stahl in Streifen von 2 mm Länge und Breite zerschnitten. Die Legirung Nr. 10 enthielt leider eine grosse Zahl von feinen Rissen, sodass die Stäbe während des Hobelns mehrmals zersprangen. Die einzige für die Messungen benutzbare Probe hatte eine Länge von nur 8 cm. Auf den Bruchflächen dieser Legirung sah man mit blossem Auge graue und rote Metallmassen getrennt nebeneinander liegen. Die Probe war entweder nicht genügend durchgeschmolzen oder es hatten sich aus dem ursprünglich homogenen Schmelzfluss Legirungen oder chemische Verbindungen verschiedener Zusammensetzung ausgeschieden. Die Stabform erwies sich in der Folge als eine für die Untersuchungen durchaus bequeme und dürfte sich in allen Fällen empfehlen, wo ein auf seine elektrischen Eigenschaften zu prüfendes Metall infolge

1) Vgl. die Tabelle p. 842.

seiner Härte und Sprödigkeit nicht mehr in Draht verwandelt werden kann.[1])

### Vorprüfungen.

Um etwaige Inhomogenität der Legirungen festzustellen, wurde von den Drähten je ein längeres Stück ausgespannt und ein passender Strom von gleichbleibender Stärke hindurchgeschickt. Auf dem Draht war ein Schlitten verschiebbar, welcher durch zwei Contactschneiden zwei um je 10 cm voneinander entfernte Punkte des Drahtes mit einem Galvanometer verband. War der Widerstand irgendwo besonders hoch, so liessen sich stets zwischen den Schneiden Stellen finden, wo die Oberfläche rissig war oder durch Einschluss von Oxyden absplitterte. Derartige Stellen wurden verworfen. Die an den übrigen Stücken eines und desselben Drahtes erhaltenen Ausschläge wichen aber dennoch bis zu 10 Proc. voneinander ab. Dass die specifischen Widerstände um ebensoviel voneinander verschieden waren, ging hieraus allerdings noch nicht hervor, da die Durchmesser der Drähte nicht an allen Stellen genau dieselben waren und deren genaue Bestimmung sich dadurch erschwerte, dass die Querschnitte nicht vollständig kreisrund waren.

Bei den Stäben erschien eine derartige Calibrirung zwecklos, da die Querschnitte hier noch unregelmässiger waren. Aus dem Aussehen der Bruchflächen ging ferner hervor, dass die Structur der Legirungen ziemlich ungleichmässig war. An manchen Stellen brachen die Stäbe, ohne sich vorher zu biegen, mit grob krystallinischen Bruchflächen auseinander, an anderen Stellen vertrugen sie Biegungen bis zu 1 cm Radius und zeigten hier einen sehr feinkörnigen Bruch. Die von Behrens[2]) vorgenommene mikroskopische Prüfung geätzter Schliffe von Kupfer mit 20 Proc. Kobalt und von Messing mit 5 Proc.

1) Es würde auf diese Weise auch möglich sein, die interessanten Untersuchungen von Haas an Cu-Zn-Legirungen, welche aus demselben Grunde bei 47 Proc. Zn-Gehalt abbrechen, auf Legirungen mit beliebig grösserem Zinkgehalt auszudehnen. Vgl. R. Haas, Wied. Ann. **52**. p. 673. 1894; Vgl. auch C. Liebenow, Encyclop. der Elektrochem. **10**. p. 44. 1898.

2) H. Behrens, Das mikroskopische Gefüge der Metalle und Legirungen, p. 127.

Kobalt scheint darauf hin zu deuten, dass die Co-Cu-Legirungen die Neigung haben, Verbindungen von verschiedenem Kobaltgehalt auskrystallisiren zu lassen.

Von den erhaltenen Drähten der Legirungen 1—9 wurden je drei Stücke, *A*, *B* und *C* entnommen. Die Proben *A* dienten zur chemischen Analyse, *B* und *C* für die elektrischen Messungen. Von den Stäben (Legirungen 10—14) wurden 1—2 Proben zur Ermittelung der Zusammensetzung, je eine Probe für die elektrischen Messungen verwendet.

### Die Analysen.

Die chemische Untersuchung der Legirungen 1—9 wurden im chemischen Laboratorium der Reichsanstalt von den Herren Funk und Dietz ausgeführt. Die Legirungen Nr. 10—14 wurden vom Verfasser analysirt und zwar nach dem elektrolytischen Verfahren[1]), welches Einfachheit und Zuverlässigkeit verbindet. Etwa 1,5 g der zu untersuchenden Probe wurde in Salpetersäure gelöst. Da Kupfer in Gegenwart grösserer Mengen von Salpetersäure sich elektrolytisch nicht vollständig niederschlagen lässt, wurden die Nitrate auf einem Wasserbade zur Trockne eingedampft, die Rückstände bis zum Aufhören des Entweichens roter Dämpfe erwärmt und die Oxyde in verdünnter Schwefelsäure im Ueberschuss gelöst. Die Oxyde durften dabei nicht bis zum Glühen erhitzt werden, da sich sonst neben $Co_2O_3$ auch $Co_3O_4$ bildete, welches in Schwefelsäure unlöslich ist. Das Sulfatgemisch wurde auf 100 ccm verdünnt und in einem cylindrischen Platintiegel von 6 cm Durchmesser unter Verwendung eines Platinbleches von $3 \times 4$ cm als Anode 24 Stunden lang elektrolysirt. Die Stromstärke betrug 0,3 Amp., die gesamte Strommenge bei einem Versuch mithin 7,2 Ampèrestunden, welche zur Fällung von 8,5 g Kupfer genügt hätten. Die Abwesenheit von Kupfer nach Unterbrechung des Stromes wurde ausserdem noch durch eine Prüfung mit $H_2S$ festgestellt. Durch die Elektrolyse wird die vorher violette Lösung lebhaft hellgrün, auch scheiden sich an der Anode zerfliessliche Krystalle eines grünen Salzes aus; dieselben stimmen in ihren Reactionen mit dem von Hugh Marshall erhaltenen Kobaltisulfat $Co_2(SO_4)_3$

1) A. Classen, **Quantitative Analyse durch Elektrolyse.**

überein. Durch Stehen an der Luft oder Erwärmen wird die Lösung unter reichlicher Sauerstoffentwickelung rot. Der erhaltene Kupferniederschlag wurde mehrmals mit warmem, destillirtem Wasser behandelt, mit absolutem Alkohol getrocknet und gewogen.

Um das Kobalt nicht nur aus der Differenz der Gewichte, sondern auch direct festzustellen, wurde die rote saure Sulfatlösung mit Ammoniak im Ueberschuss versetzt und wie oben elektrolysirt. Nach Beendigung des Versuches war der Elektrolyt, welcher jetzt nur noch aus Ammoniumsulfat bestand, farblos. Etwa in der Legirung enthaltenes Eisen war in der Lösung als Hydroxyd suspendirt und wurde, wenn es in erheblicher Menge vorhanden war, nach Filtration der Lösung und Verbrennung des Filters als Eisenoxyd bestimmt. Die weitere Behandlung des fest am Tiegel haftenden Kobaltniederschlages war dieselbe wie diejenige des Kupfers.

### Beschreibung der Apparate und Methoden bei den elektrischen Messungen.

#### a) Prüfung der Drähte.

Zur Bestimmung des specifischen Widerstandes und seines Temperaturcoefficienten dienten Proben, welche weiter unten mit $B$ bezeichnet sind. Bedeutet $q_{\text{qcm}}$ den Querschnitt, $l_{\text{cm}}$ die Länge, $w$ den gemessenen Widerstand in Ohm, so ist der specifische Widerstand

$$\sigma = \frac{q\,w}{l} \cdot 10^6 \text{ Mikrohm cm/cm}^3.$$

Der Querschnitt wurde in bekannter Weise aus zwei Wägungen in Luft und in Wasser ermittelt. Die erhaltenen Zahlen liessen, soweit es sich um gleich starke Drähte handelte, deutlich die Reihenfolge erkennen, in welcher sie das Zieheisen passirt hatten, dessen Löcher sich durch jede Benutzung um ein Geringes erweiterten. Nach Feststellung des Querschnittes wurden die Drähte mit ihren freien Enden unter Verwendung eines leicht schmelzenden Silberlotes stumpf gegen die schmalen Flächen von Kupferstücken von 2 cm Länge, 1 cm Breite und 0,4 cm Dicke gelötet.

Die Länge der Drähte wurde während einer Belastung durch 500 g mit einem Maassstabe gemessen.

Die Drähte wurden hierauf unter sorgfältiger Vermeidung von scharfen Biegungen bifilar auf mit Einschnitten versehene Glimmerplatten von 10 cm Länge und 4 cm Breite gewickelt. Schliesslich wurde der Glimmer mit den Kupferstücken verschraubt.

In fast allen Metallen entstehen durch mechanische Bearbeitung Spannungen und Structurveränderungen, welche eine Zunahme der Härte und des specifischen Widerstandes zur Folge haben. Da diese Veränderungen erfahrungsmässig bei gewöhnlicher Temperatur nur sehr langsam zurückgehen, ihr Verschwinden durch Wärmewirkung aber stark beschleunigt wird[1]), wurden die Drähte nach einer vorläufigen Feststellung des Widerstandes zunächst in einem kupfernen Heizkasten 48 Stunden lang einer Temperatur von 160° C. ausgesetzt. Da die weiteren Versuche nur bis 150° C. ausgedehnt werden sollten, war anzunehmen, dass während derselben Aenderungen des Gefüges nicht mehr stattfinden würden.

Die endgültigen Widerstandsmessungen geschahen in Wheatstone'scher Brückenschaltung. In Fig. 1 ist die Aufstellung schematisch wiedergegeben.

$R$ ist ein Widerstandskasten mit Stöpseln, welcher zwei Zweige der Brücke enthält. $B_1$ und $B_2$ sind zwei Petroleumbäder. In einem derselben befindet sich, anschliessend an zwei kupferne Quecksilbernäpfe, $C_2$ und $C_3$, der Normalwiderstand $N$ als dritter Brückenzweig. Der zu messende Drahtwiderstand ist mit den angelöteten Kupferstücken an zwei kupferne Schienen geschraubt, welche in die Quecksilbernäpfe $C_2$ und $C_1$ eingelegt sind. Bei $SS$ haben die Schienen zwei nach unten gehende Biegungen, welche die von den Heizbädern übergeleitete Wärme an das Bad $B_2$ abgeben.

Zur Herstellung der Beobachtungstemperaturen diente eine Reihe von Bädern $B_3$ bis $B_7$, welche nebeneinander auf einer gemeinsamen, auf Rollen $L$ beweglichen Grundplatte befestigt

1) Nach Wiechert (Wied. Ann. **52.** p. 67. 1894) steigt die Geschwindigkeit der Widerstandsänderung sehr viel rascher als die Temperatur; aus Versuchen an Manganin ging hervor, dass die Structuränderungen dieses Materiales bei 140° C. etwa $3^1/_2$ mal so schnell erfolgen, als bei 130°. Aehnliche Verhältnisse ergeben sich auch aus den Versuchen von Cohn, Wied. Ann. **41.** p. 71. 1892.

sind. Jedes Bad besteht aus einem kupfernen Kasten von etwa 3 *l* Inhalt, welcher seitlich von einem Holzkasten, einer Filzschicht und schliesslich zur Verminderung der Wärmeausstrahlung mit dünnem, hochpolirtem Nickelblech umgeben ist. In den Kasten $B_3$ ist ein cylindrisches Gefäss eingesetzt, das für die Messungen mit Benzin gefüllt und von schmelzendem Eise umgeben ist, die übrigen Kasten werden mit Petroleum, für Temperaturen über 100° C. mit Paraffinöl gefüllt.

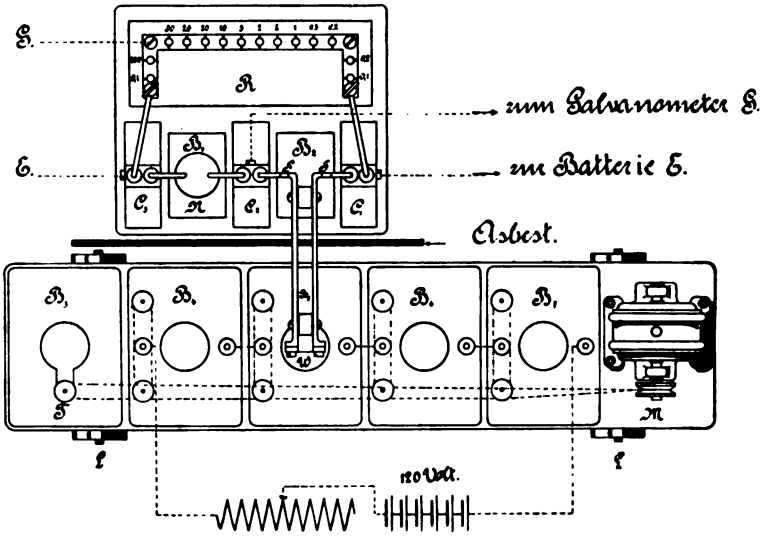



Fig. 1.

Die Erwärmung geschieht in jedem der Bäder $B_4$ bis $B_7$ durch zwei Heizspiralen, welche auf die Rohre von Turbinen gewickelt sind, die ihrerseits am Deckel befestigt sind und hier in den Schnurscheiben *T* endigen. Alle Heizwiderstände sind hintereinander geschaltet und mit einem Regulirwiderstand an eine Accumulatorenbatterie von 120 Volt angeschlossen; sie betragen der Reihe nach 0,5, 2,5, 5 und 7,5 Ohm, die von ihnen erzeugten Temperaturerhöhungen stehen annähernd in gleichem Verhältnis. Auf demselben fahrbaren Grundbrett mit den Bädern ist ein kleiner Elektromotor befestigt, welcher mittels eines Schnurlaufes alle Rührwerke in lebhafte Bewegung versetzt. Eine Stunde nach der Inbetriebsetzung sind

die Temperaturen constant, sie wurden auf etwa 25, 60, 100 und 150° C. einregulirt.

Die Widerstände der Zuleitungen betrugen selbst in den Schienen nur einige Zehntausendstel Ohm und konnten daher stets vernachlässigt werden. Die Stärke des Messstromes wurde so gewählt, dass der Ausschlag des Spiegelgalvanometers für eine Aenderung des Widerstandes um 0,1 Proc. etwa 100 Sct. betrug.

Die dritten Drahtproben *C* dienten zur Bestimmung der *thermoelektrischen Kraft gegen Kupfer (e).* Etwa 1 m jeder Probe wurde an den Enden mit Silber an zwei 1 mm starke Kupferdrähte gelötet. In ihren übrigen Teilen waren die Drähte durch Glasrohre oder durch Bewickelung mit Gummiband vor gegenseitiger Berührung geschützt, die eine Lötstelle aller Drähte tauchte in das gemeinsame, von Eis umgebene Benzinbad $B_3$, die anderen Lötstellen befanden sich in einem der oben beschriebenen geheizten Bäder oder einem von einer Kältemischung umgebenen Benzinbad. Die freien Enden der Kupferdrähte führten zu einem Drehspulen-Spiegelgalvanometer von Siemens & Halske mit 10000 Ohm Widerstand, dessen Empfindlichkeit für verschiedene Ausschläge an der concentrisch zur Drehaxe des Spiegels kreisförmig gebogenen Scala im Laufe der Versuche mehrmals bestimmt wurde. Zu diesem Zwecke wurde ein Accumulator durch einen bis zu den Einheiten unterteilten und seinem Werte nach genau bekannten Widerstand von $W = 50000$ Ohm geschlossen. Nach mehrstündigem Stromdurchgang wurde die Spannung der Zelle in dieser Schaltung durch Compensation gegen die elektromotorische Kraft eines Cadmiumnormalelementes bestimmt. Erhält man durch Abzweigen von dem Widerstand $w$ nach dem Galvanometer den Ausschlag $\alpha$, so ist die Spannung, welche einem Scalenteil entspricht, für diesen Ausschlag

$$K = \frac{E \cdot \frac{w \cdot w_g}{w + w_g}}{\alpha \cdot W} \text{ Volt},$$

worin $E$ die Spannung des Accumulators, $w_g$ den Widerstand des Galvanometers bedeutet. Der Wert von $K$ betrug im Mittel für Ausschläge von 100—500 Sct. $2{,}81_8 \cdot 10^{-6}$ Volt.

Um das in dieser Schaltung bis zu $1300 . 10^{-6}$ Volt gehende Messbereich zu erweitern, schaltete man vor das Galvanometer Widerstände bis zum Betrage von 100000 Ohm, für welche $K$ wie oben durch Versuche bestimmt wurde.

Bei der Zusammenstellung der bis hierher für $\alpha$, $\sigma$ und $e$ gefundenen Werte zeigten sich erhebliche Abweichungen von einer systematischen Beziehung zum Kobaltgehalt der Legirungen. Es schien nicht ausgeschlossen, dass die elektrisch geprüften Drahtstücke eine andere Zusammensetzung hätten als die analysirten. Es wurden deshalb nachträglich die zur Bestimmung von $\alpha$ und $\sigma$ verwendeten Stücke analysirt. Schliesslich wurden auch noch von den Proben $C$ die specifischen Widerstände bestimmt.

### b) Prüfung der Stäbe.

Der mittlere Querschnitt wurde, wie für die Drähte, durch Wägungen, die Länge mittels einer Schiebelehre mit Nonius erhalten. Die Messung der Widerstände geschah in der Thomson'schen Brückenschaltung. Zu diesem Zwecke lötete man an die Enden der Stäbe zwei Streifen von Kupferblech flach übereinander auf; die äusseren, 0,2 mm starken, dienten als Stromzuführungen bez. als Verbindung mit einem Normalwiderstand, die beiden anderen, 0,1 mm dick, führten zu den inneren und äusseren Verhältniszweigen der Brücke. Zur Messung wurde der betreffende Stab in ein elektrisch geheiztes Petroleumbad mit Turbine eingesenkt. Für das Anheizen wurde der Heizstrom so stark genommen, dass das Bad in 10 Minuten die gewünschte Temperatur erreichte; das weitere Einreguliren auf constante Temperatur erforderte etwa eine Viertelstunde.

Von einer Erhitzung der Stäbe vor den Messungen glaubte ich absehen zu dürfen, da durch das Hobeln eine Aenderung der Structur nicht oder nur in der äussersten Schicht eingetreten sein konnte.

Für die Bestimmung der Thermokraft wurde die in Fig. 2 skizzirte Anordnung getroffen. Die Enden des zu prüfenden Stabes sind mit Korken in das Innere der gut isolirt aufgestellten Blechgefässe $B_1$ und $B_2$ geführt. Auf die Enden des Stabes sind zwei Kupferdrähte geklemmt, welche zur

Galvanometerleitung führen. Das Bad $B_2$ enthält Petroleumfüllung, einen an den Wänden des Bades anliegenden Heizrahmen $H$ und eine Turbine $T$. Das Gefäss $B_1$ wurde mit schmelzendem Eise gefüllt. Störungen waren durch die

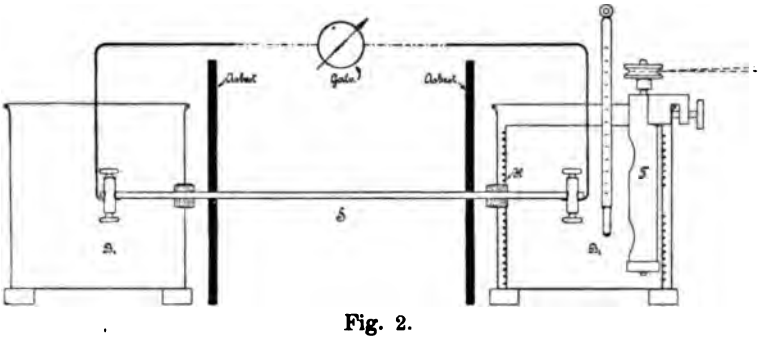


Fig. 2.

unmittelbare Berührung mit dem Eis nicht zu erwarten, auch wurde durch Versuche mit Thermoelementen in Drahtform festgestellt, dass die Thermokraft denselben Betrag hatte, wenn der kalte Pol in Benzin oder in Eis von 0° stand.

### Genauigkeit der Messungen.

Alle Beobachtungen sind, soweit dies möglich war, unter gleichen Verhältnissen zweimal ausgeführt worden; für die weiteren Berechnungen diente alsdann das Mittel der erhaltenen Werte, falls nicht durch besondere Umstände das Gewicht der einen Messung erhöht oder verringert war. Die einzelnen Widerstandsmessungen konnten leicht mit einer Genauigkeit von $\pm$ 0,0002 ausgeführt werden. Für die Temperaturbestimmungen bleibt der Fehler zwischen 0 und 100° C. kleiner als 0,1°, darüber steigt er vielleicht auf 0,2°. Die Querschnitte sind bis auf ungefähr 0,002, die Längen bis auf 0,001 ihres Wertes richtig. Die Resultate sind somit bis auf etwa 0,5 Proc. als richtig anzusehen, eine Genauigkeit, welche in Anbetracht der Unsicherheiten, die infolge unregelmässiger Beschaffenheit des Materiales auftreten, genügt.

Die erhaltenen Zahlenwerte sind in Tab. 1 zusammengestellt.

| Bezeichnung der Legirung | Kobaltgehalt in Gewichtsproc. laut Analyse[1]) Proben A | Proben B | Mittel | Untersucht in | Länge Proben B | Mittlerer Querschnitt Proben B | Bei 20° gemessener Widerstand vor dem Erhitzen auf 160° C. | nach dem Erhitzen auf 160° C. | Temperaturcoefficient α | Spec. Widerstand σ[2]) bei 20° C. in Mikrohm cm/cm³ für Proben B | Proben C | Mittel | Thermokraft ε gegen Cu für 1° nach Erhitzen auf 160° C. berechnet aus der Differenz bei 0° und 100° Proben C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reines Kupfer | — | — | — | — | — | — | — | — | 0,00445 | — | — | 1,672 | — |
| 1 | 1 | 2 | 1,5 | Drahtform | 196,9$_5$ cm | 0,0004886 qcm | 2,958 Ohm | 2,687 Ohm | 0,001084 | 6,67 | 6,85 | 6,76 | 30,8 . 10$^{-6}$ Volt |
| 2 | 2 | 1,8 | 1,9 | „ | 199,9$_0$ | 0,0004894 | 3,780 | 3,426 | 0,000859 | 8,89 | 9,20 | 8,80 | 32,1 . 10$^{-6}$ |
| 3 | 3,2 | 2,9 | 3,1 | „ | 160,2$_0$ | 0,0003075 | 5,410 | 4,892 | 0,000768 | 9,39 | 9,50 | 9,45 | 33,0 . 10$^{-6}$ |
| 4 | 4 | 4,1 | 4,1 | „ | 199,4$_0$ | 0,0005078 | 3,954 | 3,746 | 0,000771 | 9,54 | 9,35 | 9,45 | 32,1 . 10$^{-6}$ |
| 5 | 3,1 | 3,0 | 3,1 | „ | 103,9$_6$ | 0,0004678 | 1,884 | 1,842 | 0,000820 | 8,25 | 9,00 | 8,63 | 32,8 . 10$^{-6}$ |
| 6 | 6,7 | 6,6 | 6,7 | „ | 175,0$_0$ | 0,0004948 | 3,492 | 3,346 | 0,000801 | 9,44 | 10,60 | 10,02 | 31,5 . 10$^{-6}$ |
| 7 | 12,8 | 14,9 | 13,9 | „ | 189,8$_5$ | 0,0004871 | 4,252 | 4,082 | 0,000776 | 10,47 | 10,96 | 10,72 | 29,1 . 10$^{-6}$ |
| 8 | 24,5 | 22,8 | 23,6 | „ | 64,2$_0$ | 0,0007069 | 1,151 | 1,115 | 0,000817 | 12,28 | 10,57 | 11,43 | 26,5 . 10$^{-6}$ |
| 9 | 34,4 | 34,3 | 34,4 | „ | 55,0$_2$ | 0,001555 | 0,445$_8$ | 0,433$_1$ | 0,000936 | 12,24 | 11,96 | 12,10 | 25,9 . 10$^{-6}$ |
| 10 | — | 46,6 | — | Stabform | 8,32 cm | 0,05965 qcm | 0,001582 | — | 0,00132 | 11,34 | — | — | 20,8 . 10$^{-6}$ Volt |
| 11 | — | 59,4 | — | „ | 16,59 | 0,03800 | 0,005639 | — | 0,00143 | 12,92 | — | — | 19,4 . 10$^{-6}$ |
| 12 | — | 70,3 | — | „ | 16,36 | 0,04108 | 0,005892 | — | 0,00150 | 14,79 | — | — | 18,5 . 10$^{-6}$ |
| 13 | — | 80,5 | — | „ | 17,21 | 0,03510 | 0,008126 | — | 0,00166 | 16,57 | — | — | 17,6 . 10$^{-6}$ |
| 14 | — | 90,4 | — | „ | 14,78 | 0,03982 | 0,009022 | — | 0,00167 | 24,30 | — | — | 16,7 . 10$^{-6}$ |
| 15 Reines Kobalt | — | 99,8 | — | Drahtform | 108,0$_8$ cm | 0,001320 qcm | 0,8139 | 0,7962 | 0,00326 | 9,73 | — | — | 26,8 . 10$^{-6}$ Volt |

[1]) Sämtliche Legirungen enthielten Spuren von Nickel und Eisen, der Kobaltdraht auch von Kupfer. Nr. 11 enthielt 0,6 Proc. Eisen.

[2]) *Nach* dem Erhitzen.

**Betrachtungen über die Ergebnisse.**

**Die Constanz der Widerstände.**

Von den in Tab. 1 mitgeteilten Zahlen fällt zunächst die starke dauernde Verminderung des Widerstandes auf, welche die Drähte durch das Erhitzen erlitten haben. Die Abnahme des Widerstandes lässt keine sichere Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Legirungen erkennen, ist aber im allgemeinen bei geringem Kobaltgehalt am grössten. Die procentische Abnahme des Widerstandes beträgt nach den in der Tab. 1 angeführten Werten:

| Nr. der Legirung | Kobalt-gehalt | Widerstands-abnahme | Nr. der Legirung | Kobalt-gehalt | Widerstands-abnahme |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,5 % | 9,2 % | 6 | 6,7 % | 4,3 % |
| 2 | 1,9 | 9,4 | 7 | 13,9 | 4,0 |
| 3 | 3,1 | 9,6 | 8 | 23,6 | 3,1 |
| 4 | 4,1 | 5,3 | 9 | 34,4 | 2,7 |
| 5 | 3,1 | 2,4 | 15 | 99,8 | 2,2 |

Die bei den Legirungen 1 bis 3 gefundenen Aenderungen liegen weit über den unter ähnlichen Verhältnissen für andere Metalle beobachteten. Für die gleiche Erwärmung und Zeit fand ich

bei lackirtem Manganindraht eine Abnahme des Widerstandes von 2,7 Proc.
bei lackirtem Widerstandsdraht von Kulmiz, Achenrain eine Abnahme des Widerstandes von . . . . . 5,6 „
bei Constantandraht eine Abnahme des Widerstandes von . . 0,1 „

Die von Bergmann[1]) an Scheiben aus hart gewalzten und dann auf 300° C erhitzten Metallen erhaltenen Aenderungen liegen zwischen — 0,2 (bei Neusilber) und + 6,9 Proc. (bei Aluminium).

Für Platindrähte fand Cohn[2]) Aenderungen von 1 Proc., für Silber solche von 3 Proc.

Im weiteren Verlauf der Beobachtungen sind bei den vorliegenden Legirungen dauernde Aenderungen des Widerstandes nicht mehr eingetreten.

1) J. Bergmann, Wied. Ann. **36.** p. 783. 1889.
2) P. Cohn, Wied. Ann. **41.** p. 71. 1890.

### Der specifische Widerstand.

In Fig. 3 sind die Mittel der specifischen Widerstände für 20° aus Tab. 1 als Ordinaten, die Gewichtsprocente Kobalt als Abscissen aufgetragen.

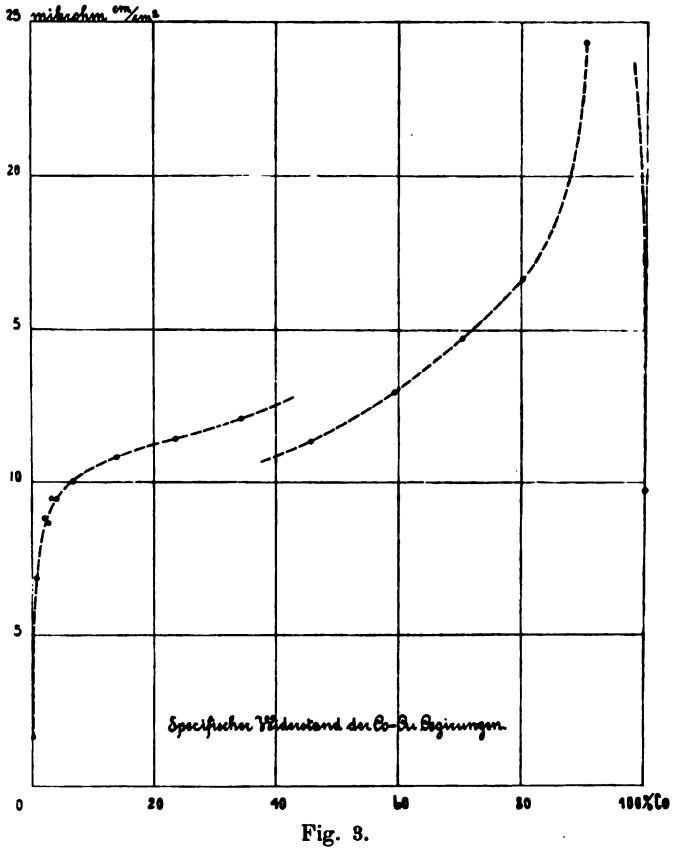



Fig. 3.

Der specifische Widerstand des reinen Kupfers bei der angegebenen Temperatur wurde zu 1,672 Mikrohm angenommen.[1]) Durch ganz geringen Zusatz von Kobalt wird er stark erhöht

1) Nach A. Matthiessen, Pogg. Ann. p. 222. 1860 ist $\sigma_{0°} = 1{,}54$, hieraus folgt obiger Wert. R. Haas, Wied. Ann. 52. p. 673. 1894 findet $\sigma_{0°} = 1{,}58$; dies ergiebt für 20° ... $\sigma = 1{,}71$.

und beträgt bei einem Gehalt von 3 Proc. Co fast das Sechsfache von dem des Kupfers. Bei weiterem Zusatc von Kobalt steigt der Widerstand alsdann langsamer, um von 80 Proc. Co an wieder schnell zuzunehmen. Zwischen 35 und 45 Proc. Co hat die Curve eine Unterbrechung, sodass es nicht möglich ist, die Punkte für niedrigeren und höheren Co-Gehalt durch einen einfachen Linienzug miteinander zu verbinden. Nun sind aber die Legirungen bis 35 Proc. Co als Drähte, diejenigen von 45 Proc. Co an als Stäbe geprüft worden; die ersteren waren somit gezogene, die anderen gegossene Metalle. Das Erhitzen auf 160° hatte natürlich noch nicht genügt, um alle Unterschiede in der Structur auszugleichen. Es ist somit anzunehmen, dass in den Stäben Legirungen von grösserer Weichheit vorlagen, für welche infolge dessen ein niedrigerer specifischer Widerstand und ein höherer Temperaturcoefficient von vornherein wahrscheinlich ist.

Der Widerstand des reinen Kobalts wurde zu 9,73 ermittelt. Von Matthiessen und Vogt[1]) rührt eine Angabe, nach welcher die Leitfähigkeit von Kobalt 17,22 beträgt, diejenige des Kupfers gleich 100,08 gesetzt. Wird für den specifischen Widerstand von Cu bei 20° der oben angeführte Wert 1,672 gesetzt, so ergiebt sich hieraus in zufällig fast vollkommener Uebereinstimmung der specifische Widerstand des Kobalts bei derselben Temperatur zu 9,71. Bemerkenswert ist, dass der Widerstand des reinen Kobalts nur den dritten Teil von demjenigen einer Legirung von 90 Proc. Co und 10 Proc. Cu beträgt; da hier die Widerstandscurve noch ein steiles Ansteigen zeigt, muss sie zwischen 90 und 100 Proc. Co irgendwo ein Maximum haben, um dann sehr rasch abzufallen.

### Der Temperaturcoefficient des Widerstandes.

Die bei 0, 20, 60, 100 und 150° vorgenommenen Messungen ergaben, dass der Widerstand aller untersuchten Legirungen sowie derjenige des reinen Kobalts innerhalb der Beobachtungsfehler eine lineare Function der Temperatur ist. Die Legirungen schliessen sich also in dieser Beziehung dem Verhalten der meisten reinen Metalle an.

1) Entnommen G. Wiedemann, Elektricität, 2. Aufl. 1. p. 483. 1893.

Die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten von dem Kobaltgehalt veranschaulicht die Fig. 4.

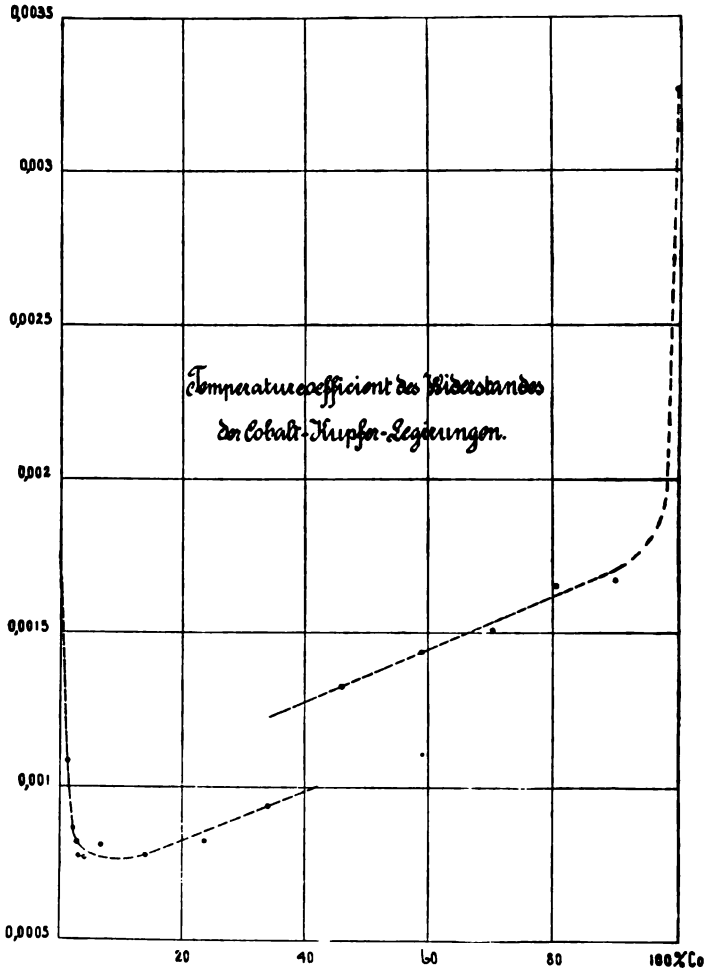



Fig. 4.

Für reines Kupfer ist $\alpha = 0{,}00430$.[1]) Von hier aus sinkt der Temperaturcoefficient bis zu einem Kobaltgehalt von 3 Proc.

1) Haas, l. c. findet 0,00432; Dubreuil, Ann. tél. p. 162. Paris 1898, findet 0,00430; Lagarde, Ann. tél. 20. p. 235, findet $\alpha = 0{,}00445$. Letzteres ist meines Wissens der höchste in der Literatur vorhandene Wert.

sehr rasch auf ein Minimum von 0,00077. Bei weiterem Kobaltzusatz steigen die Werte wiederum an und erreichen bei 90 Proc. Co den Betrag 0,00167. Da der Temperaturcoefficient des reinen Co das Doppelte beträgt, muss die Curve für die fehlenden Legirungen zwischen 90 und 100 Proc. wiederum steil ansteigen. Auch diese Curve zeigt zwischen 35 und 45 Proc. eine Unregelmässigkeit, welche durch die auf p. 845 gemachte Annahme erklärt wird.

Eine auffällige Erscheinung bildet die Thatsache, dass bei den Legirungen von 3 Proc. Co aufwärts sowohl der specifische Widerstand, wie der Temperaturcoefficient gleichzeitig zunehmen. Die Zahl der bis jetzt systematisch untersuchten Legirungen, über welche Angaben in der Literatur vorliegen, ist nicht gross, bei allen aber nimmt der Temperaturcoefficient ab, wenn der specifische Widerstand wächst. Es gilt dies für die neusilberartigen, sowie für die durch Feussner und Weston[1]) bekannt gewordenen Legirungen von Kupfer und Nickel, Kupfer und Mangan, für die von Haas untersuchten Kupfer-Zinklegirungen sowie für die in einigen wenigen Verhältnissen zusammengeschmolzenen, durch Matthiessen und Vogt untersuchten Legirungen[2]) von Blei und Zinn, Zinn und Cadmium, Blei und Silber, Zinn und Gold, Zinn und Kupfer, Zinn und Silber, Gold und Kupfer, Gold und Silber, Platin und Silber, Kupfer und Silber, Eisen und Gold. Der Grund für die Abweichung kann nicht mit Sicherheit angegeben werden, doch deutet dies Verhalten vielleicht darauf hin, dass die Legirungen mit höherem Co-Gehalt nur eine mehr oder weniger grobe Mischung der Bestandteile gewesen sind.

### Die thermoelektrische Kraft.

Wie bereits erwähnt, wurde die Thermokraft der Legirungen gegen Kupfer bestimmt. Die Stellung des Kupfers in der thermoelektrischen Reihe der Metalle ist nicht für jede Sorte die gleiche. Sie wird durch die Structur des Metalles und durch geringe Beimengungen nicht unerheblich beeinflusst.

1) Weston, United States Patents 10944 und 10945, 17. Juli 1888; 381304 und 381305, 17. April 1888.

2) Entnommen G. Wiedemann, Elektricität, 2. Aufl. 1. p. 480. 1893.

Nach Messungen von K. Noll[1]) schwankt die Thermokraft verschiedener Kupfersorten gegen reines Quecksilber bei Temperaturdifferenzen von 0° bis 100° C. zwischen 541 und 726 Mikrovolt, also um etwa 30 Proc. gegen das Mittel; Unterschiede zwischen hartem und weichen Metall waren bei reinem Material nicht erkennbar und erreichten bei sehr unreinem Kupfer einen Betrag von 2 Proc. Das von mir benutzte Material war ein gutes Leitungskupfer vom specifischen Widerstand 1,72 bei 20° C. Um seine Stellung in der thermoelektrischen Reihe zu kennzeichnen, wurde es mit zwei Bleisorten combinirt, von denen die eine als „chemisch rein" aus der Fabrik von Schuchardt in Görlitz bezogen war, die andere gewöhnliche Handelsware darstellte. Für eine Temperaturdifferenz von 100° ergaben sich bei reinem Blei 320, bei gewöhnlichem Blei 313 Mikrovolt. Aus den von Noll für den gleichen Temperaturunterschied angegebenen Zahlen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quecksilber gegen | reines Kupfer | 726 | Mikrovolt, |
| „ „ | Blei | 402 | „ |
| folgt: reines Kupfer gegen | Blei | 324 | „ |

Mein Leitungskupfer stimmt sonach in seinem thermoelektrischen Verhalten mit dem reinen Kupfer sehr nahe überein.

Die Aenderung der Thermokräfte der Legirungen mit dem Kobaltgehalt ist unter Zugrundelegung der Zahlen von Tab. 1 in Fig. 5 dargestellt.

Die Curve steigt bis zu einem Co-Gehalt von 3 Proc. sehr steil an, erreicht hier ein Maximum und sinkt dann fortgesetzt bei zunehmendem Kobaltgehalt. Auch diese Curve zeigt zwischen 35 Proc. und 45 Proc. durch den Uebergang von gezogenen zu gegossenen Proben eine Unstetigkeit. Die Thermokraft für das reine Kobalt ist erheblich grösser, als die einer Legirung von 90 Proc. Co und 10 Proc. Cu, die Curve muss also bei weiterem Kobaltzusatz zunächst noch einmal ansteigen und hat somit ein Minimum in denselben Grenzen, wo für den specifischen Widerstand ein Maximum liegen muss.

Versuche bei verschiedenen Temperaturen, bei denen ein Pol stets auf 0° gehalten wurde, zeigten, dass die Thermo-

1) K. Noll, Wied. Ann. 53. p. 874. 1894.

kräfte der Legirungen, welche als Drähte geprüft wurden, ziemlich genau der Temperatur proportional sind. Die Thermokräfte der Stäbe zeigten geringe Abweichungen. Die Abhängigkeit der Thermokräfte von der Temperatur ist in Fig. 6 dargestellt.

Grössere Abweichungen von einer geraden Linie sind nur bei reinem Kobalt wahrzunehmen. Es erschien daher angezeigt,

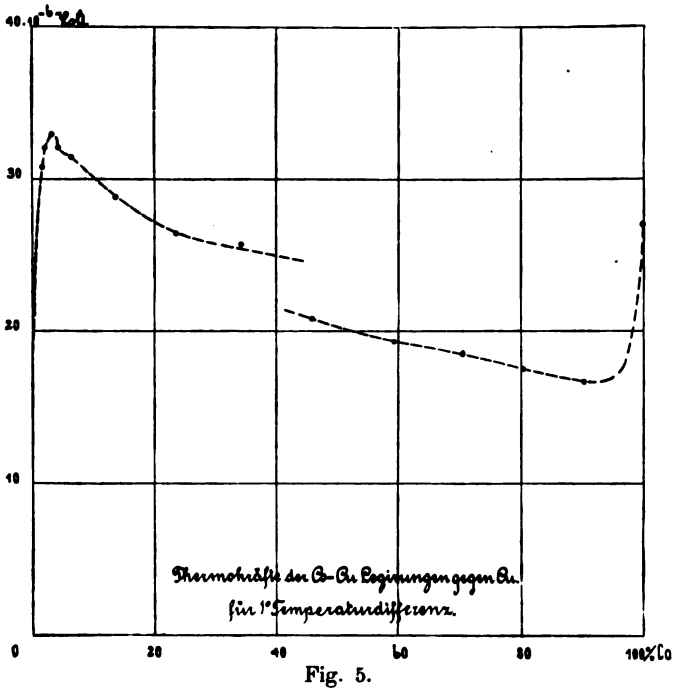



Fig. 5.

dieses Material genauer zu prüfen, zumal die früheren Angaben über sein thermoelektrisches Verhalten die Veranlassung zu dieser Arbeit gegeben hatten. Gleichzeitig mit dem reinen Kobalt wurden je ein neuer Draht der Legirungen 1 und 4, sowie ein Draht von reinem Nickel und ein solcher von Constantan der Prüfung unterzogen. Die Drähte wurden zunächst in hartem Zustand, sowie sie das Zieheisen verlassen hatten, an Kupferdrähte gebunden und mit den Verbindungsstellen in zwei Petroleumbäder von 20° und 60° C. eingesenkt. Die

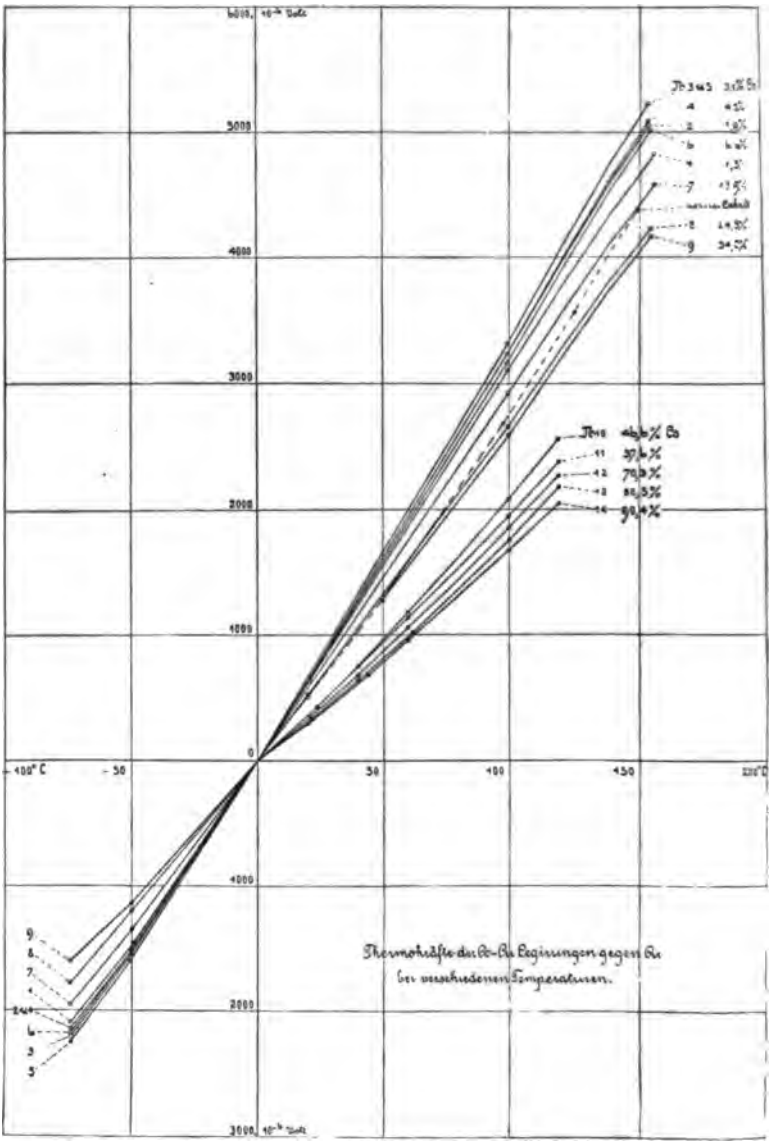

5000
4000
3000
2000
1000
0
- 100° C
- 50
50
100
150
Thermokräfte der Cu-Ni Legierungen gegen Cu
bei verschiedenen Temperaturen.

Fig. 6.

hierbei erhaltenen Thermokräfte für 1° Temperaturunterschied betrugen für

| Kobalt | Legirung 1 | Legirung 4 | Nickel | Constantan |
|---|---|---|---|---|
| 26,3 | 31,0 | 31,9 | 25,9 | $39{,}0.10^{-6}$ Volt |

Hierauf wurden die Drähte losgebunden, durch einen elektrischen Strom bis zu schwacher Rotglut erhitzt und schliesslich mit Silber an die Kupferdrähte gelötet. Die für 20° und 60° vorgenommenen Bestimmungen der Thermokraft lieferten bez. folgende Werte:

| Kobalt | Legirung 1 | Legirung 4 | Nickel | Constantan |
|---|---|---|---|---|
| 25,8 | 30,6 | 31,4 | 26,5 | $39{,}3.10^{-6}$ Volt |

Durch das Ausglühen ist demnach die Thermokraft von Kobalt und den Legirungen 1 und 4 um bez. 1,9 Proc., 1,3 Proc. und 1,6 Proc. gesunken[1]), von Nickel und Constantan dagegen um 2,3 und 0,8 Proc. gestiegen.

Um die Thermokraft dieser Elemente auch für höhere Temperaturen zu bestimmen, wurde der eine Pol derselben in ein Bad von Palmin gesenkt, welches bei einer Temperatur von + 250° nur mässige und wenig belästigende Dämpfe entwickelt. Das Bad wurde, wie gewöhnlich, elektrisch geheizt und von einer Turbine gut durchgerührt; wenn die Temperatur 10 Minuten auf dem gewünschten Betrag constant geblieben war, wurde die Messung gemacht. Der andere Pol wurde stets auf 0° gehalten.

In Fig. 7 sind die gemessenen Thermokräfte in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur graphisch veranschaulicht.

Die Thermokraft des Nickels ist bis 250° der Temperatur ziemlich proportional, während die des reinen Kobalts erheblich rascher wächst als die Temperatur. Die Beobachtungen stehen im Einklang mit denen von Hankel[2]) nach welchen bei ge-

1) Durch das Ausglühen hat sich die Structur der beiden Drähte 1 u. 4 derjenigen der Stäbe, mithin auch ihre Thermokraft der tiefer liegenden Curve für die Stäbe genähert.

2) Entnommen G. Wiedemann, Elektricität 2. p. 276. 1894.

ringen Temperaturunterschieden die thermoelektrische Reihe der in Rede stehenden Metalle Nickel, Kobalt . . . . Kupfer ist, für grosse Temperaturdifferenzen sich aber ändert in Kobalt . . . Nickel . . . Kupfer. Die Thermokräfte der Legirungen 1 und 4 weichen auch bis 250° nur wenig von einer Geraden ab, die Curve für Constantan zeigt hingegen eine starke Krümmung nach aufwärts.

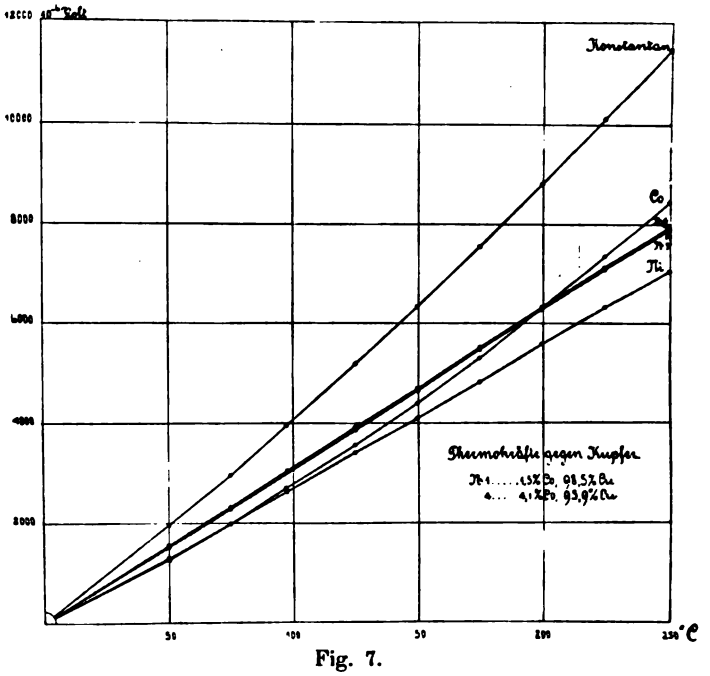



Fig. 7.

In den meisten Fällen kann die Thermokraft $E$ dargestellt werden als eine quadratische Function der Temperatur [1]), man kann also setzen:

$$E = a\,t + b\,t^2.$$

Im Folgenden werden die Werte der durch ein graphisches Verfahren ermittelten Constanten $a$ und $b$ mitgeteilt, sowie die beobachteten und die unter Verwendung von $a$ und $b$ berechneten Thermokräfte für die verschiedenen Beobachtungstemperaturen.

1) Avenarius, Pogg. Ann. **119.** p. 406. 1863.

**Kupfer–Kobalt.**

$E = 28{,}24\,t + 0{,}0413\,t^2$.[1])

| Temp.-Diff. der Lötstellen | Thermokraft beob. | Thermokraft ber. | Temp.-Diff. der Lötstellen | Thermokraft beob. | Thermokraft ber. |
|---|---|---|---|---|---|
| 50° | 1266 | 1265 | 175° | 5284 | 5330 |
| 75 | 1987 | 1975 | 200 | 6325 | 6299 |
| 97,8 | 2680 | 2667 | 225 | 7389 | 7318 |
| 125 | 3546 | 3549 | 250 | 8405 | 8390 |
| 150 | 4381 | 4415 | | | |

**Kupfer–Legirung 1 (1,5 Proc. Co).**

$E = 30{,}52\,t + 0{,}00388\,t^2$.

| Temp.-Diff. der Lötstellen | Thermokraft beob. | Thermokraft ber. |
|---|---|---|
| 50° | 1537 | 1536 |
| 75 | 2314 | 2311 |
| 97,8 | 3026 | 3022 |
| 125 | 3882 | 3876 |
| 150 | 4649 | 4665 |
| 175 | 5456 | 5459 |
| 200 | 6261 | 6259 |
| 225 | 7062 | 7063 |
| 250 | 7882 | 7873 |

**Kupfer–Legirung 4 (4,1 Proc. Co).**

$E = 31{,}03\,t + 0{,}00208\,t^2$.

| Temp.-Diff. der Lötstellen | Thermokraft beob. | Thermokraft ber. |
|---|---|---|
| 50° | 1556 | 1556 |
| 75 | 2348 | 2339 |
| 97,8 | 3059 | 3054 |
| 125 | 3907 | 3911 |
| 150 | 4677 | 4702 |
| 175 | 5484 | 5494 |
| 200 | 6285 | 6289 |
| 225 | 7120 | 7087 |
| 250 | 7878 | 7888 |

**Kupfer–Nickel.**

$E = 26{,}10\,t + 0{,}00821\,t^2$.

| Temp.-Diff. der Lötstellen | Thermokraft beob. | Thermokraft ber. |
|---|---|---|
| 50° | 1313 | 1326 |
| 75 | 2006 | 2004 |
| 97,8 | 2650 | 2632 |
| 125 | 3392 | 3391 |
| 150 | 4076 | 4100 |
| 175 | 4822 | 4819 |
| 200 | 5564 | 5548 |
| 225 | 6298 | 6288 |
| 250 | 7025 | 7038 |

**Kupfer–Constantan.**

$E = 37{,}07\,t + 0{,}03428\,t^2$.

| Temp.-Diff. der Lötstellen | Thermokraft beob. | Thermokraft ber. |
|---|---|---|
| 50° | 1926 | 1939 |
| 75 | 2979 | 2975 |
| 97,8 | 3944 | 3953 |
| 125 | 5155 | 5168 |
| 150 | 6316 | 6332 |
| 175 | 7527 | 7536 |
| 200 | 8797 | 8785 |
| 225 | 10075 | 10075 |
| 250 | 11467 | 11410 |

1) Der neutrale Punkt würde demnach bei − 282° liegen.

Noll erhält in der oben citirten Arbeit für das Thermoelement Nickel . . Kupfer die Werte $a = 21{,}89$, $b = 0{,}0191$. Aus den von ihm für Kobalt . . . Quecksilber und Quecksilber . . . Kupfer gefundenen Zahlen berechnet sich für Kobalt gegen Kupfer $a = 18{,}41$, $b = 0{,}0407$. Die Abweichungen sind in beiden Fällen ziemlich erheblich. Berücksichtigt man indes die in Fig. 5 angedeutete Aenderung der Thermokraft für Legirungen zwischen 90 und 100 Proc. Co, so sieht man, dass die erwähnte Abweichung bei Kobalt bereits durch seine Verunreinigung des von Noll verwendeten Materiales[1]) mit nur 0,5 Proc. Cu erklärt werden könnte. Aehnliches gilt für Nickel. Bei zwei verschiedenen Nickelsorten fand Noll für das Intervall von 0 bis 100° C. 2389 und 2135 Mikrovolt.

### Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die elektrischen Eigenschaften des Kupfers werden durch geringe Zusätze von Kobalt stark verändert. Für geringe Beimengungen von Kobalt ist der Einfluss dieses Zusatzes etwa ebenso gross wie der des Mangans und ungefähr dreimal so gross wie der des Nickels. Durch Zufügung von 3—5 Proc. Kobalt zu Kupfer erreicht der Temperaturcoefficient der Legirungen mit + 0,00077 ein Minimum, die Thermokraft gegen Kupfer mit 33 Mikrovolt für 1° Temperaturdifferenz ein Maximum; der bis hierher rapid auf 9,5 Mikrohm cm/cm² angestiegene specifische Widerstand nimmt bei weiterem Kobaltzusatz nur langsam zu. Umgekehrt werden auch die Eigenschaften des Kobalts durch geringe Beimengung von Kupfer stark beeinflusst. Bei zunehmendem Kupfergehalt muss zwischen 0 und 10 Proc. Cu der specifische Widerstand ein Maximum, die Thermokraft ein Minimum erreichen, der rasche Abfall des Temperaturcoefficienten sich verlangsamen.

Die Hoffnung, unter den Legirungen von Kupfer und Kobalt solche aufzufinden, deren Eigenschaften von praktischer Bedeutung werden könnten, hat sich dem Anschein nach nicht erfüllt. Es ist indes nicht ausgeschlossen, dass sich für Kupfer mit 1 bis 2 Proc. Kobalt eine Verwendbarkeit zu Thermosäulen finden lässt, da diese Legirungen abweichend von den

1) Welches nicht analysirt worden ist.

bisher benutzten Materialien hohen Schmelzpunkt, hohe Thermokraft ($31.10^{-6}$ Volt für $1^{0}$ C.) und geringen specifischen Widerstand (etwa das Vierfache von dem des Kupfers) miteinander vereinigen. Von Interesse ist ferner die Thatsache, dass zwei chemisch so nahe stehende Metalle, wie Nickel und Kobalt, in ihren Legirungen so starke Verschiedenheiten zeigen.

Es erübrigt noch, einige kurze Bemerkungen über das magnetische Verhalten der untersuchten Legirungen hinzuzufügen. Alle Legirungen, bis zu 1,5 Proc. herunter, nehmen ebenso wie das reine Kobalt durch Behandeln mit einem Elektromagnet Polarität an. Der Magnetismus verschwindet erst bei heller Rotglut. Die Legirungen von Nickel und Kupfer sind nicht magnetisirbar.

Vorstehende Arbeit wurde im Starkstrom-Laboratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt auf Anregung von Herrn Prof. Feussner ausgeführt.

Charlottenburg, den 18. Sept. 1901.

(Eingegangen 11. October 1901.)

## 11. *Beitrag zur akustischen Anziehung; von Robert Geigel.*

Vermutlich wird schon manchem Experimentator folgendes aufgefallen sein:

Wenn man an einem Elektroskop, bei welchem die beiden Aluminiumblättchen durch einen Messingstreifen, wie beim Exner'schen, getrennt sind, den Knopf oder das Tischchen leicht anstösst, so werden die beiden Blättchen vom Messingstreifen lebhaft angezogen, um nach einigen Secunden wieder fallen gelassen zu werden.

Dass dabei die Luft wesentlich beteiligt ist, ergiebt sich daraus, dass der Versuch unter dem ausgepumpten Recipienten der Luftpumpe versagt. Das eine oder andere Elektroskop lässt beim Anschlagen einen hohen Ton hören, der von Schwingungen des Messingstreifens herrührt; aber auch dann, wenn dieser so schwach oder vielleicht so hoch ist, dass er nicht mehr gehört wird, tritt der Erfolg noch ein.

Eine angeschlagene Stimmgabel in nächste Nähe eines hängenden Stanniol- oder Papierstreifens und diesem parallel so gehalten, dass die Schwingungen der Gabel senkrecht zur Streifenfläche gehen, zeigt die nämliche Erscheinung; der Streifen wird angezogen und einige Secunden festgehalten, aber nicht so lange, als man den Grundton der Gabel noch hören kann.

Namentlich der Papierstreifen lässt dabei ein flatterndes, schnarrendes Geräusch hören, aus welchem man die Octave des Gabeltones leicht heraushört, das aber jedenfalls noch eine grosse Menge von Obertönen hat. Mit dem allmählichen Abklingen der Stimmgabel hört Geräusch und Anziehung auf und wenn man die noch mit ihrem Grundton weiter tönende Gabel selbst in Berührung mit dem Papierstreifen bringt, tritt keines von beiden wieder ein. Es scheint also, dass es sehr rasche Schwingungen sind, welche das Anziehungsphänomen hervorbringen und dies scheint mir durch die folgenden Versuche bestätigt zu werden.

Hält man die angeschlagene Stimmgabel über eine Wasserfläche, so zieht sie Wasser ein wenig in die Höhe und dieser Wasserstreifen, noch in Verbindung mit der anderen Wasseroberfläche, erscheint gerippt. Bei dem hier wegen der starken Dämpfung rasch erfolgenden Abklingen dauert die Erscheinung nur sehr kurze Zeit, aber Rippung und Anziehung verschwinden gleichzeitig.

Uebersichtlicher wird die Sache, wenn man den einen Zinken der tönenden Stimmgabel mit Lycopodium bestreut. Anfangs überzieht sich vom Schwingungsknoten bis zum freien Ende der Zinken mit einer dünnen, in lebhafter Bewegung befindlichen Schicht von Lycopodium, ohne dass dieses weggeschleudert wird. Sehr bald aber bilden sich kleine Kügelchen, Savart'sche Wirbelhäufchen[1]), die in sich selbst noch in lebhafter, wie kochender Bewegung sind. Solche entstehen bei schwingenden Platten bekanntlich an den Schwingungsbäuchen und aus ihrer gegenseitigen Entfernung wäre es also leicht, die Länge der stehenden Welle, der sie ihre Entstehung verdanken, zu bestimmen. Dabei ist aber besondere Vorsicht nötig. Die Häufchen sind ausserordentlich beweglich. Bei gut horizontal gehaltener Stimmgabel wandern sie gegen das hintere Ende, also gegen den Knoten hin, wie sie dies ja auch bei einer schwingenden Platte thun. Sie folgen aber ausserdem jeder Neigung der Fläche, auf der sie, man könnte sagen, umherschwimmen. Man kann sie nach den Seiten, nach dem freien Ende zufliessen und dort abfliessen lassen; dabei treffen sich häufig zwei aufeinanderfolgende und fliessen dann in eines zusammen, ganz wie zwei Wassertropfen, sodass, wenn alles zur Ruhe gekommen ist, wobei die Häufchen zu kleinen flachen Scheiben zusammenfallen, der gegenseitige Abstand derselben oft nicht mehr der ursprüngliche ist. Man kann aber die Kügelchen fast im Moment des Entstehens erstarren lassen, wenn man die Bewegung der Stimmgabel teilweise dämpft.

Die von mir vorzugsweise gebrauchte Gabel hat als Grundton $c^1$ mit rund 259 Schwingungen und beim Anschlagen klingt deutlich der Ton $f^1$ von rund 345 Schwingungen mit, der den Schwingungen der Zinken senkrecht zur Gabelebene entspricht.

1) Franz Melde, Akustik, p. 207. 1883.

Letzterer Ton kann leicht für sich gedämpft werden, da sein Schwingungsknoten an einer anderen Stelle liegt, als der von $c^1$, und sobald das geschieht, entwickeln sich die Lycopodiumkügelchen ganz plötzlich, um fast augenblicklich auch ruhig zu liegen.

In diesem Fall kann man den gegenseitigen Abstand der Mitten zweier Häufchen als die Länge der stehenden Welle einer Partialschwingung ansehen. Mehrfache Versuche geben als diesen Abstand etwa 1,5 mm (er ist nicht an allen Stellen der Gabel genau gleich, was wohl mit Inhomogenitäten des Materiales zusammenhängen wird, auch scheint die Art des Anschlagens von Einfluss zu sein). Da die Länge des schwingenden Gabelzinkens von seinem wahrscheinlichen Knotenpunkt bis zum freien Ende etwa 100 mm, die Länge der ganzen stehenden Welle also 200 mm beträgt, so würden die Partialschwingungen 133mal rascher als die des Grundtones sein, d. h. 32247 in der Secunde, ein Ton, der die Grenze der Hörbarkeit wohl übersteigt.

Es scheint aber, als ob gerade diese Schwingungen es wären, die das Anziehungsphänomen hervorbringen.

Dafür spricht erstens eine zeitliche Uebereinstimmung: Mit einer Secundenuhr bestimmte ich die Zeitdauer der Beweglichkeit der Lycopodiumhäufchen vom Anschlagen der Gabel bis zum Zusammenfallen ersterer und fand, indem ich mich bemühte, möglichst gleichmässig anzuschlagen:

| | |
|---|---|
| 20,6 sec | 21,4 sec |
| 19,0 „ | 19,6 „ |
| 23,0 „ | 24,0 „ |
| 21,3 „ | 20,0 „ |

Mit derselben Secundenuhr wurde die Dauer der Anziehung eines Stanniolstreifchens, das vertical hing, bestimmt, wobei natürlich wieder möglichst ebenso wie vorhin angeschlagen wurde.

Es fanden sich:

| | |
|---|---|
| 20,5 sec | 15,4 sec |
| 17,5 „ | 18,4 „ |
| 16,5 „ | 16,0 „ |
| 18,0 „ | 16,0 „ |
| 20,0 „ | 14,5 „ |

In dieser Zeit schien der letzte Rest von Anziehung verschwunden zu sein; freilich muss zugegeben werden, dass diese Zahlen weniger verlässig sind, als die obigen, da der Zeitpunkt, wo das angezogene Stanniolblättchen wieder die Gabel verlässt, doch auch abhängig sein wird von der Elongation des Blättchens aus seiner Gleichgewichtslage, und ob diese jedesmal dieselbe war, ist zweifelhaft.

Durchschnittlich sind letztere Zahlen kleiner als erstere, was übrigens von vornherein als notwendig erscheinen muss, da die Gabelschwingungen jedenfalls durch das sich anlegende Stanniolblättchen gedämpft werden.

Wichtig ist, dass sowohl nach dem Stillliegen der Kügelchen, wie nach dem Verschwinden des Anziehens der Grundton der Gabel deutlich weiter gehört wird.

Nähere Beobachtung des Entstehens der Häufchen auf der $c^1$-Gabel zeigte, dass nicht alle ganz gleichzeitig entstehen, sondern dass sie gebietweise auftreten, zuerst in etwa der Mitte, dann weiter gegen das freie Ende zu und drittens ganz am freien Ende, jedesmal aber ein solches Gebiet gleichzeitig.

Dementsprechend zeigte der Stanniolstreifen auch, dass er zuerst von dem ersten, dann von dem zweiten und erst zuletzt von dem dritten Gebiete angezogen wurde. Solange das erste Gebiet noch anziehend wirkte, war das insbesondere beim letzten nicht der Fall, hier wurde der Streifen einfach abgeschleudert.

Eine zweite Stimmgabel ($a^1 = 435$) zeigte ihrer Individualität entsprechend dasselbe. Bei dieser traten die Kügelchen nahezu gleichzeitig auf der ganzen Hälfte gegen das freie Ende zu auf und die Anziehung erfolgte auch in diesem Gebiete überall.

Es scheinen also in der That die Partialschwingungen zu sein, die die Anziehung aus nächster Nähe involviren.

Ob die Anziehungserscheinung nun aus denselben Gesichtspunkten zu erklären ist, wie die von Dvorák im Jahre 1876 beschriebenen, wage ich vorläufig nicht zu entscheiden, da mir momentan nur ein Auszug aus jener Arbeit zu Gebote steht. Es wäre aber wohl auch folgendes denkbar:

Benutzt man als angezogenes Object einen Papierstreifen, so fällt unwillkürlich die Aehnlichkeit, sowohl im Geräusche

als in der Beweglichkeit des angezogenen Papieres mit dem Versuch von Clement und Desormes auf. In der That, geht von einer Stelle der Stimmgabel eine Verdichtungswelle aus, so breitet sie sich wie jener Luftstrom nach allen Seiten aus und aus denselben Gründen wie dort könnte ein Papierblättchen angedrückt werden. Angedrücktwerden und directes Wegschleudern folgen sich ungemein rasch und für das Auge resultirt ein freies Schweben über der schwingenden Fläche.

Merkwürdig ist nur, dass die kleinen Staubhäufchen, solange sie noch beweglich sind, nach allen Stellen der Oberfläche hinfliessen können, offenbar auch nach Schwingungsknoten und über diese weg. Sieht man mit der Lupe zu, so entdeckt man freilich, dass schliesslich zwischen je zwei Häufchen ein schwacher Querstreifen liegen gebliebenen Lycopodiums ist, der dann die Stelle des Schwingungsknotens zu charakterisiren scheint.

Aschaffenburg, October 1901.

(Eingegangen 19. October 1901.)

## 12. *Zur Theorie des Sättigungszustandes;* *von C. Dieterici.*

Die beiden Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie, welche die Verdampfungswärme $r$ einer Flüssigkeit und deren Aenderung mit der absoluten Temperatur $\vartheta$ darstellen, sind bekannt. Bezeichne $v_1$ das Sättigungsvolumen der Flüssigkeit, $v_2$ das des Dampfes, $c_s$ und $h_s$ die specifischen Wärmen der Flüssigkeit bez. des Dampfes unter dem Sättigungsdruck $p_s$, so ist, wenn alle Wärmegrössen in mechanischem Maasse gemessen sind,

$$r = \vartheta \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta}(v_2 - v_1) \tag{1}$$

und

$$\frac{r}{\vartheta} - \frac{dr}{d\vartheta} = c_s - h_s. \tag{2}$$

Die in der ersten Gleichung auftretende Zunahme der Sättigungsspannung $dp_s/d\vartheta$ ist streng genommen durch den partiellen Differentialquotienten $(\partial p/\partial \vartheta)_{v=c}$ zu ersetzen; da aber der letztere unabhängig von $v$ ist, solange eine Flüssigkeit und ihr Dampf nebeneinander bestehen, so fallen beide zusammen.

Die Ableitung dieser Gleichungen nach dem Vorgang von Clausius bez. nach Kirchhoff ist bekannt; ich will hier zunächst eine — soweit ich die einschlägige Literatur übersehe — neue Herleitung derselben entwickeln, welche sich unmittelbar an die Betrachtung der Isothermen anschliesst, und daraus weiter eine neue für den Sättigungszustand gültige Bedingung herleiten.

1. In Fig. 1 stelle die $J$-Curve die Isotherme einer beliebigen Substanz bei $\vartheta_x < \vartheta_\varkappa$ also bei einer beliebigen Temperatur unterhalb der kritischen dar; die $\mathcal{S}$-Curve sei die Sättigungscurve, also diejenige, welche die Sättigungsdrucke zu jedem Volumen darstellt. Letztere hat bei $v = v_\varkappa$ ein Maximum des Druckes mit $p = p_\varkappa$; es ist bisher nicht möglich sie als Function von $\vartheta$ und $v$ darzustellen.

Denken wir uns die Masseneinheit Substanz bei der Temperatur $\vartheta_x < \vartheta_\varkappa$ unter ihrem Sättigungsdruck $p_x$ also mit dem Sättigungsvolumen $v_1$ dem Punkte $A$ der Figur entsprechend gegeben, so können wir sie auf zwei verschiedenen Wegen in den Sättigungszustand des Dampfes — Punkt $B$ der Figur — bei derselben Temperatur und gleichem Sättigungsdruck überführen. Der erste Weg ist der durch isotherme Verdampfung; während derselben bleibt die Substanz nicht homogen, sondern zerfällt in einen flüssigen und einen dampfförmigen Teil, daher

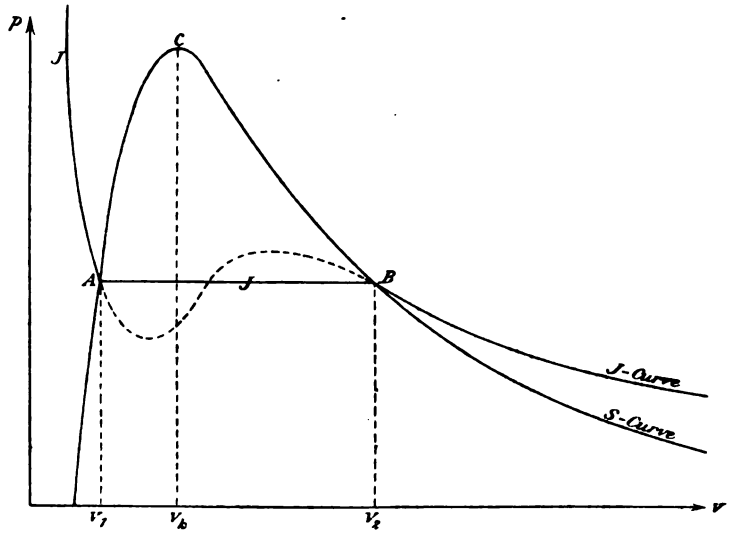



Fig. 1.

sei dieser Uebergang als der „inhomogene" bezeichnet und auf ihn der Index $i$ angewendet. In der graphischen Darstellung der Fig. 1 ist dieser Vorgang durch die zur Abscisse Parallele $A\,B$ dargestellt. Ein zweiter Weg ist aber dadurch geboten, dass wir die Flüssigkeit von der Temperatur $\vartheta_x$ erwärmen auf die kritische Temperatur $\vartheta_\varkappa$, indem stets der äussere Druck gleich dem Sättigungsdruck gehalten wird. Dann bleibt die Flüssigkeit stets als Ganzes homogen, geht bei der kritischen Temperatur in „Dampf" gleicher Dichte über und bleibt dann wiederum als Ganzes homogen, wenn wir den Dampf auf die Temperatur $\vartheta_x$ abkühlen, indem wiederum der äussere Druck

stets gleich dem Sättigungsdruck gemacht wird. Die Fig. 1 stellt diesen Uebergang dar als eine Veränderung der Substanz längs der Sättigungscurve, also von $A$ über $C$ nach $B$. Das Charakteristische dieser Ueberführung besteht darin, dass sie zwar nicht isotherm ist, aber während jedes Momentes des Ueberganges die Substanz stets als Ganzes homogen ist. Deshalb sei für diesen Uebergang der Index $h$ (homogen) angewendet. Die Wärme, welche zur Ueberführung der Masseneinheit auf dem inhomogenen, ersten Wege zuzuführen ist, ist

$$Q_i = r,$$

worin $r$ die totale Verdampfungswärme ist. Bei dieser Ueberführung wird die äussere Arbeit

$$A_i = p_x(v_2 - v_1)$$

geleistet. In dem Arbeitsdiagramm der Fig. 1 ist diese Arbeit durch die Fläche $v_1 A B v_2$ dargestellt.

Die Wärme, welche bei der homogenen, zweiten Ueberführung zugeführt werden muss, ist

$$Q_h = \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} c_s \,.\, d\vartheta - \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} h_s \, d\vartheta = \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} (c_s - h_s)\, d\vartheta$$

und die äussere Arbeit würde sein

$$A_h = \int_{v_1}^{v_2} p_s \,.\, dv.$$

Sie ist nicht berechenbar, weil, wie bemerkt, bisher der Sättigungsdruck $p_s$ nicht als Function von $v$ und $\vartheta$ darstellbar ist. Graphisch ist die Arbeit $A_h$ in Fig. 1 durch die Fläche $v_1 A C B v_2$ dargestellt; die Differenz der Arbeiten $A_h - A_i$ ist durch die Kappe der Sättigungsfläche wiedergegeben, welche oberhalb der Horizontalen $AB$ liegt.

Denkt man sich die homogene und die inhomogene Ueberführung zu einem geschlossenen Kreisprocess zusammengefügt, so ist dieser reversibel; für ihn gilt also die Gleichung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie

$$\int^{0} \frac{dQ}{\vartheta} = 0$$

oder unter Benutzung der hier in Betracht kommenden Wärmemengen:

$$\int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} (c_s - h_s)\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \frac{r}{\vartheta_x} = 0, \quad \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} (c_s - h_s)\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{r}{\vartheta_x}.$$

Denkt man sich die untere Grenze des Integrales $\vartheta_x$ um $d\vartheta$ verschoben und bildet die Differenz der Gleichungen für $\vartheta_x$ und $\vartheta_x + d\vartheta$, so erhält man allgemein:

$$-\frac{c_s - h_s}{\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{r}{\vartheta}\right)$$

oder

$$c_s - h_s = \frac{r}{\vartheta} - \frac{dr}{d\vartheta}.$$

Das ist die Gleichung (2), welche sich unter alleiniger Anwendung des zweiten Hauptsatzes ergiebt.

2. Bildet man weiter die Energiedifferenz $U_2 - U_1$, welche bei der Ueberführung auf dem inhomogenen Wege eintritt, so ist diese

$$U_2 - U_1 = r - A_i = r - p_x(v_2 - v_1).$$

Dieselbe Energiedifferenz wird bei der Ueberführung längs des zweiten homogenen Weges auch:

$$U_2 - U_1 = \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} (c_s - h_s)\, d\vartheta - A_h.$$

Beide Energiedifferenzen müssen nach dem ersten Hauptsatze einander gleich sein, also

$$r - A_i = \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} (c_s - h_s)\, d\vartheta - A_h.$$

Nun ist nach der soeben abgeleiteten und eingangs mit (2) bezeichneten Gleichung:

$$(c_s - h_s) = \frac{r}{\vartheta} - \frac{dr}{d\vartheta},$$

also

$$r - A_i = \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} \frac{r}{\vartheta} \cdot d\vartheta - \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} \frac{dr}{d\vartheta} \cdot d\vartheta - A_h$$

oder

$$r - A_i = \int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} \frac{r}{\vartheta} \cdot d\vartheta + r - A_h,$$

denn für $\vartheta = \vartheta_\varkappa$ ist $r = 0$.

Somit folgt:

$$\int_{\vartheta_x}^{\vartheta_\varkappa} \left(\frac{r}{\vartheta}\right) d\vartheta = A_h - A_i.$$

Geht man auch hier von der Integralgleichung zur Differenzgleichung über, indem man sich die untere Grenze um $d\vartheta$ verschoben denkt, so erhält man

$$\frac{r}{\vartheta} = -\frac{d}{d\vartheta}(A_h - A_i).$$

Es ist schon erwähnt, dass die Differenz $A_h - A_i$ die Kappe der Sättigungsfläche bedeutet, welche oberhalb des zur Temperatur $\vartheta$ gehörigen Sättigungsdruckes $p_s$ — der Horizontalen $AB$ der Fig. 1 — liegt, und dass es bisher unmöglich ist, diese Fläche zu berechnen; daher ist es nicht möglich, den in der letzten Gleichung vorkommenden Differentialquotienten durch einen analytischen Ausdruck wiederzugeben. Dagegen kann man denselben aus dem graphischen Diagramm sofort entnehmen, denn die obere Kappe der Sättigungsfläche nimmt bei Zunahme der Temperatur ab um ein Rechteck, welches die Volumendifferenz $(v_2 - v_1)$ zur Basis und die — unendlich kleine — Druckzunahme $(\partial p / \partial \vartheta)_{v=c}$ zur Höhe hat; die letztere ist aber auch gleich $dp_s/d\vartheta$, weil, wenn Flüssigkeit und Dampf miteinander in Berührung sind,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_{v=c} = \frac{dp_s}{d\vartheta}$$

ist; also wird

$$-\frac{d}{d\vartheta}(A_h - A_i) = (v_2 - v_1)\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_{v=c} = (v_2 - v_1)\frac{dp_s}{d\vartheta}$$

und folglich ergiebt sich:

$$r = \vartheta . (v_2 - v_1) \frac{\partial p}{d\vartheta} = (v_2 - v_1)\, \vartheta \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta},$$

die Clausius-Clapeyron'sche Gleichung (1).

3. Die beiden bisher benutzten Wege der Ueberführung einer Substanz von einem Sättigungszustand in den zweiten sind beide reversibel und experimentell realisirbar. Das letztere gilt nicht mehr für die isotherme Ueberführung, welche eine jede Zustandsgleichung verlangt. Denn eine jede Zustandsgleichung, wie etwa diejenige von van der Waals, verlangt, dass zwischen den Sättigungszuständen eine Continuität besteht, oder dass in der graphischen Darstellung der Fig. 1 die Punkte $A$ und $B$ durch einen continuirlichen Curvenzug, welcher dann notwendig wenigstens je ein Minimum und ein Maximum haben muss, verbunden sind, etwa in der Art, wie es der punktirte Curvenzug der Fig. 1 andeutet. Bei einer Ueberführung längs dieser Curven würde die Substanz bei constanter Temperatur stets als Ganzes homogen sein.

Nun ist offenbar, dass, wenn diese Ueberführung reversibel ist, man sie mit der nicht isothermen homogenen Zustandsänderung durch die kritische Temperatur längs der Sättigungscurve zu einem geschlossenen Kreisprocess zusammenfügen kann; dass also für die Wärme $r'$, welche bei dieser dritten Ueberführung gebraucht wird, dieselben Schlüsse gelten, welche in § 1 für $r$ gezogen sind: also

$$\frac{r'}{\vartheta} - \frac{dr'}{d\vartheta} = c_s - h_s = \frac{r}{\vartheta} - \frac{dr}{d\vartheta}$$

oder

$$r - r' = \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}(r - r').$$

Dieser Gleichung wird allgemein genügt durch

$$r - r' = c \,.\, \vartheta,$$

worin $c$ eine Constante ist. Diese muss aber gleich Null sein, denn für $\vartheta = \vartheta_\varkappa$ wird $r = r' = 0$; folglich ist allgemein

$$r = r'$$

oder die Wärme, welche zur Constanterhaltung der Temperatur zugeführt werden muss bei einer isothermen Zustandsänderung

längs des von der Zustandsgleichung geforderten Weges ist gleich der beobachtbaren Verdampfungswärme der Substanz.

Ebenso sind aber weiter auch die Schlüsse des § 2 zulässig, welche unter Anwendung auf den von der Zustandsgleichung vorgeschriebenen Weg sagen, dass $r'/\vartheta$ also auch $r/\vartheta$ gleich der negativen Aenderung der Kappe der Sättigungsfläche ist, welche oberhalb der Curve der Zustandsgleichung liegt, also in der Fig. 1 oberhalb der punktirten Druckcurve. Diese Aenderung ist aber

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot dv.$$

Folglich muss

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot dv = \frac{r'}{\vartheta} = \frac{r}{\vartheta} = (v_2 - v_1) \frac{dp_s}{d\vartheta} \tag{3}$$

nach Gleichung (1) sein.

Die Aussage, welche Gleichung (3) enthält, ist die, dass wenn es eine Function $p = f(\vartheta v)$ giebt, welche bei jeder Temperatur einen continuirlichen und reversiblen Uebergang zwischen den Sättigungszuständen darstellt, welche also in rein mathematischer Hinsicht eindeutig und stetig ist, sie so beschaffen sein muss, dass der Mittelwert der Spannungscoefficienten $(\partial p/\partial \vartheta)_{v=c}$ zwischen den Sättigungsvoluminis gleich der Zunahme der Sättigungsspannung sein muss.

Dieser Satz, welcher hier aus der Gleichheit der Verdampfungswärmen sich ergab, ist nicht identisch mit dem bekannten Clausius-Maxwell'schen Theorem, kann aber auch aus ihm hergeleitet werden.

Denn nach dem genannten Satze muss bei jeder Temperatur die äussere Arbeit $A$ bei isothermer Verdampfung gleich sein derjenigen längs der Zustandscurve; also in Zeichen:

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p \, . \, dv = p_s(v_2 - v_1). \tag{4}$$

Differentiirt man nach $\vartheta$, so erhält man

$$\frac{\partial A}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_{v_1}^{v_2} p \, dv = \frac{\partial p_s}{\partial \vartheta}(v_2 - v_1) + p_s \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}(v_2 - v_1), \tag{5}$$

woraus sich ergiebt, dass die Veränderung, welche die äussere Arbeit bei einer Temperatursteigerung erfährt, aus zwei Teilen zusammengesetzt ist, einer Zunahme gleich der Druckzunahme multiplicirt mit der Volumendifferenz und einer Abnahme

$$p_s \frac{\partial}{\partial \vartheta}(v_2 - v_1),$$

weil die Volumendifferenz $(v_2 - v_1)$ mit steigender Temperatur kleiner wird.

In der graphischen Darstellung der Fig. 2 wächst die äussere Arbeit — Fläche $v_1 A B v_2$ — bei einer Temperatur-

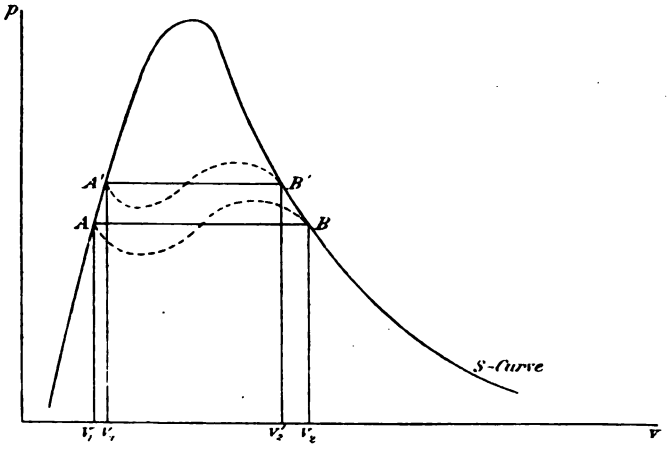



Fig. 2.

steigerung in der Höhe um den zukommenden Streifen $A A' B' B$, nimmt dagegen ab in die Quere um die Summe der Streifen $v_1 A A' v_1'$ und $v_2 B B' v_2'$.

Nach dem Clausius-Maxwell'schen Theorem muss die algebraische Summe dieser drei Flächenstücke dieselbe sein, gleichgültig ob wir die Horizontalen $A B$ bez. $A' B'$ als obere Begrenzung der Arbeitsflächen nehmen oder die Zustandscurven zwischen $A$ und $B$ bez. $A'$ und $B'$. Da nun die verticalen Streifen $v_1 A A' v_1'$ und $v_2 B B' v_2'$ in beiden Fällen gemeinsam sind, so muss auch der zwischen den Horizontalen $A B$ und $A' B'$ liegende Streifen, gleich dem gewundenen Bande zwischen den Zustandscurven sein. Das verlangte die Glei-

chung (3), sie ist somit auch eine Folgerung aus dem Clausius-Maxwell'schen Theorem (4).

Ich möchte zum Schluss eine Bemerkung nicht unerwähnt lassen', welche ich bei Berechnungen an dem vorliegenden Beobachtungsmaterial machte.

Die äussere Arbeit $A$ bei isothermer Verdampfung wächst bei niederen Temperaturen mit dieser, bei der kritischen Temperatur ist sie aber gleich Null und muss daher bei Temperaturen, welche der kritischen nahe liegen, zum Werte Null hin abnehmen. Folglich muss $A$ bei einer gewissen Temperatur ein Maximum haben, welches nach Gleichung (5) eintritt, wenn

$$\frac{\partial p_s}{\partial \vartheta}(v_2 - v_1) = - p_s \frac{\partial}{\partial \vartheta}(v_2 - v_1)$$

ist, oder im Hinblick auf das Diagramm der Fig. 2, wenn die Zunahme der Arbeitsfläche an Höhe gerade gleich ist der Abnahme an Breite. Die Temperatur $\vartheta_m$, bei welcher dieses Arbeitsmaximum eintritt, scheint ein bestimmter Bruchteil der kritischen $\vartheta_k$ zu sein, denn bei allen Stoffen ist sie fast exact genau gegeben durch:

$$\frac{\vartheta_k}{\vartheta_m} = 1{,}30.$$

Dieses merkwürdige Rechnungsergebnis wollte ich, weil es, soweit Beobachtungen vorliegen, allgemein zuzutreffen scheint, erwähnen.

Hannover, Kgl. Techn. Hochschule, October 1901.

(Eingegangen 20. October 1901.)

## 13. *Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. J. Koenigsberger betreffs der Susceptibilität des Wassers;* *von G. Jäger und St. Meyer.*

In seiner Abhandlung[1]) führt Hr. Koenigsberger als Mangel unserer Angaben an, dass wir die magnetische Feldstärke stets auf die gleiche Art gemessen hätten. Es scheinen ihm demnach unsere bezüglichen ausführlichen Mitteilungen in den Wiener Sitzungsberichten **106.** (IIa) p. 601. 1897 und **108.** (IIa) p. 262. 1899[2]) unbekannt geblieben zu sein, in denen wir drei verschiedene Bestimmungsmethoden angegeben haben, eine aus der Dämpfung eines schwingenden Drahtrechteckes, eine zweite mittels Wismutspirale und eine dritte aus der Ablenkung eines stromdurchflossenen Solenoides. Eine ausreichende Erklärung für die starken Abweichungen der Resultate der verschiedenen Beobachter steht sonach noch aus.

1) J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. **6.** p. 515. 1901.

2) Vgl. auch l. c. p. 272 die Bemerkung über den von Hrn. Seckelson erhaltenen Wert.

(Eingegangen 14. November 1901.)

# Namenregister zum Jahrgang 1901.


A.

Abraham, M., Energie elektrischer Drahtwellen **6**, 217.

Abt, A., Permanenter Magnetismus von Stahlspecialitäten **6**, 774.

Ångström, K., Abhängigkeit der Absorption der Gase, besonders der Kohlensäure, von der Dichte **6**, 163.

Arrhenius, Sv., Wärmeabsorption durch Kohlensäure **4**, 690.

Aschkinass, E. u. Caspari, W., Wirkung der Becquerelstrahlen auf Bacterien **6**, 570.

Aschkinass, E. u. Schäfer, Cl., Durchgang elektrischer Wellen durch Resonatorsysteme **5**, 489.

van Aubel, E., Thermoelektrisches Verhalten einiger Oxyde und Metallsulfide **4**, 416. — Molecularwärmen zusammengesetzter Körper und das Gesetz von Naumann-Joule-Kopp **4**, 420.

Auerbach, F., Gleichgewichtsfiguren pulverförmiger Massen **5**, 170.

B.

Baur, A., Bemerkung zu der Mitteilung des Hrn. L. Lewin: „Zur Geschichte der Telegraphie" **6**, 659.

Benedicks, C., Entmagnetisirungsfactoren kreiscylindrischer Stäbe **6**, 726.

Benischke, G., Stroboskopische Methoden zur Bestimmung der Wechselzahl und Schlüpfung **5**, 487.

Berndt, G., Bandenspectra der Thonerde und des Stickstoffs **4**, 788.

Breitenbach, P., Innere Reibung der Gase und deren Aenderung mit der Temperatur **5**, 166.

Burbury, S. H., Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie **4**, 642.

C.

Caspari, W., vgl. Aschkinass.

Christiansen, C., Einfluss der Capillarität auf die Ausströmungsgeschwindigkeit der Flüssigkeiten **5**, 436.

D.

Day, A., vgl. Holborn.

Dieterici, C., Die Berechnung der Isothermen **5**, 51. — Theorie des Sättigungszustandes **6**, 861.

Dörrie, H., Verteilung der Elektricität auf dem Ellipsoid **4**, 638.

E.

Ebert, H., Elektricitätszerstreuung in grösseren Höhen **5**, 718.

Eckardt, M., vgl. Thiele.

Einstein, A., Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen **4**, 513.

Eschenhagen, M., Erdmagnetische Elemente zu Potsdam für 1900, sowie Säcularvariationen von 1890 bis 1900 **6**, 424.

F.

Felgentraeger, W., Bemerkungen zu dem Aufsatz des Hrn. Middel **5**, 234.

Fromme, C., Ueber den Magnetismus des Eisens **4**, 853.

G.

Gans, R., Abhängigkeit der elektrolytischen Ueberführung und der elektromotorischen Kraft reversibler Elemente von physikalischen Einflüssen **6**, 315.

Geigel, R., Beitrag zur akustischen Anziehung **6**, 856.

v. Geitler, J., Ueber die durch Kathodenstrahlen bewirkte Ablenkung der Magnetnadel **5**, 924.

Goldhammer, D. A., Die Spectralgleichung des blanken Platins **4**, 828. — Ueber den Druck der Lichtstrahlen **4**, 834.

Graetz, L., Mechanische Darstellung elektrischer und magnetischer Erscheinungen in ruhenden Körpern **5**, 375.

Grimm, C., Beiträge zur Kenntnis der physikalischen Eigenschaften von Silberspiegeln **5**, 448.

Grotrian, O., Elektrometrische Untersuchungen über unipolare Induction **6**, 794.

Grüneisen, E., vgl. Holborn.

Grunmach, L., Capillaritätsconstanten condensirter Gase **4**, 367. — Oberflächenspannung flüssiger Luft **6**, 559.

Guthe, K. E., Beiträge zur Kenntnis der Cohärerwirkung **4**, 762. — Funkenentladung bei schnellen Oscillationen **5**, 818.

H.

Hagenbach, A., Aenderung der Leitfähigkeit von Salzlösungen in flüssiger schwefliger Säure mit der Temperatur bis über den kritischen Punkt. Elektrolytische Leitung in Gasen und Dämpfen. Absorptionsspectra von Lösungen mit Jodsalzen **5**, 276.

Hagenbach, E, Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction **4**, 233.

Harms, F., Verwendung des Calorimeters zu Messungen mit schnellen elektrischen Schwingungen **5**, 565.

Hauser, L., Einfluss des Druckes auf die Viscosität des Wassers **5**, 597.

Hensen, V., Darstellung der Lamellentöne **4**, 41.

Heuse, W., Glimmentladung in Gasgemischen **5**, 670. — Glimmentladung in Helium **5**, 678.

Heydweiller, A., Gewichtsänderungen bei chemischer und physikalischer Umsetzung **5**, 394.

Himstedt, F., Versuche mit Becquerel- und Röntgenstrahlen **4**, 531.

Himstedt, F. u. Nagel, W. A., Einwirkung der Becquerel- und Röntgenstrahlen auf das Auge **4**, 537.

Holborn, L., Untersuchungen über Platinwiderstände und Petrolätherthermometer **6**, 242.

Holborn, L. u. Day, A., Der Schmelzpunkt des Goldes **4**, 99. — Die Ausdehnung einiger Metalle in hoher Temperatur **4**, 104.

Holborn, L. u. Grüneisen, E., Ausdehnung von Porzellan und Glas in hoher Temperatur **6**, 136.

Hollmann, R. u. Tammann, G., Zwei Zustandsdiagramme **6**, 74.

Hornemann, M., Wirkungen der Stromschwankungen auf eine Magnetnadel **4**, 481.

Hulshof, H., Ueber die Oberflächenspannung **4**, 165.

J.

Jäger, G., Verteilung der Elektricität auf dem Ellipsoid **5**, 240.

Jäger, G. u. Meyer, St., Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. J. Koenigsberger betreffs der Susceptibilität des Wassers **6**, 870.

Jaeger, H., Magnetische Spiegelbilder **4**, 345.

Jaeger, W., Unregelmässigkeiten Weston'scher Cadmiumelemente **4**, 123.

Jaeger, W. u. Lindeck, St., Untersuchungen über Normalelemente, insbesondere über das Weston'sche Cadmiumelement **5**, 1.

Jahnke, E., Lummer, O. u. Pringsheim, E., Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung **4**, 225.

Johnson, K. R., Vorgänge in Inductionsapparaten **4**, 137, 722. — Constanz oder Inconstanz des Funkenpotentiales **5**, 121.

K.

Kahlbaum, G. W. A., Glossen zur selbstthätigen Quecksilberluftpumpe **6**, 590.

Kapp, A. W., Studien über das Lufthermometer **5**, 905. — Vollständige Gefrierpunktscurven binärer Metalllegirungen **6**, 754.

Kaufmann, W., Analogie zwischen dem elektrischen Verhalten Nernst'scher Glühkörper und demjenigen leitender Gase **5**, 757.

Kerkhof, K., Ueber die Temperaturen in Geissler'schen Röhren **4**, 327.

Kiebitz, F., Elektrische Schwingungen eines stabförmigen Leiters **5**, 872. — Bestimmungen der Resonanz elektrischer Schwingungen mit Hülfe des Cohärers **6**, 741.

Klemenčič, I., Prüfung von Magnetstahlsorten **4**, 316. — Ueber die Aufbewahrung von Normalmagneten in Eisenbüchsen **6**, 174. — Beiträge zur Kenntnis des Magnetisirungsvorganges I. Ueber Härtungsnachwirkungen **6**, 181.

Klingelfuss, Fr., Untersuchungen an Inductorien an Hand der Bestimmungsstücke derselben **5**, 837.

Knoblauch, E., Spitzenentladung aus Teslapol **6**, 353.

König, W., Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten **4**, 1.

Koenigsberger, J., Abhängigkeit der Absorption des Lichtes in festen Körpern von der Temperatur **4**, 796. — Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von Druck und Temperatur **5**, 113. — Verwendung des Quadrantelektrometers zur Messung der magnetischen Feldstärke **6**, 506.

Kohl, M., Apparat für Cavendish's Versuch **6**, 641.

Korn, A., Ueber die helle *J*-Fläche Jaumann's **5**, 136.

Kreusler, H., Der photoelektrische Effect in der Nähe des Funkenpotentiales **6**, 398. — Anwendung des photoelektrischen Stromes zur Photometrie der ultravioletten Strahlen **6**, 412.

Krüger, J., Einfluss der Temperatur auf die Wärmeleitung von Gläsern **5**, 919.

Kurlbaum, F., vgl. Lummer und vgl. Rubens.

L.

Lebedew, P., Die Druckkräfte des Lichtes **6**, 433.

Lehmann, O., Flüssige Krystalle, Entgegnung auf Hrn. Tammann **5**, 236. — Elektrisirung der Luft durch Glimmentladung **6**, 661.

Lehmann, H., Photographie der ultraroten Spectren der Alkalimetalle **5**, 633.

Lemström, S., Verhalten der Flüssigkeiten in Capillarröhren unter Einfluss eines elektrischen Luftstromes **5**, 729.

Lewin, L., Zur Geschichte der Telegraphie **4**, 231.

Lindeck, St., vgl. Jaeger.

Lindmann, K. F., Metallreflexion der elektrischen Schwingungen **4**, 617.

Lownds, L., Thermomagnetischer Longitudinaleffect **4**, 776. — Thermomagnetisches und thermoelektrisches Verhalten des krystallinischen Wismuts **6**, 146.

Lummer, O. u. Kurlbaum, F., Der elektrisch geglühte „schwarze" Körper 5, 829.

Lummer, O. u. Pringsheim, E., Kritisches zur schwarzen Strahlung 6, 192.

Lummer, O., vgl. Jahnke.

M.

Manley, J., vgl. Veley.

Martens, F. F., Dispersion ultravioletter Strahlen 6, 603.

Matthiessen, L., Theorie der geschweiften Strahlenbüschel 5, 659. — Das astigmatische Bild des horizontalen Grundes eines Wasserbassins 6, 347.

Maurach, H., Effectverlust in Eisen durch Hysteresis 6, 580.

Middel, Th., Erwiderung auf Hrn. Felgentraeger 6, 214.

Mizuno, T., Einfluss eines selbstinductionslosen Widerstandes auf die oscillatorische Condensatorentladung 4, 811.

Mosler, H., Temperaturcoefficient der Susceptibilität einiger Eisensalzlösungen 6, 84.

Meyer, St., vgl. Jäger.

N.

Naber, H. A., Das Luftbarometer 4, 815.

Nagel, W. A., vgl. Himstedt.

v. Niesiolowski-Gawin, V., Neuer Versuch zur Dynamik 5, 479.

O.

Olshausen, R., Unipolarrotation 6, 681.

P.

Paschen, F., Das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers 4, 277. — Dispersion des Flussspates im Ultrarot 4, 299. — Selectives Reflexionsvermögen einiger Planspiegel 4, 304. — Entgegnung auf Herren Lummer u. Pringsheim 6, 646. — Vgl. auch Runge.

van der Plaats, J. D., Subjective Bilder von Cylinderlinsen und astigmatischen Linsen 5, 772.

Planck, M., Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum 4, 553. — Elementarquanta der Materie und der Elektricität 4, 564. — Irreversible Strahlungsvorgänge. Nachtrag 6, 818.

Pockels, F., Theorie der Niederschlagsbildung an Gebirgen 4, 459.

Pringsheim, E., vgl. Lummer.

R.

Reichardt, G., Elektrische Eigenschaften der Legirungen von Kupfer und Kobalt 6, 832.

Reinganum, M., Theorie der Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase 6, 533. — Prüfung der Zustandsgleichung schwach comprimirter Gase 6, 549.

Riecke, E., Bewegung eines elektrischen Teilchens im elektrostatischen und elektromagnetischen Kraftfeld 4, 378. — Schichtung in einem Strome elektrischer Teilchen 4, 388. — Charakteristische Curven bei der elektrischen Entladung durch verdünnte Gase 4, 592.

Rubens, H. u. Kurlbaum, F., Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes 4, 649.

Ruhmer, E., Kinematographische Flammenbogenaufnahmen und das Photographophon 5, 803.

Runge, C. u. Paschen, F., Beiträge zur Kenntnis der Linienspectra 5, 725.

S.

Sauter, J., Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen 6, 331.

Schäfer, Cl., Einfluss der Temperatur auf Elasticität der Metalle 5, 220. — Vgl. auch Aschkinass.

Schiller, N., Begriff des thermischen Verkehrs als Grundlage

des zweiten thermodynamischen Hauptsatzes 5, 313. — Zur Thermodynamik gesättigter Lösungen 5, 326.

Schönherr, P., Polarisationscapacität des blanken Platins 6, 116.

Schuler, W., Empfindlichkeit spectralanalytischer Reactionen 5, 931.

Schultze, H., Innere Reibung von Argon 5, 140. — Innere Reibung von Helium 6, 302.

Schumann, V., Lichtdurchlässigkeit des Wasserstoffs 4, 644. — Verbessertes Verfahren zur Herstellung ultraviolett empfindlicher Platten 5, 349.

v. Schweidler, E., Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgang des elektrischen Stromes 4, 307, 483.

Seitz, W., Kathodenstrahlen 6, 1.

Silberstein, L., Symbolische Integrale der elektromagnetischen Gleichungen 6, 373.

Stark, J., Leitfähigkeit durchströmter Gase 4, 215. — Ionisirung durchströmter Gase 4, 402. — Elektrische Strömung in Gasen 5, 89. — Bemerkungen über das Ohm'sche Gesetz 5, 793.

Sundell, F. A. u. Tallqvist, Hj., Decrement elektrischer Schwingungen 4, 72.

T.

Tallqvist, Hj., vgl. Sundell.

Tamm, F., Einfluss des Luftdruckes und der Luftfeuchtigkeit auf die elektrische Spitzenentladung 6, 259.

Tammann, G., Flüssige Krystalle 4, 524. — Tripelpunkte 6, 65. — Vgl. auch Hollmann.

Tangl, K., Wirkung der Magnetisirung auf Dehnungsmodul 6, 34.

Thiele, H. u. Eckardt, M., Quecksilbergedichtete Hähne 6, 428.

Thiesen, M., Angebliche Anomalie des Sauerstoffs bei geringem Druck 6, 280.

Toepler, M., Einfluss von Diaphragmen auf elektrische Dauerentladung 6, 339.

Traube, J., Ueber Atom- und Molecularräume 5, 548.

V.

Veley, V. H. u. Manley, J. J., Zwei Methoden, Refractometerkreise zu calibriren 6, 575.

Viol, O., Mechanische Schwingungen isolirt gespannter Drähte mit sichtbarer elektrischer Seitenentladung 4, 734.

Voigt, W., Numerisches Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien 4, 187. — Elektrisches Analogon des Zeemaneffectes 4, 197. — Aenderung der Schwingungsform des Lichtes im dispergirenden und absorbirenden Mittel 4, 209. — Zur Festigkeitslehre 4, 567. — Parameter der Krystallphysik 5, 241. — Zur Elektronentheorie des Lichtes 6, 459. — Magnetische Drehung der Polarisationsebene innerhalb eines Absorptionsstreifens 6, 784.

W.

Wachsmuth, R., Bestimmung der Wechselzahl eines Wechselstromes 4, 323.

Warburg, E., Bemerkungen zur Arbeit des Hrn. v. Schweidler 4, 648. — Wirkung der Strahlung auf die Funkenentladung 5, 811. — Polarisationscapacität des Platins 6, 125.

Weber, R., Sichtbarmachung der Deformation von Wechselströmen 6, 565.

Weber, R. H., Oberflächenspannung beölter Wasserflächen 4, 706. — Die durch elektrische Spitzenentladung erzeugten Curven 6, 96.

Weinhold, A., Abänderung des Thermostaten von Laspeyres 5, 943.

Wenzel, E., Volumenänderungen von Flüssigkeiten durch Gasabsorption 6, 520.

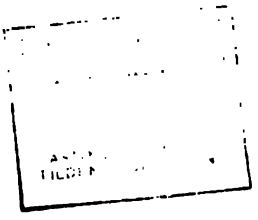
Wiechert, E., Elektrodynamische Elementargesetze 4, 667.
Wiedeburg, O., Zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik 5, 514.
Wien, M., Erzeugung und Messung von Sinusströmen 4, 425. — Die akustischen und elektrischen Constanten des Telephons 4, 450.
Wien, W., Zur Theorie der Strahlung; Bemerkungen zur Kritik des Hrn. Planck 4, 422. — Elektrische Entladung in verdünnten Gasen 5, 421. — Elektromagnetische Begründung der Mechanik 5, 501.
Winkelmann, A., Diffusi Wasserstoff durch Palladiu
Woringer, B., Schwimmer ventil als Hülfsmittel, um silber zu heben 6, 211.

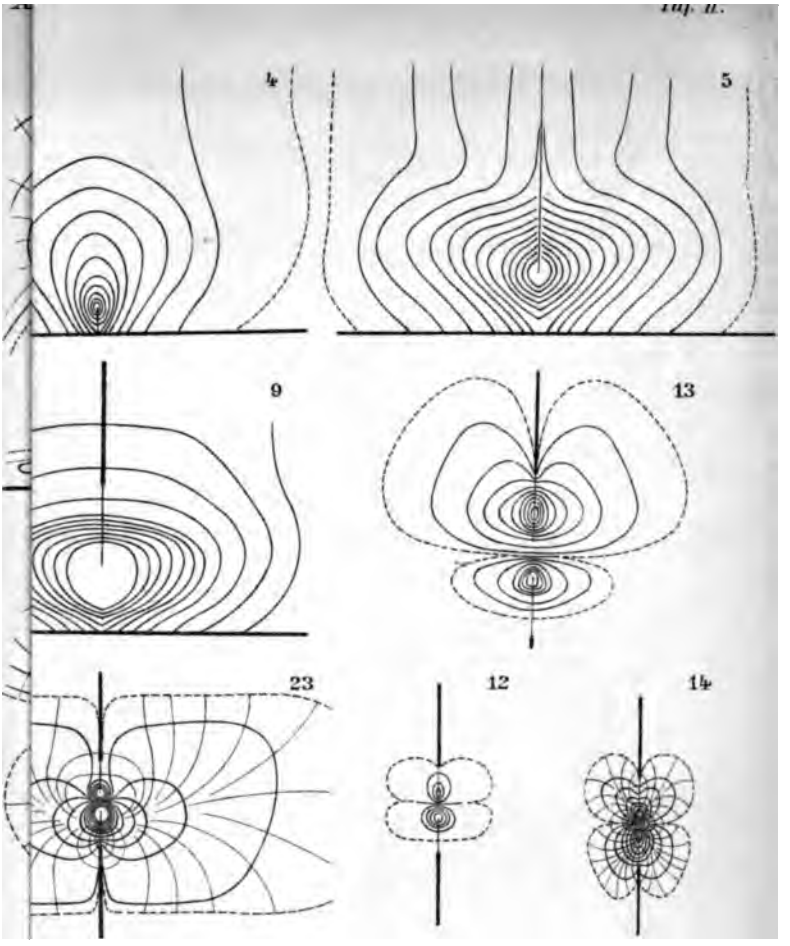
## Z.

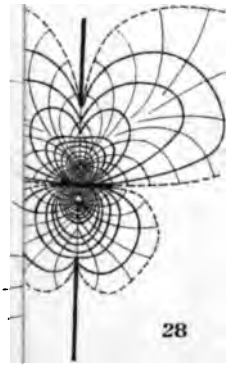
Zehnder, L., Ueber Gitt achtungen 5, 685.
Zenneck, J., Physikalische pretation von Ausdrück der Theorie unendlich Schwingungen 5, 707. — tigung 6, 432.
Zsigmondy, R., Absorpti Lichtes in Farbgläsern 4,

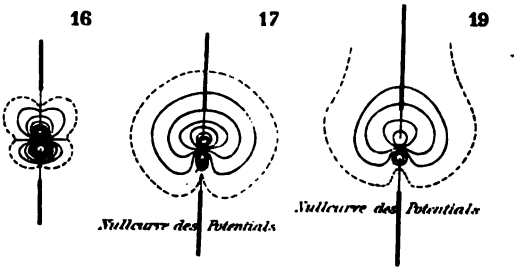
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

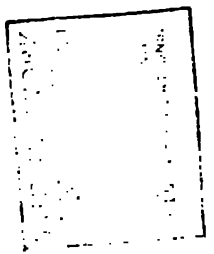
YORK
ASSAY




4
5
9
13
23
12
14


28


16
17
19
Nullcurve des Potentials
Nullcurve des Potentials

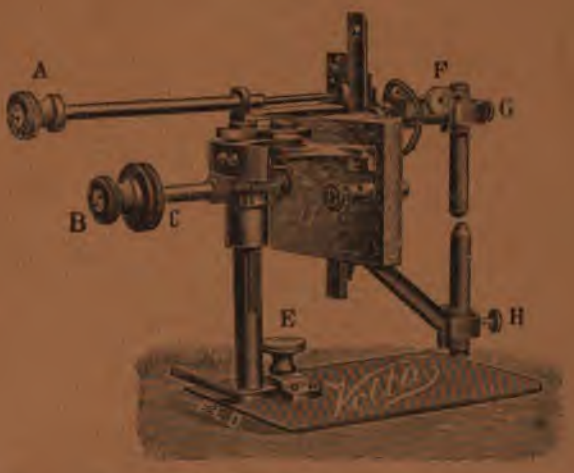


# Projektions-Bogenlampe „Volta“

für **Handregulation,**

zwei Stellungen für Gleich- und Wechselstrom.

**(Gesetzlich geschützt!)**




Es ist allgemein die Erfahrung gemacht worden, dass sich für Projektion und besonders mikroskopischer Projektion automatische Bogenlampen weniger gut eignen, als solche mit Handregulation. Besonders ist es das leichte Centrieren des Lichtpunktes, die unbedingte Zuverlässigkeit des Betriebes bei Fehlen jedes komplizierten Mechanismus und die **sofortige Verwendbarkeit für jede beliebige Stromstärke,** was der Handregulierlampe den Vorzug giebt. Da der Projektionsapparat ja doch von Hand bedient werden muss, ist es eine kleine Mühe, alle 2—3 Minuten zugleich durch kurzes Drehen des Triebes A die Kohlen einander zu nähern. Triebe B und C dienen zum Heben und Senken resp. Seitwärtsbewegen des Lichtpunktes. Die Bogenlampe „Volta“ ist seit 5 Jahren in hunderten von Exemplaren überall verbreitet.

## Ed. Liesegang, Düsseldorf.

### Specialwerkstätten für Projektionsapparate.

**Gegründet 1854.**

# E. Leybold's Nachfolger

## Köln a. Rh.

liefern:

## Phasenumkehrungs-Zonenplatten

nach Prof. **Wood.**

(Phil. Mag. 45, p. 511—522, 1898; Beibl. 22, p. 850, 1898.)

***Preis ℳ 10.—.***

## Cyaninprismen

nach Prof. **Wood,**

**zur subjektiven Demonstration der anomalen Dispersion.**

(Phil. Mag. 1, p. 624—627, 1901; Beibl. 25, p. 601, 1901.)

*In Fassung*

***Preis ℳ 15.—.***

## Cyaninprismen

mit aufgekitteten Diffraktionsgittern

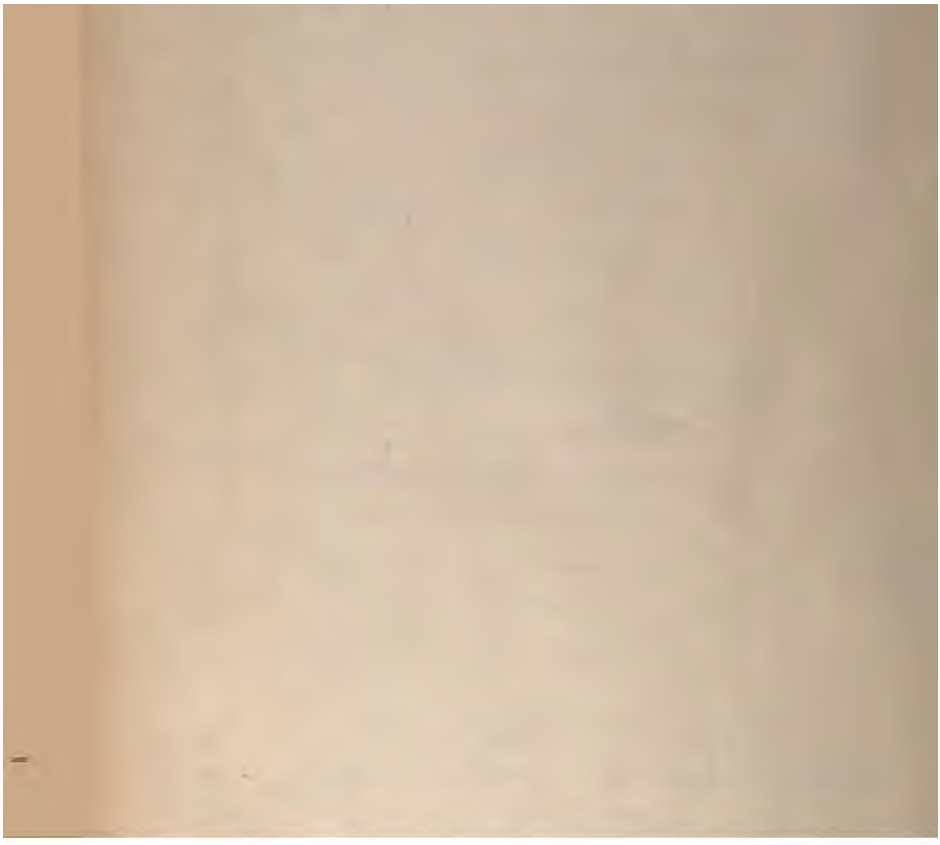
nach Prof. **Wood**

**zur subjektiven Demonstration der Dispersionscurven.**

(Phil. Mag. 1, p. 624—627, 1901; Beibl. 25, p. 601, 1901.)

*In Fassung*

***Preis ℳ 20.—.***


Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.